韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 17집, 2003. 10. 115-126.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 17, Dec. 2003. 115-126.

수학 문제해결에서 아르키메데스의 공학적 방법에 관한 연구

한 인 기 (경상대학교)[1)]

수학사는 수학적 사실이나 수학자에 대한 연대기적 나열만을 의미하는 것은 아니다. 수학사에서는 수학적 개념들, 정리들, 연구 방법의 발생, 축적, 그리고 발전에 대한 폭넓은 견해를 접할 수 있다. 특히, 수학사에서 접할 수 있는 수학 문제해결의 다양한 방법은 수학 교수-학습 과정에서 교사의 올바른 교수학적 선택을 위한 중요한 기초 자료가 될 수 있다. 본 연구에서는 그리스의 수학자 아르키메데스가 구의 부피를 구하기 위해 사용했던 공학적 문제해결 방법을 살펴보고, 공학적 방법의 활용에 관련된 수학적 기초를 살펴보고, 공학적 문제해결 방법을 중등학교 수학 영재교육에 활용할 수 있는 가능성을 모색할 것이다.

1. 서 론

최근 들어 수학사에 대한 관심이 증가되어, 수학사에 관련된 다양한 서적들이 국내의 전문가들에 의해 혹은 외국 서적의 번역을 통해 국내에 소개되고 있다(Eves/ 이우영 · 신항균 역(1999); Boyer & Merzbach/ 양영오 · 조윤동 역(2000); 김용운 · 김용국(1996); 오승재 편역(1997); 한인기 (2003b); Kanigel/ 김인수 역(2000); 이종우(1999) 등). 수학사에 대한 이러한 관심은 수학교육의 질적 양적 수준의 향상이라는 측면에서 고무적이라 할 수 있다. 특히, 학생들은 수학을 배우면서 인류가 수학적 지식을 획득하면서 지나왔던 길을 짧게 반복한다는 가정에 근거한 수학 역사-발생적 방법의 측면에서 보면, 수학적 개념, 정리, 탐구 방법의 발생, 발전 과정에 대한 조명을 통해 수학교육을 개선하려는 시도는 의미심장할 것이다.

수학적 사실이나 탐구 방법 고찰에 관련된 최근 국내의 수학사에 관련 연구 논문들을 살펴보면, 김주영 · 김성숙(2001), 양영오(2000), 강미광(2000), 홍영희(2000), 한인기 · 강인주(2000a), 한용현(2001), 한길준 · 정승진(2001), 이종희(2002), 한인기(2003a) 등을 들 수 있다. 이들 연구에서는 수학의 다양한 분야나 구체적인 개념의 발생 및 발전에 관련된 진지한 논의가 이루어졌다는 점에서는 고무적이라 할 수 있지만, 수학사에 나타나는 수학적 탐구 방법을 밝히고 수학교육에 활용 가능성 모색하는 것에 관련된 연구가 거의 없다.

본 연구에서는 그리스의 수학자 아르키메데스가 구의 부피를 구하기 위해 사용했던 수학 탐구 방법을 살펴보고, 이에 관련된 몇몇 수학적 개념과 정리들을 고찰하여, 아르키메데스의 수학 탐구 방법

1) 경상대학교 교육연구원 책임연구원임.

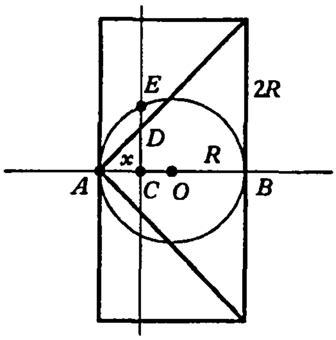
을 중등학교 수학 영재교육에 활용할 수 있는 가능성을 모색할 것이다. 이를 통해, 고대의 수학적 탐구 방법을 이용하여 중등학교 수학 영재교육에 관련된 교과내용의 다양한 접근을 모색하고, 수학사를 수학 영재교육에 활용할 수 있는 가능성을 모색할 것이다.

2. 아르키메데스의 공학적 문제해결

아르키메데스가 공학적 도구[2)]를 이용하여 구의 부피에 관한 문제를 해결했다는 것은 잘 알려진 사실이다. 구의 부피를 구하는 문제의 해결 방법은 '에라토스테네스에게 쓴 편지'에 기술되어 있으며, 문제해결 과정에서 어떠한 공학적 개념들이 사용되었는가를 한인기(2003)의 연구를 중심으로 살펴보자.

반지름이 R인 원, 원과 같은 중심을 가지며 변의 길이가 2R과 4R인 직사각형을 작도하고, 직사각형에 꼭지점 A가 직각인 직각삼각형을 내접시키자(<그림 1>). 이때, 축 AB를 중심으로 그림을 회전시키면, 원은 반지름이 R인 구가 되며, 직사각형은 밑면의 반지름이 2R인 원기둥이 되며, 직각삼각형은 원기둥에 내접하는 원뿔이 된다.

이제, 회전축 AB에 점 A로부터 x만큼 떨어진 점 C를 잡고, 점 C를 지나 $\overleftrightarrow{AB}$에 직교하는 평면 α를 작도하자. 이때, 평면 α와 원기둥의 절단면은 반지름이 2R인 원이 되고, 원뿔과의 절단면은 반지름이 $\overline{CD} = \overline{AC} = x$인 원이 되고(직각삼각형에서 직각에서 그은 중선은 빗변의 절반과 같으므로), 구와의 절단면은 반지름이 $\overline{CE}$인 원이 된다. <그림 1>에서 보면, $\overline{AE}^2 = \overline{CE}^2+\overline{AC}^2 = \overline{CE}^2+\overline{CD}^2$.



<그림 1>

한편, △AEB는 직각삼각형이므로, $\overline{AE}^2 = \overline{AB}\cdot\overline{AC}$. 결국, $\overline{AB}\cdot\overline{AC} = \overline{CD}^2+\overline{CE}^2$. 얻어진 등식의 양변에

2) 현재 사용되는 공학이라는 개념은 매우 포괄적이며, 공업에 이바지할 것을 목적으로 자연과학적 기법을 사용하여 신제품이나 신기술을 연구하는 학문으로 정의할 수 있다. 공학에 관련되어 연구하는 대표적인 학문 분야로는 기계공학, 화학공학, 재료공학, 원자력공학, 인간공학, 경영공학, 사회공학, 교육공학, 도시공학, 환경공학, 정보공학, 생물공학, 우주공학, 해양공학 등을 들 수 있다. 역사적으로 보면, 공학은 고대 그리스에서 학문 영역으로 발전한 한 분야로, 그 당시에 공학은 사회적인 생산력 증대와 실제적인 필요에 의해 발생하여 발전되었다. 공학의 분야 중에서 초창기에는 역학이 발전하였으며, 이러한 증거는 고대 이집트나 바빌로니아의 유적에서 간접적으로 찾아볼 수 있다. 특히, 아르키메데스는 현대 역학의 기초를 마련했고, 지렛대의 원리, 무게중심, 유체역학 등에 관련하여 탁월한 업적을 남겼다. 본 연구에서 사용하는 <공학적 방법>에서 '공학'의 개념은 현대적인 의미보다는 훨씬 축소된 개념으로, 아르키메데스가 역학분야의 연구에서 사용했던 지렛대의 원리나 무게중심 등의 구체적인 방법을 의미한다.

$\pi \cdot \overline{AB}$를 곱하면,

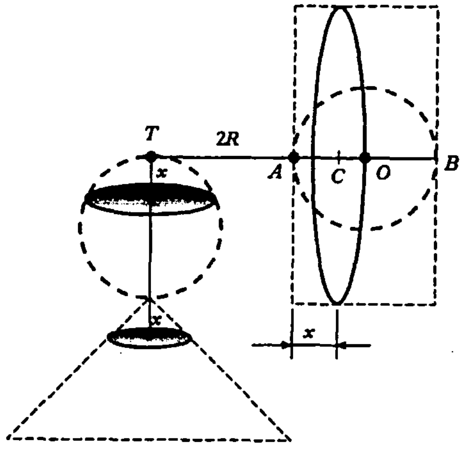
$$\pi \cdot \overline{AB}^2 \cdot \overline{AC} = \pi \cdot \overline{CD}^2 \cdot \overline{AB} + \pi \cdot \overline{CE}^2 \cdot \overline{AB} \text{ --- ①}$$

$\pi \cdot \overline{CD}^2$은 평면 α와 원뿔의 절단면인 원의 넓이로 $S_{원뿔}$이라 하고, $\pi \cdot \overline{CE}^2$은 α와 구의 절단면인 원의 넓이로 $S_{구}$라 하자. 그리고, $\pi \cdot \overline{AB}^2$은 α와 원기둥의 절단면인 원의 넓이로 $S_{원기둥}$이라 하자. 그러면, 등식 ①은

$$x \cdot S_{원기둥} = 2R(S_{원뿔} + S_{구}) \text{ --- ②}$$

와 같이 쓸 수 있다. 이때, x값이 정해진 값이 아닌 변수이기 때문에, 식 ②에 대한 적절한 해석이 필요하다. 아르키메데스의 생각을 살펴보자.

$\overleftrightarrow{AB}$에서 점 A의 왼쪽에 $\overline{AB} = \overline{AT}$인 점 T를 잡아, $\overline{AB}$와 $\overline{AT}$를 점 A를 중심으로 하는 지렛대의 양끝으로 생각하고, 식 ②를 지렛대의 원리에 근거하여 공학적으로 해석했다.



<그림 2>

구의 절단면과 원뿔의 절단면을 점 T로 옮기고, 원기둥의 절단면을 C로 옮기면, 이들은 점 A를 중심으로 균형을 이루게 된다. 그런데, x가 정해진 값이 아니므로, 점 C의 위치는 x의 값에 따라 변화하게 된다. x가 0에 2R까지의 값을 가지는 $\overline{AB}$에 직교하는 임의의 절단에 대해, 점 A를 중심으로 2R만큼 떨어진 구와 원뿔의 절단면은 x만큼 떨어진 원기둥의 절단면과 균형을 이룬다(<그림 2>).

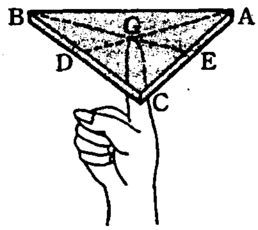
이러한 절단에 의한 단면들을 모두 모으면, 점 T에는 구와 원뿔을 구성하는 모든 절단면이 놓이게 되고, 오른쪽에는 원기둥의 모든 절단면이 놓이게 된다. 이때, 아르키메데스는 원뿔과 구의 무게중심이 점 T의 아래에 바로 놓이도록 이들을 놓는다면, 점 A를 중심으로 지렛대가 균형을 이룰 것이라고 했다. 이때, 원기둥의 무게중심은 $\overline{AB}$의 중점 O에 위치하게 된다.

이제, 원기둥의 부피, 구의 부피, 원뿔의 부피를 각각 $V_{원기둥}$, $V_{구}$, $V_{원뿔}$로 나타내면, 지렛대의 원리에 의해, $V_{원기둥} \cdot \overline{AO} = (V_{구} + V_{원뿔}) \cdot \overline{AT}$, $R \cdot V_{원기둥} = 2R \cdot (V_{구} + V_{원뿔})$. 이로부터, $V_{구} = \frac{1}{2} V_{원기둥} - V_{원뿔}$.

한편, 원기둥과 같은 밑면과 높이를 가지는 원뿔의 부피는 원기둥 부피의 $\frac{1}{3}$이므로, $V_{원뿔} = \frac{1}{3} V_{원기둥}$. 그러므로, $V_{구} = \frac{1}{2} V_{원기둥} - V_{원뿔} = \frac{1}{2} V_{원기둥} - \frac{1}{3} V_{원기둥} = \frac{1}{6} V_{원기둥}$.

이것을 원주율을 이용하여 나타내면, $V_{구} = \frac{1}{6} V_{원기둥} = \frac{1}{6}\pi(2R)^2(2R) = \frac{4}{3}\pi R^3$.

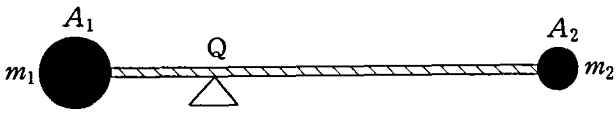
이제, 아르키메데스가 구의 부피를 구하는데 사용한 공학적 개념을 살펴보자. 첫째, 구, 원뿔, 원기둥의 질량과 무게중심의 개념을 문제해결에 사용하였다. 무게중심은 중학교 수학과 교육과정에서 다루지만, 중학교 수학교과서에서 삼각형의 무게중심은 기하학적으로 '삼각형에서 꼭지점과 대변의 중점을 연결한 선분을 중선이라 하고, 세 중선의 교점을 무게중심'이라고 정의하였다. 비록 수학교과서에 <그림 3>과 같은 표현을 쉽게 찾아볼 수 있기는 하지만, 삼각형이 점 G에서 왜 균형을 이루는가에 대한 어떤 설명도 없다. 그래서, 무게중심에 대한 학생들의 생각이 물리적 대상에 대한 공학적 의미보다는 도형에서 중선들의 교점이라는 기하학적 의미로 한정될 가능성이 있다.



<그림 3>

아르키메데스는 구, 원뿔, 원기둥에 물리적 해석을 첨가하여 이들의 무게중심을 찾아 지렛대의 원리를 이용하여 문제를 해결하였다.

둘째, 공학적 도구인 지렛대의 원리를 수학 문제해결에 사용하였다. <그림 4>에서는 아르키메데스의 지렛대의 원리를 나타낸다. 지탱점을 Q라 하고, 무게가 m_1인 대상이 A_1에, 무게가 m_2인 대상이 A_2에 있다고 하자. 이때, 지렛대의 원리는 지렛대가 평형을 이룰 필요충분조건은 $\frac{|QA_1|}{|QA_2|} = \frac{m_2}{m_1}$, 즉 $m_1|QA_1| = m_2|QA_2|$이다. 등식 $m_1|QA_1| = m_2|QA_2|$을 벡터로 나타내면, $m_1\overrightarrow{QA_1} = -m_2\overrightarrow{QA_2}$ 또는 $m_1\overrightarrow{QA_1} + m_2\overrightarrow{QA_2} = \vec{0}$과 같이 쓸 수 있다.



<그림 4>

3. 수학 문제해결을 위한 공학적 방법의 기초

아르키메데스의 공학적 방법을 수학 문제해결에 사용하기 위해 몇몇 기초 개념과 정리들을 살펴보자. 우선, 질량을 가진 점을 질량점(mass point)이라 부르고, 질량점을 (A, m)과 같이 순서쌍으로 표현하자. 이때, A를 질량점의 위치를 나타내는 점이며, m는 질량점의 무게를 나타내는 양수이다.

한편, 공학적 의미로의 무게중심은 지탱점 Q에서 두 질량점 $(A_1,\ m_1)$, $(A_2,\ m_2)$에 대해 지렛대가 평형을 이루면 점 Q를 질량점 $(A_1,\ m_1)$, $(A_2,\ m_2)$의 무게중심으로 정의할 수 있다. 그러면, 두 질량점 $(A_1,\ m_1)$, $(A_2,\ m_2)$의 무게중심 Q를 벡터를 이용하여 나타내면, $m_1\overrightarrow{QA_1}+m_2\overrightarrow{QA_2}=\vec{0}$이 된다. 이로부터, 유한개의 질량점에 대한 무게중심을 정의할 수 있다.

질량점 $(A_1,\ m_1)$, $(A_2,\ m_2)$, $\cdots$, $(A_k,\ m_k)$에 대해 점 Q가 등식 $m_1\overrightarrow{QA_1}+m_2\overrightarrow{QA_2}+\cdots+m_k\overrightarrow{QA_k}=\vec{0}$을 만족시키면, 점 Q를 k개의 질량점에 대한 무게중심이 된다. 이로부터, <그림 3>에 나타난 시각적 표현과 삼각형의 무게중심에 대한 해석이 일치하게 된다.

이제, 공학적 개념으로의 무게중심에 대한 몇몇 일반화된 성질을 살펴보자.

정리 1. 점 Q를 $(A_1,\ m_1)$, $(A_2,\ m_2)$, $\cdots$, $(A_k,\ m_k)$의 무게중심이라 하면, 임의의 점 O에 대해, $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{m_1+m_2+\cdots+m_k}(m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots+m_k\overrightarrow{OA_k})$이 성립함을 증명하여라.

증명. 질량점들의 무게중심 Q에 대해 $m_1\overrightarrow{QA_1}+m_2\overrightarrow{QA_2}+\cdots+m_k\overrightarrow{QA_k}=\vec{0}$이 성립한다. 이것을 점 O에 대해 다시 쓰면, $m_1(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OQ})+m_2(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OQ})+\cdots+m_k(\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OQ})=\vec{0}$. 얻어진 등식에서 $\overrightarrow{OQ}$를 이항하면,

$$m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots+m_k\overrightarrow{OA_k}=(m_1+m_2+\cdots+m_k)\overrightarrow{OQ}.$$

이로부터, $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{m_1+m_2+\cdots+m_k}(m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots+m_k\overrightarrow{OA_k})$. □

이제, 정리 1의 역인 무게중심의 조건을 살펴보자.

정리 2. 임의의 점 O에 대해, 등식

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{m_1+m_2+\cdots+m_k}(m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots+m_k\overrightarrow{OA_k})$$

이 성립하면, 점 Q는 질량점 $(A_1,\ m_1)$, $(A_2,\ m_2)$, $\cdots$, $(A_k,\ m_k)$의 무게중심임을 증명하여라.

정리 2의 증명은 정리 1의 증명 과정을 거꾸로 써 가면 얻어지므로 생략한다. 이제, 질량점의 무게중심에 대한 성질을 하나 더 살펴보자.

정리 3. $(A_1,\ m_1)$, $\cdots$, $(A_k,\ m_k)$, $(B_1,\ n_1)$, $\cdots$, $(B_l,\ n_l)$이 주어졌다. $(A_1,\ m_1)$, $\cdots$, $(A_k,\ m_k)$의 무게중심을 P라 하면, $(P,\ m_1+\cdots+m_k)$, $(B_1,\ n_1)$, $\cdots$, $(B_l,\ n_l)$의 무게중심은 $(A_1,\ m_1)$, $\cdots$, $(A_k,\ m_k)$, $(B_1,\ n_1)$, $\cdots$, $(B_l,\ n_l)$의 무게중심과 일치한다는 것을 증명하여라.

증명. $(A_1,\ m_1), \cdots, (A_k,\ m_k), (B_1,\ n_1), \cdots, (B_l,\ n_l)$의 무게중심을 Q라 하고, $(P,\ m_1+\cdots+m_k), (B_1,\ n_1), \cdots, (B_l,\ n_l)$의 무게중심을 Q′이라 하자. 그러면, 임의의 점 O에 대해 정리 1에 의해

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{m_1+\cdots+m_k+n_1+\cdots+n_l}(m_1\overrightarrow{OA_1}+\cdots+m_k\overrightarrow{OA_k}+n_1\overrightarrow{OB_1}+\cdots+n_l\overrightarrow{OB_l}),$$

$$\overrightarrow{OQ'} = \frac{1}{m_1+\cdots+m_k+n_1+\cdots+n_l}((m_1+\cdots+m_k)\overrightarrow{OP}+n_1\overrightarrow{OB_1}+\cdots+n_l\overrightarrow{OB_l}),$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{m_1+\cdots+m_k}(m_1\overrightarrow{OA_1}+\cdots+m_k\overrightarrow{OA_k}).$$

$\overrightarrow{OP}$를 $\overrightarrow{OQ'}$의 식에 대입하면,

$$\overrightarrow{OQ'} = \frac{1}{(m_1+\cdots+m_k)+n_1+\cdots+n_l}((m_1\overrightarrow{OA_1}+\cdots+m_k\overrightarrow{OA_k})+n_1\overrightarrow{OB_1}+\cdots+n_l\overrightarrow{OB_l}).$$

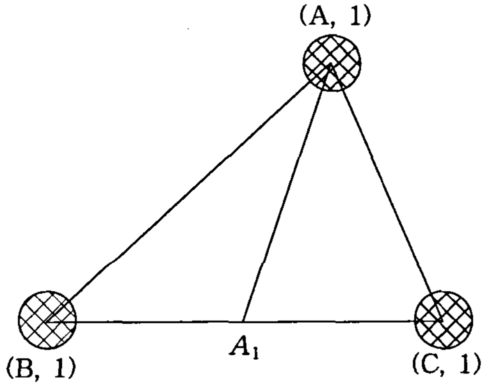
이로부터, $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ'}$이고, 점 Q와 Q′은 일치함을 알 수 있다. □

살펴본 정리 1, 2, 3은 k개의 질량점의 무게중심에 대한 일반화된 성질로, 이를 이용하여 삼각형의 무게중심에 대한 공학적 증명 뿐만 아니라, 볼록사각형, 볼록오각형, …, 볼록 n각형에 대한 무게중심을 일반화하여 증명할 수 있다.

4. 삼각형의 무게중심에 대한 공학적 증명

삼각형의 무게중심에 대한 기하학적 증명은 중학교 2학년 수학교과서에서 볼 수 있다. 수학교과서에 제시된 구체적인 증명 방법은 생략하고, 수학교과서에 제시된 닮음을 이용한 증명 방법의 몇 가지 단점을 살펴보자. 한인기 · 강인주(2000b)에 의하면, 현행 수학교과서에 제시된 접근 방법은 첫째, 교과서에 제시된 무게중심에 관한 정리는 "삼각형의 세 중선은 한 점에서 만나고, 그 교점은 각 중선을 2:1로 나눈다"고 기술되어 있기 때문에, 증명 과정에서 두 중선의 교점이 중선을 2:1로 나눈다는 사실을 이용하여 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 증명하는 것이 부자연스럽고, 둘째 세 선분 a, b, c가 한 점에서 만난다는 것을 보이기 위해, 선분 a, b의 교점이 각 선분을 일정한 비로 나누고, 선분 a, c의 교점이 각 선분을 일정한 비로 나누는데, 이때 얻어진 비가 같다는 것으로부터 세 선분 a, b, c가 한 점에서 만난다는 문제해결의 아이디어를 찾아내기가 쉽지 않다고 하였다.

이제, 지렛대의 원리를 이용한 공학적 증명 방법을 살펴보자. △ABC의 꼭지점 A, B, C에 같은 질량을 부여하자(그림 5). 가령, 꼭지점 A, B, C에 무게가 1g인 추를 △ABC의 면에 직교하도록 매달았다고 하자. 그러면, 삼각형의 세 꼭지점을 질량점 (A, 1), (B, 1), (C, 1)과 같이 나타낼 수 있다. 이제, 중선을 $\overline{AA_1}$을 작도하자.



<그림 5>

(B, 1), (C, 1)의 무게중심은 $\overline{BC}$의 중점인 A_1이다. 정리 3에 의해, (A, 1), (B, 1), (C, 1)의 무게중심 G는 (A, 1)과 (A_1, 2)의 무게중심과 일치한다. 그러므로, G는 $\overline{AA_1}$에 속한다. 이제, 꼭지점 B, C로부터 중선 $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$을 그으면, 마찬가지 이유로 G는 $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$에 속함을 알 수 있다. 이로부터, 삼각형의 세 중선은 한 점에서 만난다.

질량점의 무게중심의 정의로부터 점 G는 $\overline{AA_1}$을 2:1로 나누는 점, 즉 $2|GA_1| = 1|GA|$이 성립하는 점임을 알 수 있다. 그러므로, 무게중심은 각 중선을 2:1로 나눈다. □

지렛대의 원리를 이용한 삼각형의 무게중심의 증명은 수학교과서에 제시된 증명 방법의 단점을 제거하였다. 지렛대의 원리를 이용한 증명에서는 삼각형의 무게중심이 각 중선에 속함을 보여 세 중선이 한 점에서 만남을 증명하였고, 얻어진 결과를 통해 무게중심이 각 중선을 2:1로 나눈다는 것을 보였다.

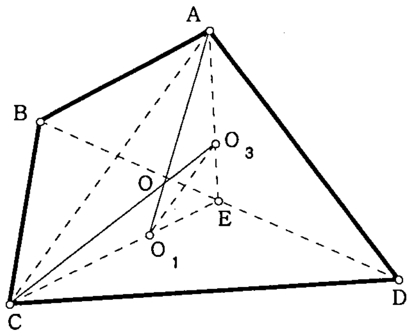
5. 볼록 n각형의 무게중심

현행 중등학교 수학과 교육과정에서는 삼각형의 무게중심만을 다루지만, 자연스럽게 사각형, 오각형, …, n각형에 대한 무게중심을 생각할 수 있다. 한인기(2001)는 기하학적 방법을 이용하여, 볼록 n각형에서 n개의 중선이 한 점에서 만나며, 교점은 각 중선을 $(n-1)$:1로 나눈다는 증명을 삼각형 무게중심의 증명에 대한 유추를 통해 제시하였다.

볼록사각형의 무게중심에 대한 기하학적 증명을 한인기(2001)의 연구를 중심으로 살펴보고, 볼록사각형의 무게중심을 지렛대의 원리를 이용하여 증명해 보자. 볼록사각형에서 중선은 사각형의 한

꼭지점과 그 꼭지점을 제외한 나머지 꼭지점들로 이루어진 도형인 삼각형의 무게중심을 연결한 선분으로 정의한다. 그러면, 볼록사각형에서 네 개의 중선을 그을 수 있으며, 이들의 교점이 무게중심이다. 이제, 볼록사각형의 무게중에 대한 기하학적 증명을 살펴보자.

볼록사각형 ABCD이 주어졌다. O_1, O_3는 각각 △BCD, △ABD의 무게중심이라 하면, $\overline{AO_1}$, $\overline{CO_3}$는 사각형 ABCD의 중선이다(<그림 6>).

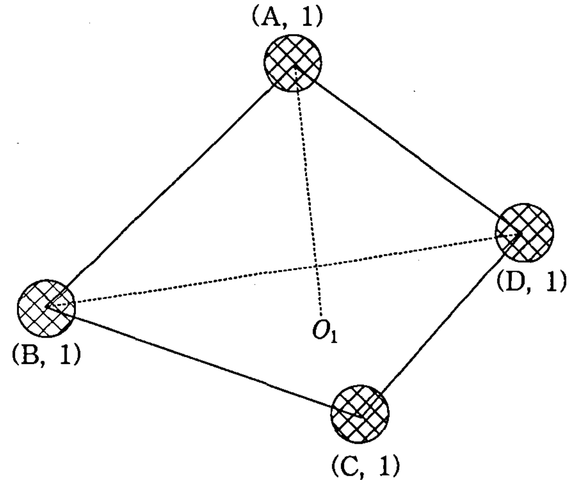


<그림 6>

△ EO_1O_3와 △ECA에서 $\overline{EO_3}$: $\overline{EA}$ = $\overline{EO_1}$: $\overline{EC}$ = 1:3이므로, △ EO_1O_3와 △ECA는 닮음이 되며, $\overline{O_1O_3}$ // $\overline{CA}$, $\overline{O_1O_3}$: $\overline{CA}$ = 1:3. 한편, △ OO_1O_3와 △OAC도 닮음이므로, $\overline{OO_3}$: $\overline{OC}$ = $\overline{OO_1}$: $\overline{OA}$ = 1:3. 이로부터, 볼록사각형 ABCD의 두 중선 $\overline{AO_1}$, $\overline{CO_3}$의 교점 O는 각 중선을 꼭지점으로부터 3:1로 나눈다는 것을 알 수 있다.

마찬가지 방법으로, 볼록사각형 ABCD의 임의의 두 중선들도 그 교점에 의해 꼭지점으로부터 3:1로 분할된다는 것을 알 수 있다. 이로부터, 사각형 ABCD의 네 중선은 한 점에서 만나고, 그 교점은 각 중선을 꼭지점으로부터 3:1의 비로 나눈다는 것을 알 수 있다. □

이제, 지렛대의 원리를 이용하여 볼록사각형 ABCD의 무게중심에 관한 증명을 살펴보자. 사각형 ABCD의 꼭지점 A, B, C, D에 무게가 1g인 추를 매달았다고 하자(그림 7). 그러면, 볼록사각형의 네 꼭지점을 질량점 (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)과 같이 나타낼 수 있다.



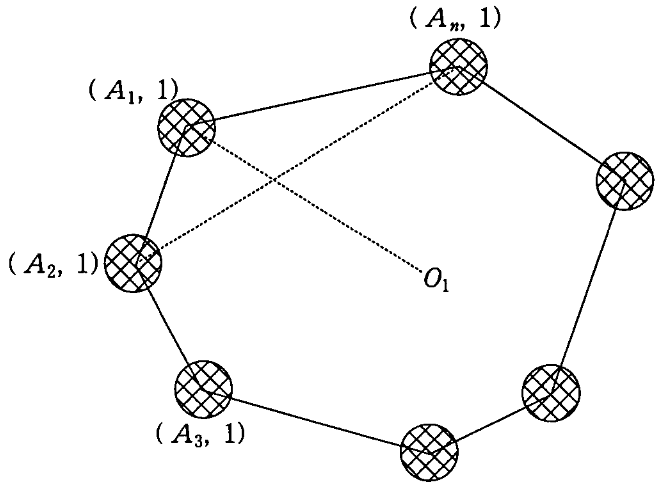
<그림 7>

정리 3에 의해, (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)의 무게중심 G는 (A, 1)과 (B, 1), (C, 1), (D, 1)의 무게중심 (O_1, 3)의 무게중심과 일치한다. 그러므로, G는 A와 △BCD의 무게중심 O_1을 연결한 선분인 중선 $\overline{AO_1}$에 속한다. 이제, 꼭지점 B, C, D로부터 중선 $\overline{BO_2}$, $\overline{CO_3}$, $\overline{DO_4}$을 그으면, 마찬가지 이유로 G가 $\overline{BO_2}$, $\overline{CO_3}$, $\overline{DO_4}$에 속함을 알 수 있다. 이로부터, 볼록사각형의 네 중선은 한 점에서 만난다.

질량점의 무게중심의 정의로부터 점 G는 $\overline{AO_1}$을 3:1로 나눈다는 것을 알 수 있다. 마찬가지 이유로, G는 $\overline{BO_2}$, $\overline{CO_3}$, $\overline{DO_4}$을 3:1로 나눈다. □

이제, 지렛대의 원리를 이용하여 볼록 n각형의 무게중심을 증명하도록 하자. 한인기(2001)는 볼록 n각형의 무게중심에 관한 정리를 수학적 귀납법을 이용한 증명을 제시하였다. 그러나, 지렛대의 원리를 이용하면, 수학적 귀납법을 이용하지 않고, 볼록 n각형의 무게중심을 증명할 수 있다.

볼록 n각형 $A_1A_2\cdots A_n$의 꼭지점 A_1, A_2, $\cdots$, A_n에 무게가 1g인 추를 매달았다고 하자(그림 8). 그러면, 볼록 n각형의 n개의 꼭지점을 질량점 (A_1, 1), (A_2, 1), $\cdots$, (A_n, 1)과 같이 나타낼 수 있다.



<그림 8>

정리 3에 의해, $(A_1,\ 1)$, $(A_2,\ 1)$, $\cdots$, $(A_n,\ 1)$의 무게중심 G는 $(A_1,\ 1)$과 $(A_2,\ 1)$, $\cdots$, $(A_n,\ 1)$의 무게중심 $(O_1,\ (n-1))$의 무게중심과 일치한다. 그러므로, G는 A와 볼록 $(n-1)$각형 $A_2A_3\cdots A_n$의 무게중심 O_1을 연결한 선분인 중선 $\overline{A_1O_1}$에 속한다. 이제, 꼭지점 A_2, $\cdots$, A_n로부터 중선 $\overline{A_2O_2}$, $\cdots$, $\overline{A_nO_n}$을 그으면, 마찬가지 이유로 G가 $\overline{A_2O_2}$, $\cdots$, $\overline{A_nO_n}$에 속함을 알 수 있다. 이로부터, 볼록 n각형의 n개의 중선은 한 점에서 만난다.

질량점의 무게중심의 정의로부터 점 G는 $\overline{A_1O_1}$을 $(n-1)$:1로 나눈다는 것을 알 수 있다. 마찬가지 이유로, G는 $\overline{A_2O_2}$, $\cdots$, $\overline{A_nO_n}$을 $(n-1)$:1로 나눈다. □

기술한 내용을 바탕으로, 중등학교 학생들에게 삼각형의 무게중심이나 중선에 대한 유추를 통해 볼록사각형, 볼록오각형, $\cdots$, 볼록 n각형의 무게중심이나 중선에 대해 추론하도록 하고 이를 증명하도록 하는 것은 수학적 개념이나 정리에 대한 교수학적 확장의 좋은 예가 될 수 있을 것이다. 특히, 볼록 n각형의 무게중심은 삼각형의 무게중심에 대한 일반화로써, 중등학교 수학 영재교육에 있어 학생들에게 수학적 사고의 중요한 유형인 일반화를 경험할 수 있도록 하는 좋은 자료로 활용될 수 있을 것이다. 한편, 수학적 지식의 역사적 발명의 순간에 위대한 수학자들이 사용했던 수학적 접근 방법을 인식하고, 이를 다양한 문제의 해결을 위해 사용하는 경험은 영재아들에게 수학적 발명의 순간을 경험하고 이를 확장, 발전시킬 수 있는 기회를 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

6. 결 론

본 연구에서는 아르키메데스가 구의 부피를 구하기 위해 사용했던 수학 탐구 방법을 자세히 살펴보고, 이에 관련된 몇몇 수학적 개념과 정리들을 고찰하여, 아르키메데스의 수학 탐구 방법을 중등학교 수학 영재교육에 활용할 수 있는 교수-학습 자료를 개발하였다.

아르키메데스가 공학적 도구를 이용하여 구의 부피에 관한 문제를 해결했다는 것은 잘 알려진 사실이다. 구의 부피를 구하는 문제의 해결 방법은 '에라토스테네스에게 쓴 편지'에 기술되어 있는데, 본 연구에서는 아르키메데스의 문제해결 과정을 분석하여 문제해결에 사용된 공학적 도구들을 추출하였다. 아르키메데스는 구, 원뿔, 원기둥의 질량과 무게중심의 개념을 수학 문제해결에 사용하였고, 공학적 도구인 지렛대의 원리를 수학 문제해결에 사용하였다.

본 연구에서는 아르키메데스의 공학적 방법을 삼각형, 볼록사각형, …, 볼록 n각형의 무게중심에 관한 정리를 증명하는 과정에서 사용하는 구체적인 방법을 제시하였다. 이를 위해, 질량을 가진 질량점(mass point) 개념을 사용하였으며, k개의 질량점에서 중선, 무게중심의 개념을 정리하였고, 지렛대 원리에 관련된 몇몇 기본 정리에 대한 증명을 제시하였다.

한편, 한인기(2001)는 기하학적 방법을 이용하여, 볼록 n각형에서 n개의 중선이 한 점에서 만나며, 교점은 각 중선을 $(n-1)$:1로 나눈다는 증명을 중등학교 수학교과서에 제시된 삼각형 무게중심의 증명에 대한 유추를 통해 제시하였는데, 본 연구에서는 n개의 질량점에 대한 중선, 무게중심의 개념을 바탕으로 본 연구에 제시된 정리들을 사용하여 볼록 n각형의 무게중심에 대한 정리를 증명하여 제시하였다.

본 연구를 통해 얻어진 결과들은 고대의 수학적 탐구 방법을 이용하여 중등학교 수학 영재교육에 관련된 교과내용의 다양한 접근을 모색하고, 수학사를 수학 영재교육에 활용할 수 있는 가능성을 제시할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

강미광 (2000). 연분수와 무리수에 관한 고찰, 한국수학사학회지 13(2), pp.49-64.

김용운 · 김용국 (1996). 수학사대전, 서울: 우성.

김주영 · 김성숙 (2001). 영의 역사와 영에 얽힌 오류들, 한국수학사학회지 14(1), pp.101-108.

양영오 (2000). 피보나치 수열에 관한 고찰, 한국수학사학회지 13(1), pp.63-76.

오승재 편역 (1997). 수학의 천재들, 서울: 경문사.

이종우 (1999). 기하학의 역사적 배경과 발달, 서울: 경문사.

이종희 (2002). 원뿔곡선 이론의 발달, 한국수학사학회지 15(1), pp.69-82.

한길준 · 정승진 (2001). 고대 이집트 분수의 교육학적 의미, 한국수학사학회지 14(2), pp.101-114.

한용현 (2001). 수렴구조의 역사, 한국수학사학회지 14(2), pp.13-20.

한인기 (2001). 유추를 활용한 무게중심 탐구에 관한 연구, 중등교육연구 13, pp.205-215.

한인기 (2003a). 헤론 공식에 대한 교수학적 분석 및 확장, 한국수학사학회지 16(2), pp.43-54.

한인기 (2003b). 교사를 위한 수학사, 서울: 교우사.

한인기 · 강인주 (2000b). 삼각형의 무게중심에 관한 다양한 증명들과 수학교육적 의의, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 10, pp.143-154, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 · 강인주 (2000a). 모어-마스케로니의 정리에 대한 고찰, 한국수학사학회지 13(2), pp.133-144.

홍영희 (2000). 초기 군론의 역사, 한국수학사학회지 13(2), pp.33-40.

Boyer & Merzbach/ 양영오 · 조윤동 역(2000). 수학의 역사 상 · 하, 서울: 경문사.

Eves/ 이우영 · 신항균 역 (1999). 수학사, 서울: 경문사.

Kanigel/ 김인수 역 (2000). 수학이 나를 불렀다, 서울: 사이언스북스.