한국초등수학교육학회지 7, 45-64. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 7, 45-64.*

초등학교 수학 교과서에 나타난 약수와 배수 지도 방법 분석

최 지 영[1] · 강 완[2]

1차부터 7차까지의 초등학교 수학 교과서에 나타난 약수와 배수의 지도 방법을 교수학적 변환론의 관점에서 비교-분석하였다. 1, 2차 교과서에서는 약수와 배수를 별도의 단원으로 구성하지 않고, 분수의 덧셈과 뺄셈, 곱셈을 주요 내용으로 하는 단원에서 분수의 통분과 약분 지도 내용 속에 포함시켜 약수와 배수를 지도하고 있다. 3, 4차 교과서에서는 새 수학 운동의 영향을 받아 약수와 배수가 분수의 내용과 독립되어 하나의 단원으로 설정되었고, 수 영역에 집합의 개념을 도입하여 수 체제를 확립하면서 집합의 내용과 함께 다루어졌다. 5, 6, 7차 교과서에서는 약수와 배수가 분수 내용뿐만 아니라 집합의 내용과도 분리되어 지도되기 시작하였고, 특히, 7차 교과서에서는 학습자의 활동 자체를 통한 이해가 매우 강조되고 있다. 약수와 배수에 대한 지도 방법은 교과서 개편을 거듭하는 동안 수학적 체계를 갖추기 위해 학습 요소의 정돈이 이루어졌고, 교수학적 변환 역시 교과서가 개편됨에 따라 점차 체계적인 형태를 갖추게 되었다.

〔주제어〕 초등학교 수학 교과서, 교수학적 변환, 약수와 배수, 수학과 교육과정.

Ⅰ. 서 론

지식은 지식 주체의 사고 속에서 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화의 과정을 거쳐 이루어진다. 수학적 지식을 학습하는 학생의 입장에서도 지식의 발생에 기여한 사고의 주체와 마찬가지로 해당 지식에 대해 배경화/개인화, 탈배경화/탈개인화를 경험하여야 한다. 학생들의 이러한 학습을 돕기 위해 수학적 지식은 학생들에게 가르쳐질 지식으로 변형되는 과정을 거쳐야 하는데, 이것을 가배경화/가개인화의 과정이라 말하고, 교수학적 의도에 의해 지식을 변형시키는 것을 교수학적 변환이라고 한다.

수학 교과서는 학교 수학이라는 변형된 지식을 담아 간직하는 전형적인 방법의 하나이다. 그리고 교수학적 변환의 실제 모습을 조사해 볼 수 있는 원천을 제공한다(강완 1991, p. 10).

우리 나라의 제1차 교육과정 시기부터 현재의 제7차 교육과정 시기에 이르기까지, 초등학교 수학 교과서는 이러한 교수학적 변환의 실제 모습을 볼 수 있는 원천이 된다. 각각의 교육과정에 따라 개발된 교과서는 교육과정 개편에 따라 어떤 교수학적 원칙이 있을 것이고, 수학적 내용의 지도 방법, 교과서 제시 방법이 각 시기별 교과서에서 어떤 원리에

---

1) [제1저자] 서울 시흥 초등학교.
2) 서울 교육 대학교.

따라 기술되었을 것이다. 이 때, 이러한 여러 가지 교수학적 방법의 변화를 살펴보고, 이 변화를 통해 어떤 원리를 발견하는 것은 중요하다(강완 2000, p. 120).

이러한 모색에서는 수학적 내용의 지도 방법, 교과서 제시 방법 등에 대한 종래의 방법들이 어떻게 변화되어 왔는지 교수학적 변환의 관점에서 보고, 앞으로 어떤 원리가 적용 가능한지를 알아보는 일이 중요하다. 이 때, 초등학교에서 다루는 수학의 모든 내용을 한꺼번에 다루기에 앞서, 중요한 부분을 선택하여 분석하는 것은 타당한 방법의 하나이다(강완 2000, p. 118).

본 연구에서는 초등학교 수학과 교과서에 제시된 학습 요소 중 약수와 배수의 지도 방법을 분석하는 것으로 국한하였다. 약수와 배수의 지도는 가장 기본이 되는 자연수 이론이고, 분수의 이해 및 분수의 사칙 연산 학습을 위한 기초가 되므로, 이에 대한 분석은 매우 중요한 의미를 갖는다고 할 수 있기 때문이다.

II. 교과서 분석

1. 제1차 교육과정에 따른 교과서

1955년 8월에 공포되어 그 해부터 국민학교 전 학년에 걸쳐서 시행된 제1차 교육과정(1955-1963)은 미국의 진보주의 교육 사상의 영향을 받아 경험 중심의 생활 단원으로 구성되었고, 생활 문제 해결을 주제로 한 교육으로 수학적 체계가 무시되었다.

제1차 교육과정의 산수과 내용 영역은 수, 계산, 분수, 측정, 소수, 표와 그래프, 문제 해결과 실무, 형과 도형의 8 개 영역으로 구성되었고 약수와 배수 관련 내용은 6학년 1학기의 3단원(3. 채소밭)에서 지도된다.

그러나 제1차 교육과정에서는 약수와 배수가 별도의 단원으로 구성되지 않고, 분수의 덧셈과 뺄셈, 곱셈을 주요 내용으로 하는 단원에서 분수의 통분과 약분의 지도 과정에서 다루어진다.

약수와 배수를 지도하는 과정에 삽화나 그림, 도식 등의 교수학적 고안들은 사용되지 않고, 다만 예를 들어가며 문장으로만 설명하고 있다는 특징이 있다.

1차 교과서[3]에서는 약수와 배수가 분수의 통분과 약분 지도에 목적을 두고 다루어지고 있다. 그래서 학생들이 약수, 공약수, 최대공약수와 배수, 공배수, 최소공배수의 개념 및 최대공약수와 최소공배수를 구하는 방법을 충분히 이해할 수 있도록 배려하기보다는 최대공약수와 최소공배수를 구하여 분수의 약분과 통분을 능숙하게 할 수 있기를 기대하고 있다. 하지만 이것은 학생들의 배경화/개인화 과정 또는 메타-인지적 전략을 과소평가한 것으로 형식적 고착 현상에 빠질 수 있는 문제점을 안고 있다고 볼 수 있다.

2. 제2차 교육과정에 따른 교과서

1963년 2월에 공포되어 1964년에 국민학교 1, 2학년부터 시행되기 시작한 제2차 교육과

3) "제1차 교육과정에 따른 교과서"를 줄여서 "제1차 교과서"라고 부르며, 이후의 교과서도 "2차 교과서", …, "7차 교과서" 등으로 부르기로 한다.

정은 수학 본연의 계통성과 구조성을 중시하였고 교육과정 내용은 수, 계량, 양과 측정, 도형, 수량 관계와 적용의 5 개 영역으로 구성되었다.

제2차 교육과정에서는 약수와 배수가 제1차 교육과정보다 한 학년 빠른 5학년에서 다루어지는데, 이것은 분수의 통분과 약분을 다루는 분수 단원이 제1차 교육과정에서는 6학년 1학기에 다루어진 반면, 제2차 교육과정에서는 5학년 2학기에 다루어졌기 때문이다.

2차 교과서에서는 약수와 배수가 각각 5학년 2학기의 2단원과 4단원의 서로 다른 단원에서 다루어진다. 즉, 2단원(분수의 곱셈과 나눗셈)에서는 '분수의 약분'을 지도하는 과정에 약수, 공약수, 최대공약수가 다루어지고, 4단원(분수의 덧셈과 뺄셈)에서는 '분수의 통분'을 지도하는 과정에 배수, 공배수, 최소공배수가 다루어진다. 단원명으로도 확인할 수 있듯이 2단원과 4단원은 분수의 곱셈과 나눗셈 및 분수의 덧셈과 뺄셈을 주제로 한 단원으로 약수와 배수가 독립적으로 제시되지 않고, 1차 교과서에서와 마찬가지로 분수의 약분과 통분 과정에서 제시된다.

2차 교과서에서 약수와 배수의 지도 내용이 차지하고 있는 교과서의 분량은 6쪽으로 분수의 통분과 약분에 직접적으로 관련된 최대공약수와 최소공배수의 지도에 초점을 맞추고 있다. 약수와 배수를 지도하는 과정에 삽화나 그림, 도식 등의 교수학적 고안들은 사용되지 않았다.

3. 제3차 교육과정에 따른 교과서

1973년 2월에 공포되어 그 해에 국민학교 1, 2학년부터 시행된 제3차 교육과정은 학문중심 교육과정으로 1960년대에 미국을 중심으로 일어난 "새 수학 운동"의 영향을 받았다. 그리고 그 영향으로 집합적 개념, 수학적 구조와 엄밀성, 현대 수학 등의 내용을 도입하고, 용어의 기호를 엄밀하게 사용하였으며 지도 내용을 제시할 때, 완성된 문장으로 진술하여 내용의 지도 방향이나 활동 내용을 구체적으로 제시하였다는 특징이 있다.

3차 교과서에서는 약수와 배수가 2차 교과서에서보다 한 학기 빠른 5학년 1학기의 1단원(약수와 배수)에서 다루어지는데, 이것은 제2차 교육과정에서는 5학년 2학기에 그리고 제3차 교육과정에서는 5학년 1학기에 분수의 통분과 약분을 다루고 있기 때문인 것으로 해석된다.

또한, 2차 교과서에서는 약수와 배수가 분수 단원에서 다루어졌던 것에 반하여 3차 교과서에서는 약수와 배수가 하나의 독립된 단원으로 구성되었다. 특히 3차 교과서에서는 수 영역에 집합의 개념을 도입하여 수 체계를 확립하고자 했던 교육과정의 기본 취지에 따라 집합에 대한 내용이 함께 다루어졌다. 그리고 그 영향으로 약수와 배수 설명 과정에 집합의 표시 방법인 원소나열법과 벤다이어그램 등이 사용되고 있다.

3차 교과서에서 가장 괄목할만한 변화는 바로 인수와 소인수, 그리고 소인수분해에 대한 내용을 무려 8쪽에 걸쳐 다루고 있다는 사실이다.

3차 교과서에서 새로 도입된 인수 개념은 약수를 지도하는 데 사용되었고, 소인수분해 개념은 최대공약수와 최소공배수를 구하는 방법을 지도하는 데 있어서 중요한 역할을 하고 있다.

3차 교과서에서는 세 수의 최대공약수 및 최소공배수를 구하는 지도 내용이 본문에 제시되기 시작하였는데, 이것은 6차 교과서에까지 그대로 유지되다가 7차 교과서에서 다시

두 수의 최대공약수 및 최소공배수만 다루어진다.

4. 제4차 교육과정에 따른 교과서

수학 교육 현대화의 정신에 바탕을 두고 개정된 제3차 수학과 교육과정은 수준이 높고 지도 내용도 많아서 학생들의 학습 효과가 오히려 저하되는 문제점을 안게 되었다. 따라서 제3차 교육과정의 기본 틀은 유지하면서 문제점을 수정 · 보완하여 학생들의 수준에 맞는 교육과정이 필요하게 되었고, 이런 필요에 의하여 제4차 교육과정이 1981년 12월에 고시되어 1982년에 1, 2, 3학년부터 시행되게 되었다.

제4차 교육과정에서는 수학의 구조나 엄밀성을 강조하기보다는 수학의 기초적 개념과 기능을 강조하고, 지도 내용의 양을 줄이면서 학생의 수준에 맞도록 기본 방향을 제시하고자 하였다.

4차 교과서에서는 제4차 교육과정 개정의 기본 방향에 따라 3차 교과서에서 처음으로 도입되었던 인수, 소인수, 그리고 소인수분해에 대한 지도 내용이 삭제되었고 대신 약수와 배수와의 관계 및 짝수와 홀수에 대한 지도 내용이 추가되었다. 그리고 이런 기본 방향은 7차 교과서에 이르기까지 그대로 유지된다.

4차 교과서에서 약수와 배수는 5학년 1학기의 4단원(배수와 약수)에서 다루어지는데, 제3차 교육과정과 마찬가지로 약수와 배수 단원이 별도로 설정되었고, 집합과 관련되어 지도되었다.

5. 제5차 교육과정에 따른 교과서

1987년 6월 고시되어 1989년 국민학교 1, 2, 3 학년부터 시행된 제5차 교육과정은 제4차 교육과정의 운영 실태, 개정의 기본 방향, 세계적 동향과 외국의 교육과정이나 수학 교육 정책을 고려하여 개정의 기본 방향을 두었다.

제5차 교육과정에서는 정의적 목표를 강조하고 대다수 학생을 위한 수학 교육, 유용성과 적용 가능성, 학습자 각자의 경험, 욕구, 흥미를 중시하여 지식의 획득 뿐 아니라 과정으로서의 수학적 활동을 중시하였다(송영순 1999, p. 34). 그리고 개정 방향의 핵심으로 필수 기본 지식 기능의 정선과 수학적 활동의 강화를 들 수 있다.

제5차 교육과정의 내용 영역은 제4차 교육과정과 마찬가지로 수, 연산, 도형, 측도, 관계의 5 개 영역으로 구성되고 있으나, 집합에 대한 내용이 약화되었다. 5차 교과서에서의 가장 큰 특징은 집합에 대한 내용이 약화되면서, 약수와 배수 단원에서 집합에 대한 내용이 삭제되고 그 대신 집합에 대한 내용은 5학년 1학기 9단원인 여러 가지 문제에서 다루어진다는 것이다. 따라서 공약수와 공배수를 설명하는 과정에 원소나열법이나 벤다이어그램 등이 사용되지 않는다.

5차 교과서의 또 하나의 특징은 약수와 배수를 지도하는 과정에 실생활 상황과 같은 학생들에게 친근한 소재, 그리고 삽화나 그림과 같은 교수학적 고안이 사용되었다는 것이다.

6. 제6차 교육과정에 따른 교과서

1992년 9월에 고시되어 1995년 초등학교 1, 2학년부터 시행된 제6차 교육과정은 문제

해결과 이산 수학을 강조하였다. 제6차 교육과정의 기본 방향은 추론 능력과 문제 해결 능력을 중시하고 수학의 실용성을 강조하며 계산기와 컴퓨터 활용을 권장하고 있다. 그리고 진로 지도에 적합한 수학을 학습할 수 있는 기회를 제공하였고, 정보화 사회에 알맞은 수학의 기본적인 지도 내용을 엄선하였으며, 학습 목표와 내용에 적합한 다양한 지도 방법과 평가 방법을 구사하였다.

제6차 교육과정 내용의 영역은 수, 연산, 도형, 측도, 관계의 5 개 영역으로 구성되는데 이것은 제4차, 제5차 교육과정에서와 동일하다.

6차 교과서에서는 약수와 배수가 5학년 1학기의 1단원(배수와 약수)에서 다루어지는데 5차 교과서와 마찬가지로 집합 및 분수 내용과는 독립되어 약수와 배수에 관련된 내용만으로 단원이 구성된다.

7. 제7차 교육과정에 따른 교과서

1997년 12월에 고시되어 2000년 초등학교 1, 2학년부터 시행된 제7차 교육과정은 21세기 정보화·세계화 사회에 대비하기 위해 단순 기능인보다 자기 주도적인 가치를 창조할 수 있는 인간 양성에 목적을 두고 시도된 것이다.

제7차 교육과정의 기본 과정은 학습량은 경감하여 학생의 부담을 줄이고 학생의 인지 발달 수준에 따라 단계별·수준별 교육과정으로 구성하였고, 다양하고 재미있는 활동을 통해 사고력, 창의력을 배양하고자 하였다.

초등학교 1학년에서 고등학교 1학년까지를 국민 공통 기본 교육 기간으로 설정하고, 이 기간의 수학 교과에 단계형 수준별 교육과정을 적용하여 10 개 학년을 20 단계로 나누어 수학 지도 내용을 제시하였다.

제7차 교육과정은 여러 가지 생활 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통하여 수학적 개념, 원리, 법칙 사이의 관계를 이해하게 하고 기본적 지식과 기능을 활용해 생활 주변의 문제를 관찰, 조직, 분석, 사고하여 합리적인 해결 능력과 태도를 가지도록 하고 있다.

제7차 교육과정의 내용 영역은 수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 문자와 식, 규칙성과 함수의 6 개 영역으로 구성되어 있고, 각 영역별 소 항목을 두어 지도 내용을 목표 진술형으로 제시하였다. 내용 중에는 구체적 활동 방법을 제시하여 개념 원리의 이해를 돕도록 하였다.

7차 교과서의 가장 두드러진 특징은 학습자의 직접적인 활동을 통하여 학습 활동을 전개한다는 것이다. 또한, 교과서 지면에 미리 답을 제시하고 설명을 덧붙였던 기존의 방법을 지양하였고, 학생의 활동 결과를 미리 보여주게 되는 구체물의 삽화나 도식의 사용도 절제되었다.

III. 분석 결과에 대한 논의

1. 지도 시기 및 단원 특성의 변화

1차 교과서부터 7차 교과서까지 '약수와 배수' 관련 내용이 처음 도입되는 학년, 학기를

정리해 보면, 1차 교과서에서는 6학년 1학기에, 2차 교과서에서는 5학년 2학기에, 그리고 3차 교과서부터 6차 교과서까지는 5학년 1학기에, 7차 교과서에서는 5-가 단계에 약수와 배수 내용을 다루고 있음을 알 수 있다([표 1] 참조).

[표 1] 도입 시기의 분포

교과서	1차	2차	3차	4차	5차	6차	7차
도입 학기	6-1	5-2	5-1	5-1	5-1	5-1	5-가

약수와 배수가 지도되는 단원 구성은 각 시기별 교과서마다 차이를 보였다([표 2] 참조). 1차 교과서에서는 약수와 배수가 6학년 1학기 교과서의 3 단원에서 지도되고, 이 단원은 분수의 덧셈과 뺄셈, 곱셈이 주요 내용이며 약수와 배수에 관련된 내용은 분수의 통분과 약분을 지도하기 위한 과정에서 다루어진다.

2차 교과서에서는 약수와 배수가 5학년 2학기 교과서의 2 단원과 4 단원에서 지도되며, 2 단원은 분수의 곱셈과 나눗셈을, 4 단원은 분수의 덧셈과 뺄셈을 주요 내용으로 한다. 약수, 공약수, 최대공약수는 분수의 약분 과정에서 필요한 내용으로 2 단원 '분수의 곱셈과 나눗셈'에서 다루어지고, 배수, 공배수, 최소공배수는 분수의 통분 과정에서 필요한 내용으로 4 단원 '분수의 덧셈과 뺄셈'에서 다루어진다.

[표 2] 단원명과 특성의 변화

교과서	단원명	단원 특성
1차	3. 채소밭	분수 관련 단원에 삽입됨
2차	2. 분수의 곱셈과 나눗셈 4. 분수의 덧셈과 뺄셈	분수 관련 단원에 삽입됨
3차	1. 약수와 배수	집합과 관련되어 구성됨
4차	4. 배수와 약수	집합과 관련되어 구성됨
5차	1. 배수와 약수	약수와 배수 관련 내용만으로 구성됨
6차	1. 배수와 약수	약수와 배수 관련 내용만으로 구성됨
7차	1. 배수와 약수	약수와 배수 관련 내용만으로 구성됨

제3차 교육과정은 '수학교육 현대화 운동'의 영향으로 현대 수학의 조기 도입, 구조화된 수학 지도를 목적으로 새로운 내용, 용어의 기초를 도입하고 강화하여 수준을 높이고자 수 영역에 집합의 개념을 도입하여 수 체계를 확립하고자 하였다(1999 송영순, p. 28-29). 이런 의도가 반영되어 1차 교과서와 2차 교과서에서는 분수 계산의 일부로 취급되었던 약수와 배수 관련 내용이 3차 교과서에서는 별도의 단원으로 구성되었고, 특히 3차 교과서와 4차 교과서는 약수와 배수 개념이 집합의 개념과 연관되어 구성되었다.

4차 교과서에서는 단원명이 '약수와 배수'에서 '배수와 약수'로 바뀌었다. 이것은 약수보

다는 배수 개념이 학생들이 이해하기 쉽고 친근한 개념이기 때문인 것으로 해석된다. 그리고 이런 추세는 7차 교과서까지 계속된다.

5차 교과서부터 본격적으로 약수와 배수가 분수 및 집합의 개념과는 독립되어 별도의 단원으로 구성되기 시작하였다. 즉, 5차 교과서와 6차 교과서 그리고 7차 교과서는 약수와 배수 관련 내용만으로 하나의 독립된 단원을 구성하였다.

2. 배수의 정의 범위 및 최대공약수와 최소공배수 지도 수준의 변화

각 시기별 교과서에 제시된 배수의 정의 범위 및 최대공약수와 최소공배수의 지도 수준을 정리하면 [표 3]과 같다.

[표 3] 배수의 정의 범위 및 최대공약수와 최소공배수의 지도 수준의 변화

교과서	배수의 정의 범위	최대공약수와 최소공배수의 지도 수준
1차	자연수	두 수
2차	자연수	연습 문제에서만 세 수 다룸
3차	0과 자연수	세 수
4차	0과 자연수	세 수
5차	자연수	세 수
6차	자연수	세 수
7차	자연수	두 수

1, 2, 5, 6, 7차 교과서에서는 배수의 정의를 자연수 범위에서만 다룬다. 그러나 3, 4차 교과서에서는 배수의 정의 범위에 0을 포함시키며 최소공배수를 정의할 때, "0을 제외한" 이라는 단서를 붙이고 있다.

최대공약수와 최소공배수의 지도 수준에도 차이가 있다. 1차 교과서와 7차 교과서에서는 두 수 사이의 최대공약수 및 최소공배수를 구하는 수준까지만 다루고 있다. 이에 반해서 2차 교과서에서는 본문에서는 두 수 사이의 최소공배수와 최대공약수 구하는 수준까지만 다루지만 단원 끝의 연습 문제에서는 세 수 사이의 최대공약수 및 최소공배수 구하는 문제를 다루고 있다.

또한, 3차 교과서와 4차 교과서 그리고 5차 교과서와 6차 교과서에서는 본문과 연습 문제 각각에 세 수 사이의 최소공배수와 세 수 사이의 최대공약수를 구하는 문제까지도 다루고 있다.

3. 학습 활동 요소의 변화

1차에서 7차까지의 초등학교 교과서에 제시된 약수와 배수에 관련된 학습 활동 요소를 정리하여 보면 다양한 학습 활동 요소들이 1차에서 7차까지 교과서가 개편되고 체계가 정비되는 과정에서 점차 증가하였음을 알 수 있다([표 4] 참조).

[표-4] 학습 활동 요소의 분포

학습 활동 요소	1차	2차	3차	4차	5차	6차	7차
배수의 정의	×	○	○	○	○	○	○
약수의 정의	×	○	○	○	○	○	○
공배수의 정의	○	○	○	○	○	○	○
최소공배수의 정의	○	○	○	○	○	○	○
공약수의 정의	○	○	○	○	○	○	○
최대공약수의 정의	○	○	○	○	○	○	○
약수와 배수와의 관계	×	×	×	○	○	○	○
공약수와 최대공약수 및 공배수와 최소공배수의 관계	×	×	×	×	×	×	○
인수	×	×	○	×	×	×	×
소인수, 소인수분해	×	×	○	×	×	×	×

수학적 체계가 정비되지 않았던 1차 교과서에서는 약수와 배수 개념이 분수의 약분과 통분을 위한 과정으로만 지도되었기 때문에, 분수의 통분과 약분을 위해 실질적으로 꼭 필요한 공배수 및 최소공배수와 공약수 및 최대공약수만을 중점적으로 다루었을 뿐, 약수와 배수에 대한 설명이나 용어의 정의 그리고 확인 문제 및 연습 문제는 다루지 않았다.

2차 교과서는 수학의 계통성을 중시하는 제2차 교육과정의 변화를 반영하여 배수와 약수의 정의도 지도하였다. 그러나 2차 교과서에서도 약수와 배수에 관련된 내용이 분수의 약분과 통분 지도 내용에 포함된 것으로 약수와 배수와의 관계는 다루지 않았다.

3차 교과서에서는 인수, 소인수, 소인수분해에 대한 학습 활동 요소가 무려 8쪽에 걸쳐 자세히 다루어졌다. 이것은 제3차 교육과정이 1960년대에 미국을 중심으로 일어난 '새 수학 운동'의 영향을 많이 받아들여 현대 수학의 조기 도입, 구조화된 수학 지도를 목적으로 하였기 때문이라고 볼 수 있다.

4차 교과서에서는 3차 교과서에서 다루었던 인수, 소인수, 소인수분해에 대한 학습 활동 요소가 삭제되었다. 이것은 제3차 교육과정이 지나치게 학문 중심 교육과정을 강조하여 교과간의 벽이 커지고 교육 효과의 저하를 가져오게 되어 제4차 교육과정에서는 개인적, 사회적, 학문적 적합성의 조화를 이루는 인간 중심 교육과정이 대두되었기 때문이라고 볼 수 있다.

그리고 4차 교과서에서는 초등학생들에게는 어려운 개념인 인수, 소인수, 소인수분해에 관련된 내용 대신 약수 개념의 이해를 돕기 위한 약수와 배수와의 관계를 다루기 시작하였다. 또한, 배수 개념과 관련하여 학생들에게 친근한 개념인 짝수와 홀수를 다루기 시작하였다. 이러한 추세는 5차, 6차 교과서를 거쳐 7차 교과서에 이르기까지 그대로 유지되었다.

7차 교과서에서는 공약수와 최대공약수, 공배수와 최소공배수와의 관계에 대한 지도 내

용이 추가되었다. 공약수와 최대공약수 사이의 관계 및 공배수와 최소공배수의 관계에 관련된 내용들은 각각에 대한 이해를 또, 이들 사이의 연관성에 대한 감각을 익히도록 하는데 도움을 줄 것으로 예상된다.

각 시기별 교과서에서 어떤 학습 활동 요소에 중점을 두어 다루었는지는 각 학습 활동 요소의 지도를 위하여 할당된 수학 교과서의 지면(쪽수) 할당 분량의 변화에서 쉽게 찾아 볼 수 있다([표 5] 참조).

[표 5] 학습 활동 요소별 할당 쪽수의 분포

학습 활동 요소	1차	2차	3차	4차	5차	6차	7차
배수	×	1쪽	1쪽	1쪽	2쪽	2쪽	2쪽
약수	×	1쪽	2쪽	1쪽	1쪽	1쪽	2쪽
공배수 및 최소공배수	3쪽	1쪽	5쪽	4쪽	3쪽	3쪽	3쪽
공약수 및 최대공약수	2쪽	3쪽	3쪽	4쪽	4쪽	3쪽	3쪽
약수와 배수와의 관계	×	×	×	(1쪽)	1쪽	1쪽	1쪽
공약수와 최대공약수 및 공배수와 최소공배수의 관계	×	×	×	×	×	×	2쪽
인수, 소인수, 소인수분해	×	×	8쪽	×	×	×	×
계	5쪽	6쪽	19쪽	10쪽	11쪽	10쪽	13쪽

4. 학습 요소의 지도 순서 변화

각 시기별 교과서에 제시된 학습 요소의 지도 순서 변화를 정리하면 [표 6]과 같다.

[표 6] 학습 요소의 지도 순서 변화

교과서	학습 요소의 지도 순서
1차	공배수→최소공배수→공약수→최대공약수
2차	약수→공약수→최대공약수→배수→공배수→최소공배수
3차	인수→배수→소인수→소인수분해→약수→공약수→최대공약수→공배수→최소공배수
4차	배수→약수→약수와 배수와의 관계→공약수→최대공약수→공배수→최소공배수
5차	배수→약수→약수와 배수와의 관계→공약수→최대공약수→공배수→최소공배수
6차	배수→약수→약수와 배수와의 관계→공약수→최대공약수→공배수→최소공배수
7차	배수→약수→약수와 배수와의 관계→공약수→최대공약수→공배수→최소공배수 →공약수와 최대공약수, 배수와 최소공배수의 관계

1차 교과서에서는 공배수의 정의에 앞서 배수가 언급되지만 이것은 단지 공배수를 설명

하기 위한 도구로 사용된 것이며, 공배수에 이어 최소공배수의 정의가 제시된다. 또한, 공배수와 최소공배수가 공약수와 최대공약수보다 먼저 지도되는데 이것은 이 단원에서 약분이 통분보다 먼저 제시되기 때문이다.

2차 교과서에서는 2 단원과 4 단원에서 각각 분수의 곱셈과 나눗셈, 분수의 덧셈과 뺄셈이 지도된다. 그래서 2 단원에서 약수, 공약수, 최대공약수가 먼저 다루어지고 4 단원에서 배수, 공배수, 최소공배수가 차례로 다루어진다.

3차 교과서에서는 인수에 대한 지도가 가장 먼저 이루어지고, 인수 개념을 바탕으로 약수 개념에 대한 지도가 이루어진다. 이어서 소수와 소인수 및 소인수분해에 대한 내용이 다루어지는데, 이것은 3차 교과서에서만 볼 수 있는 특징으로 공약수와 최대공약수 및 공배수와 최소공배수에 대한 내용을 다루는 데 있어서 기본 바탕이 된다.

4차 교과서에서는 배수가 가장 먼저 다루어진 후, 이어서 약수가 다루어지는데, 약수가 다루어지는 과정에서 약수와 배수와의 관계가 도식으로 제시된다.

5차 교과서에서는 배수를 가장 먼저 다룬다. 그리고 약수와 배수와의 관계는 약수에 대한 지도가 다루어진 후에 바로 이어 다루어진다.

이런 지도 순서는 6차 교과서도 그대로 유지된다.

7차 교과서에서는 배수와 약수가 지도되고 그 후에 약수와 배수와의 관계가 다루어진다. 그리고 이 단원의 맨 끝에서 공약수와 최대공약수 및 공배수와 최소공배수의 관계가 다루어진다.

5. 학습 지도 방법의 변화

가. 실생활 상황 및 소재의 활용

교과서에서 수학적 개념과 절차를 지도하기 위한 도입 활동으로 실생활 상황 및 소재를 사용하는 지도 방법은 수학적 개념이나 절차가 학습자에게 의미를 지니도록 하는 교수학적 고안의 하나이다(강완 2000, p. 31). 각 시기별 교과서에서 약수와 배수 지도와 관련하여 실생활 상황 및 소재를 활용한 예를 정리하면 [표 7]과 같다.

[표 7] 실생활 상황 및 소재 활용의 예

교과서	배수	약수	공약수	공배수
1차	×	×	×	×
2차	×	×	×	×
3차	×	×	×	×
4차	×	×	×	×
5차	꽃 모(삽화 제시)	귤(삽화 제시)	×	나무도막(그림 제시)
6차	자전거(삽화 제시)	귤	공책, 연필	테이프
7차	자동차(삽화 제시)	귤(삽화 제시)	사과, 귤	버스

5차 교과서와 6차 교과서 그리고 7차 교과서에서 약수와 배수 및 공약수와 공배수를 지도하기 위한 도입 활동으로 생활 장면 및 실생활 소재를 도입하는 방법이 사용되었다. 이런 방법은 학습자의 학습 동기 유발과 수학적 지식의 의미 있는 활용을 목표로 한 가개인화/가배경화가 이루어진 것으로 해석된다.

1차와 2차 교과서에서 약수와 배수 지도 과정에 이러한 생활 장면의 도입을 시도하지 않은 것은 단원 특성상 지도 목표의 초점이 분수의 계산에 맞추어졌기 때문인 것으로 생각된다.

그리고, 3차와 4차 교과서에서 약수와 배수 지도 과정에 실생활 상황 및 소재를 활용하지 않은 것은 수학적 지식과 실세계와의 연관성에 대한 고려보다는 새 수학의 영향으로 수학의 구조적 측면을 강조한 결과하고 볼 수 있다. 따라서 3차 교과서와 4차 교과서에서의 가개인화/가배경화는 형식적 고착(formal abidance) 현상이 나타날 가능성이 높은 교수학적 변환이다.

나. 최대공약수의 지도 방법

초등학교 교육과정에서 약수에 대한 개념은 공약수를 지도하는 데 기본이 되고, 공약수에 대한 개념은 다시 최대공약수를 지도하는 데 기본이 된다. 그리고 최대공약수는 분수를 기약분수로 바꾸는 데 이용된다. 따라서 초등학교에서 약수와 공약수 그리고 최대공약수를 다루는 가장 궁극적인 이유는 분수의 약분과 밀접한 관련이 있다.

1차 교과서부터 7차 교과서에 이르기까지 초등학교의 수학 교과서에서는 최대공약수 구하기를 지도하기 위해 다양한 방법들이 시도되고 있다([표 8] 참조).

[표 8] 최대공약수 구하기 지도를 위해 사용된 방법

지도 방법 \ 교과서	1차	2차	3차	4차	5차	6차	7차
최대공약수의 정의를 이용하여 구하는 방법	○	○	○	○	○	○	○
각 수를 공통인 인수(또는 공약수)로 나누어서 구하는 방법	○	○	○	○	○	○	○
소인수분해를 이용하여 구하는 방법	×	×	○	×	×	×	×

(1) 최대공약수의 정의를 이용한 방법

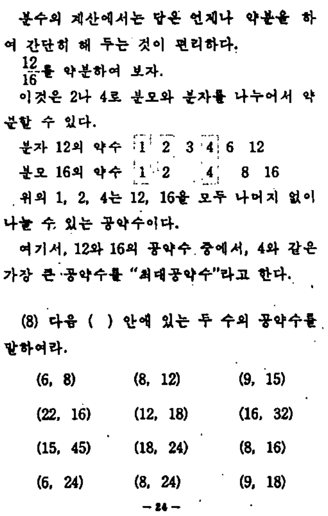
최대공약수를 구하기 위해 최대공약수의 정의를 이용하는 방법은 1차 교과서부터 7차 교과서에 이르기까지 공통적으로 사용되고 있다.

최대공약수의 정의를 이용한 방법은 먼저 각 수의 약수를 구한 후, 각각의 약수를 서로 비교하여 공통된 약수 즉, 공약수를 찾는다. 그렇게 찾은 공약수 중에서 가장 큰 수를 찾으면 그것이 바로 최대공약수가 된다.

최대공약수의 정의를 이용하는 방법은 집합이나 소인수분해와 같은 개념을 알지 못하더

라도 최대공약수를 구할 수 있다는 장점이 있다.

특히, 2차 교과서와 5차 교과서에서는 공약수와 최대공약수를 지도하는 과정에서 공약수끼리 점선으로 묶거나(<그림 1> 참조), 공약수에 □를 표시하는(<그림 2> 참조) 교수학적 고안이 사용되었다. 이와 같이 공약수끼리 점선으로 묶거나 □표를 하는 것은 공약수 개념을 이해하는 데 도움이 될 것으로 예상되기는 하지만, 공약수를 묶는 선이나 □표 등을 사용할 때 일어나는 메타 인지적 이동의 효과가 최소화되도록 하여야 한다.

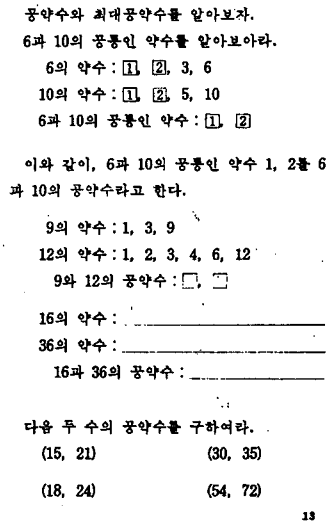

분수의 계산에서는 답은 언제나 약분을 하여 간단히 해 두는 것이 편리하다.
$\frac{12}{16}$을 약분하여 보자.
이것은 2나 4로 분모와 분자를 나누어서 약분할 수 있다.
분자 12의 약수 1 2 3 4 6 12
분모 16의 약수 1 2 4 8 16
위의 1, 2, 4는 12, 16을 모두 나머지 없이 나눌 수 있는 공약수이다.
여기서, 12와 16의 공약수 중에서, 4와 같은 가장 큰 공약수를 "최대공약수"라고 한다.

(8) 다음 ( ) 안에 있는 두 수의 공약수를 말하여라.

(6, 8)	(8, 12)	(9, 15)
(22, 16)	(12, 18)	(16, 32)
(15, 45)	(18, 24)	(8, 16)
(6, 24)	(8, 24)	(9, 18)

– 24 –

<그림 1> 2차 5-2 24쪽


공약수와 최대공약수를 알아보자.
6과 10의 공통인 약수를 알아보아라.
6의 약수 : $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, 3, 6
10의 약수 : $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, 5, 10
6과 10의 공통인 약수 : $\boxed{1}$, $\boxed{2}$

이와 같이, 6과 10의 공통인 약수 1, 2를 6과 10의 공약수라고 한다.

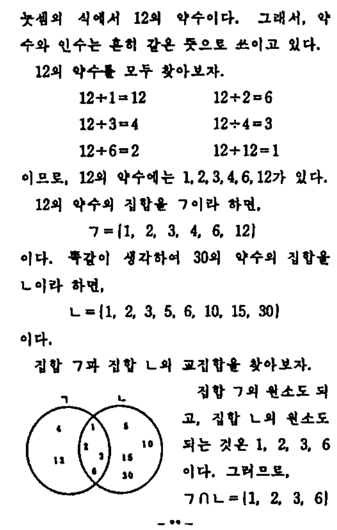
9의 약수 : 1, 3, 9
12의 약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 12
9와 12의 공약수 : □, □

16의 약수 : ____________
36의 약수 : ____________
16과 36의 공약수 : ____________

다음 두 수의 공약수를 구하여라.
(15, 21) (30, 35)
(18, 24) (54, 72)

13

<그림 2> 5차 5-1 13쪽



눗셈의 식에서 12의 약수이다. 그래서, 약수와 인수는 흔히 같은 뜻으로 쓰이고 있다.
12의 약수를 모두 찾아보자.
12÷1=12 12÷2=6
12÷3=4 12÷4=3
12÷6=2 12÷12=1
이므로, 12의 약수에는 1, 2, 3, 4, 6, 12가 있다.
12의 약수의 집합을 ㄱ이라 하면,
ㄱ={1, 2, 3, 4, 6, 12}
이다. 똑같이 생각하여 30의 약수의 집합을 ㄴ이라 하면,
ㄴ={1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}
이다.
집합 ㄱ과 집합 ㄴ의 교집합을 찾아보자.
집합 ㄱ의 원소도 되고, 집합 ㄴ의 원소도 되는 것은 1, 2, 3, 6 이다. 그러므로,
ㄱ∩ㄴ={1, 2, 3, 6}

– 22 –

<그림 3> 3차 5-1 22쪽

약수와 배수가 집합의 내용과 함께 다루어졌던 3차 교과서와 4차 교과서에서는 최대공약수의 정의를 이용하여 최대공약수를 구하되 원소나열법과 벤다이어그램이 함께 사용되고 있다(<그림 3>, <그림 4> 참조).

(2) 각 수를 공통인 인수(또는 공약수)로 나누어 구하는 방법

초등학교에서 약수와 공약수 및 최대공약수를 다루는 궁극적인 이유는 분수를 약분하기 위한 것이다. 그러나 앞에서 다룬 최대공약수의 정의를 이용하는 방법은 최대공약수를 구하기 전에 먼저 각 수의 약수 및 공약수를 일일이 구해야 하는 번거로움이 따른다. 따라서 분수를 약분하는 데 직접적으로 관련된 최대공약수를 쉽고 간단하게 구하는 방법이 필요하게 되는데, 이런 필요에 의하여 초등학교에서는 각 수를 공통인 소수로 나누어서 최대공약수를 구하는 방법이 다루어지고 있다.

각 수를 공통인 인수로 나누어서 최대공약수를 구하는 방법은 1차 교과서에서 7차 교과서에 이르기까지 공통으로 다루고 있는데 각 시기별 교과서에 따라 지도 방법에는 약간씩 차이가 있다.

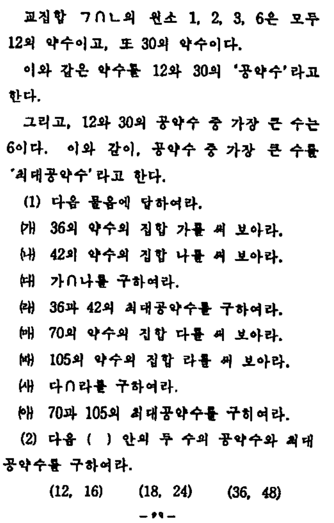
1, 2차 교과서에서는 각 수를 공통인 인수로 나누어 최대공약수를 구한 예가 이와 관련된 설명 없이 제시되고 있다. 즉, 각 단계에 대한 설명이나 학생들의 이해를 도울 수 있

는 교수학적 배려가 없어서 최대공약수를 공통인 인수로 나누어 구할 수 있다는 것을 모르는 학생들에게는 오히려 다른 방법보다 더 어렵게 느껴질 수도 있을 것이다. 또한, 각 단계에 대한 이해 없이 일종의 공식처럼 암기하여 사용하게 될 우려가 있다.

3차 교과서에서는 인수와 소인수 및 소인수분해라는 용어와 개념을 도입하여, 각 수를 소인수분해하여 최대공약수를 구하는 방법과 각 수를 공통인 인수로 나누어 구하는 방법을 서로 비교하면서 각 단계를 매우 자세히 설명하고 있다.

이것은 새 수학의 영향으로 수학의 구조적 측면을 강조한 가개인화/가배경화로써 인수와 소인수 및 소인수분해의 용어와 개념들은 초등학생들에게 너무 어려운 내용이기 때문에 자칫 잘못하면 형식적 고착 현상이 나타날 가능성이 높다.

4차 교과서에서는 각 단계에 대한 설명이 다시 삭제되고 간단히 화살표만 사용되었고, 5차 교과서부터는 학생들의 수준에 맞게 변형하여 각 수를 공통인 인수(공약수)로 나누어 최대공약수를 구할 수 있음을 보이고 있다. 그리고 화살표나 테두리 또는 색깔 등의 교수학적 고안을 사용하였다. 이런 교수학적 고안들은 학습자의 이해를 돕기 위하여 가개인화/가배경화가 이루어진 것으로 해석된다(<그림 5>, <그림 6> 참조).



교집합 ㄱ∩ㄴ의 원소 1, 2, 3, 6은 모두 12의 약수이고, 또 30의 약수이다.

이와 같은 약수를 12와 30의 '공약수'라고 한다.

그리고, 12와 30의 공약수 중 가장 큰 수는 6이다. 이와 같이, 공약수 중 가장 큰 수를 '최대공약수'라고 한다.

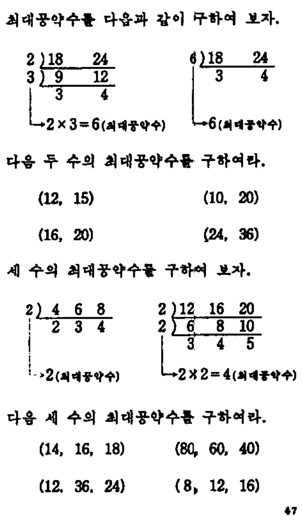
(1) 다음 물음에 답하여라.

(가) 36의 약수의 집합 가를 써 보아라.
(나) 42의 약수의 집합 나를 써 보아라.
(다) 가∩나를 구하여라.
(라) 36과 42의 최대공약수를 구하여라.
(마) 70의 약수의 집합 다를 써 보아라.
(바) 105의 약수의 집합 라를 써 보아라.
(사) 다∩라를 구하여라.
(아) 70과 105의 최대공약수를 구히여라.

(2) 다음 ( ) 안의 두 수의 공약수와 최대공약수를 구하여라.

(12, 16)　(18, 24)　(36, 48)

<그림 4> 3차 5-1 23쪽



최대공약수를 다음과 같이 구하여 보자.

2) 18 24
3) 9 12
　 3 4
→ 2×3=6(최대공약수)

6) 18 24
　 3 4
→ 6(최대공약수)

다음 두 수의 최대공약수를 구하여라.

(12, 15)　(10, 20)
(16, 20)　(24, 36)

세 수의 최대공약수를 구하여 보자.

2) 4 6 8
　 2 3 4
→ 2(최대공약수)

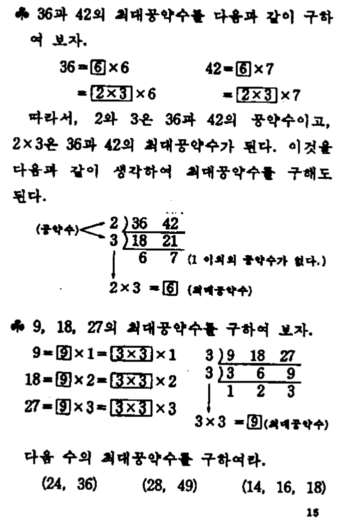
2) 12 16 20
2) 6 8 10
　 3 4 5
→ 2×2=4(최대공약수)

다음 세 수의 최대공약수를 구하여라.

(14, 16, 18)　(80, 60, 40)
(12, 36, 24)　(8, 12, 16)

47

<그림 5> 4차 5-1 47쪽



♣ 36과 42의 최대공약수를 다음과 같이 구하여 보자.

$36=\boxed{6}\times 6 = \boxed{2\times 3}\times 6$　$42=\boxed{6}\times 7 = \boxed{2\times 3}\times 7$

따라서, 2와 3은 36과 42의 공약수이고, 2×3은 36과 42의 최대공약수가 된다. 이것을 다음과 같이 생각하여 최대공약수를 구해도 된다.

(공약수) 2) 36 42
　　　　3) 18 21
　　　　　 6 7 (1 이외의 공약수가 없다.)
$2\times 3=\boxed{6}$ (최대공약수)

♣ 9, 18, 27의 최대공약수를 구하여 보자.

$9=\boxed{9}\times 1=\boxed{3\times 3}\times 1$
$18=\boxed{9}\times 2=\boxed{3\times 3}\times 2$
$27=\boxed{9}\times 3=\boxed{3\times 3}\times 3$

3) 9 18 27
3) 3 6 9
　 1 2 3
$3\times 3=\boxed{9}$(최대공약수)

다음 수의 최대공약수를 구하여라.

(24, 36)　(28, 49)　(14, 16, 18)

15

<그림 6> 5차 5-1 15쪽

(3) 소인수 분해를 이용하여 구하는 방법

소인수분해를 이용하여 최대공약수를 구하는 방법은 두 수를 각각 소인수분해하여 공통으로 곱하여진 인수들의 곱을 찾는 방법이다.

이 방법은 인수와 소인수 그리고 소인수분해 개념에 대한 이해가 선행되어야 하는데, 초등학교에서는 3차 교과서에서만 다루어졌다.

특히, 3차 교과서 24쪽에서는 12와 30을 각각 소인수분해하여 공통인 인수의 곱을 찾고, 다시 공통인 인수의 곱으로 12와 30을 나누어, 나누어떨어짐을 확인하는 과정이 제시되었다(<그림 7> 참조).

또한, 12와 30의 공통인 인수의 곱 2×3을 □로 묶거나 70과 84의 공통인 인수 2, 7에 점

선으로 ○표를 하는 등의 교수학적 고안이 사용되었다.

공약수끼리 점선으로 묶거나 ○표를 하는 것은 각 단계를 이해하는 데 도움이 될 것으로 예상되기는 하지만, 테두리나 ○표 등을 사용할 때 일어나는 메타 인지적 이동이 최소화되도록 하여야 한다.

다. 최소공배수의 지도 방법

초등학교 교육과정에서 배수에 대한 개념은 공배수를 지도하는 데 기본이 되고, 공배수에 대한 개념은 다시 최소공배수를 지도하는 데 기본이 된다. 그리고 최소공배수는 분수를 기약분수로 바꾸는 데 이용된다. 그래서 초등학교에서 배수와 공배수 그리고 최소공배수를 다루는 가장 궁극적인 이유는 분수의 통분과 밀접한 관련이 있다. 1차에서 7차 교과서까지 초등학교의 수학 교과서에서는 최소공배수 구하기를 지도하기 위해 다양한 방법들이 시도되고 있다([표 9] 참조).

[표 9] 최소공배수 구하기 지도를 위해 사용된 방법

교과서 지도 방법	1차	2차	3차	4차	5차	6차	7차
최소공배수의 정의를 이용하여 구하는 방법	○	○	○	○	○	○	○
각 수를 공통인 인수(또는 공약수)로 나누어 구하는 방법	○	○	○	○	○	○	○
소인수분해를 이용하여 구하는 방법	×	×	○	×	×	×	×
두 수의 곱을 두 수의 최대공약수로 나누어 구하는 방법	×	×	○	×	×	×	×

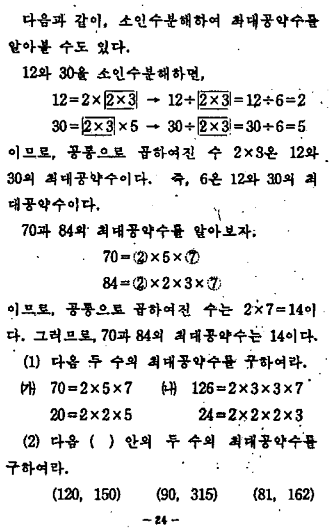
(1) 최소공배수의 정의를 이용하여 구하는 방법

최소공배수를 구하기 위해 최소공배수의 정의를 이용하는 방법은 1차 교과서부터 7차 교과서에 이르기까지 공통적으로 사용되고 있다.

최소공배수의 정의를 이용한 방법은 먼저 각 수의 배수를 구한 후, 각각의 배수를 서로 비교하여 공통된 배수 즉, 공배수를 찾는다. 그렇게 찾은 공배수(0은 제외)중에서 가장 작은 수를 찾으면 그것이 바로 최소공배수가 된다.

최소공배수의 정의를 이용하는 방법은 집합이나 소인수분해와 같은 개념을 알지 못하더라도 최소공배수를 구할 수 있다는 장점이 있다.

특히, 3차 교과서와 4차 교과서에서는 원소나열법과 벤다이어그램이 함께 사용되고 있다. 이 방법에서는 두 수의 배수의 집합을 각각 구한 후, 원소나열법과 벤다이어그램을 이용하여 두 집합 사이의 교집합을 구한다. 이 교집합은 두 수의 공배수의 집합으로, 이 집합의 원소 중 0을 제외한 가장 작은 원소가 바로 최소공배수가 된다(<그림 8>, <그림 9> 참조).



다음과 같이, 소인수분해하여 최대공약수를 알아볼 수도 있다.

12와 30을 소인수분해하면,

$12=2\times\boxed{2\times3} \rightarrow 12\div\boxed{2\times3}=12\div6=2$

$30=\boxed{2\times3}\times5 \rightarrow 30\div\boxed{2\times3}=30\div6=5$

이므로, 공통으로 곱하여진 수 2×3은 12와 30의 최대공약수이다. 즉, 6은 12와 30의 최대공약수이다.

70과 84의 최대공약수를 알아보자.

$70=2\times5\times7$

$84=2\times2\times3\times7$

이므로, 공통으로 곱하여진 수는 2×7=14이다. 그러므로, 70과 84의 최대공약수는 14이다.

(1) 다음 두 수의 최대공약수를 구하여라.

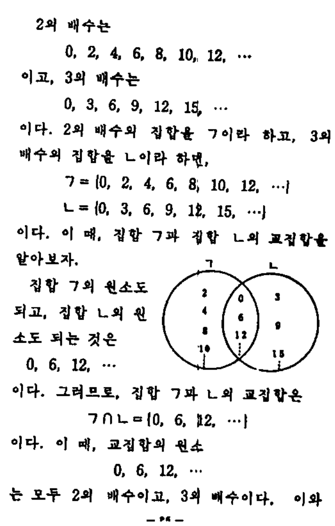
(가) $70=2\times5\times7$, $20=2\times2\times5$ (나) $126=2\times3\times3\times7$, $24=2\times2\times2\times3$

(2) 다음 ( ) 안의 두 수의 최대공약수를 구하여라.

(120, 150) (90, 315) (81, 162)

- 24 -

<그림 7> 3차 5-1 24쪽



2의 배수는

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, …

이고, 3의 배수는

0, 3, 6, 9, 12, 15, …

이다. 2의 배수의 집합을 ㄱ이라 하고, 3의 배수의 집합을 ㄴ이라 하면,

ㄱ = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, …}

ㄴ = {0, 3, 6, 9, 12, 15, …}

이다. 이 때, 집합 ㄱ과 집합 ㄴ의 교집합을 알아보자.

집합 ㄱ의 원소도 되고, 집합 ㄴ의 원소도 되는 것은

0, 6, 12, …

이다. 그러므로, 집합 ㄱ과 ㄴ의 교집합은

ㄱ∩ㄴ = {0, 6, 12, …}

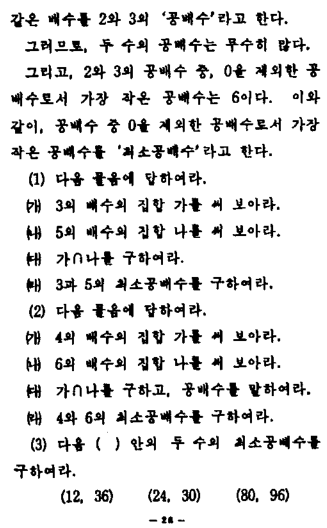
이다. 이 때, 교집합의 원소

0, 6, 12, …

는 모두 2의 배수이고, 3의 배수이다. 이와

- 25 -

<그림 8> 3차 5-1 25쪽



같은 배수를 2와 3의 '공배수'라고 한다.

그러므로, 두 수의 공배수는 무수히 많다.

그리고, 2와 3의 공배수 중, 0을 제외한 공배수로서 가장 작은 공배수는 6이다. 이와 같이, 공배수 중 0을 제외한 공배수로서 가장 작은 공배수를 '최소공배수'라고 한다.

(1) 다음 물음에 답하여라.

(가) 3의 배수의 집합 가를 써 보아라.

(나) 5의 배수의 집합 나를 써 보아라.

(다) 가∩나를 구하여라.

(라) 3과 5의 최소공배수를 구하여라.

(2) 다음 물음에 답하여라.

(가) 4의 배수의 집합 가를 써 보아라.

(나) 6의 배수의 집합 나를 써 보아라.

(다) 가∩나를 구하고, 공배수를 말하여라.

(라) 4와 6의 최소공배수를 구하여라.

(3) 다음 ( ) 안의 두 수의 최소공배수를 구하여라.

(12, 36) (24, 30) (80, 96)

- 26 -

<그림 9> 3차 5-1 26쪽

(2) 각 수를 공통인 인수(또는 공약수)로 나누어 구하는 방법

초등학교에서 배수와 공배수 및 최소공배수를 다루는 궁극적인 이유는 분수를 통분하기 위한 것이다. 그러나 앞에서 다룬 최소공배수의 정의를 이용하는 방법은 최소공배수를 구하기 전에 먼저 각 수의 배수 및 공배수를 일일이 구해야 하는 번거로움이 따른다. 따라서 분수를 통분하는 데 직접적으로 관련된 최소공배수를 쉽고 간단하게 구하는 방법이 필요하게 되는데, 이런 필요에 의하여 초등학교에서는 각 수를 공통인 소수로 나누어서 최소공배수를 구하는 방법이 다루어지고 있다.

각 수를 공통인 인수로 나누어서 최소공배수를 구하는 방법은 1차 교과서에서 7차 교과서에 이르기까지 공통으로 다루고 있는데 교과서의 전개 방식에는 각 시기별 교과서마다 조금씩 차이가 있다.

1, 2차 교과서에서는 각 수를 공통인 인수로 나누어 최소공배수를 구한 예가 이와 관련된 설명 없이 제시되고 있다. 즉, 각 단계에 대한 설명이나 학생들의 이해를 도울 수 있는 교수학적 배려가 없어서 최소공배수를 공통인 인수로 나누어 구할 수 있다는 것을 모르는 학생들에게는 오히려 다른 방법보다 더 어렵게 느껴질 수도 있을 것이다. 또한, 각 단계에 대한 이해 없이 일종의 공식처럼 암기하여 사용하게 될 우려가 있다.

3차 교과서에서는 인수와 소인수 및 소인수분해라는 용어와 개념을 도입하여, 각 수를 소인수분해하여 최소공배수를 구하는 방법과 각 수를 공통인 인수로 나누어 구하는 방법을 서로 비교하면서 각 단계를 매우 자세히 설명하고 있다. 이것은 새 수학의 영향으로 수학의 구조적 측면을 강조한 가개인화/가배경화로써 인수와 소인수 및 소인수분해의 용어와 개념들은 초등학생들에게 너무 어려운 내용이기 때문에 자칫 잘못하면 형식적 고착 현상이 나타날 가능성이 높다.

1, 2차 교과서와 3차 교과서의 단점들을 보완하여 4차 교과서에서부터는 학생들의 수준에 맞게 변형하여 각 수를 공통인 인수(공약수)로 나누어 최소공배수를 구할 수 있음을 보이고 있다. 그리고 화살표나 테두리 또는 색깔 등의 교수학적 고안을 사용하였다. 이런

교수학적 고안들은 학습자의 이해를 돕기 위하여 가개인화/가배경화가 이루어진 것으로 해석된다(<그림 10> 참조).

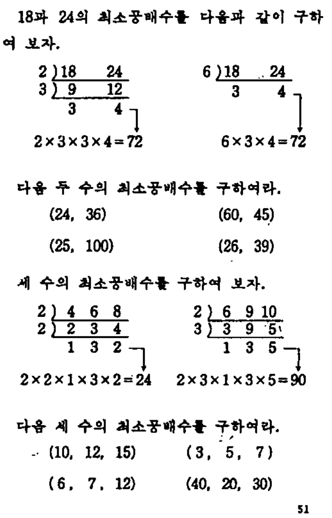
(3) 소인수분해를 이용하여 구하는 방법

소인수분해를 이용하여 최소공배수를 구하는 방법은 두 수를 각각 소인수분해하여 공통으로 곱하여진 인수들의 곱과 나머지 인수들의 곱을 서로 곱하여 찾는다.

이 방법은 인수와 소인수 그리고 소인수분해 개념에 대한 이해가 선행되어야 하는데, 초등학교에서는 3차 교과서에서만 다루어졌다.

(4) 두 수의 곱을 두 수의 최대공약수로 나누어 구하는 방법

두 수의 곱을 두수의 최대공약수로 나누어 최소공배수를 구하는 방법은 3차 교과서에서만 다루고 있다(<그림 11>, <그림 12> 참조).



18과 24의 최소공배수를 다음과 같이 구하여 보자.

2) 18 24
3) 9 12
3 4

$2\times3\times3\times4=72$

6) 18 24
3 4

$6\times3\times4=72$

다음 두 수의 최소공배수를 구하여라.

(24, 36) (60, 45)

(25, 100) (26, 39)

세 수의 최소공배수를 구하여 보자.

2) 4 6 8
2) 2 3 4
1 3 2

$2\times2\times1\times3\times2=24$

2) 6 9 10
3) 3 9 5
1 3 5

$2\times3\times1\times3\times5=90$

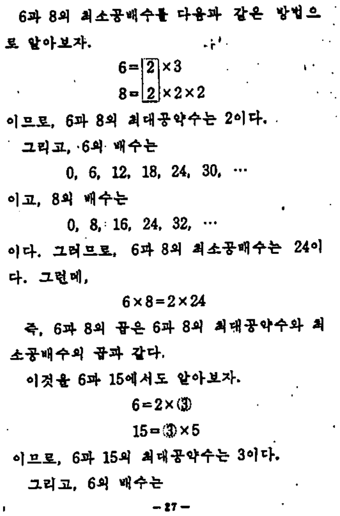
다음 세 수의 최소공배수를 구하여라.

(10, 12, 15) (3, 5, 7)

(6, 7, 12) (40, 20, 30)

51

<그림 10> 4차 5-1 51쪽



6과 8의 최소공배수를 다음과 같은 방법으로 알아보자.

$6=\boxed{2}\times3$

$8=\boxed{2}\times2\times2$

이므로, 6과 8의 최대공약수는 2이다.

그리고, 6의 배수는

0, 6, 12, 18, 24, 30, …

이고, 8의 배수는

0, 8, 16, 24, 32, …

이다. 그러므로, 6과 8의 최소공배수는 24이다. 그런데,

$6\times8=2\times24$

즉, 6과 8의 곱은 6과 8의 최대공약수와 최소공배수의 곱과 같다.

이것을 6과 15에서도 알아보자.

$6=2\times3$

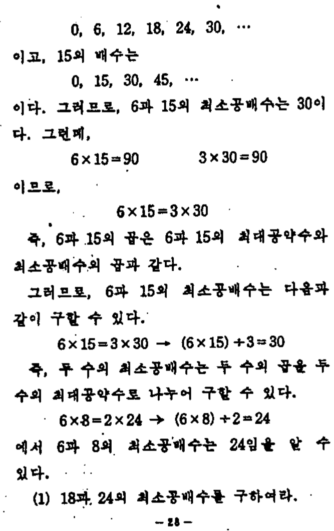
$15=3\times5$

이므로, 6과 15의 최대공약수는 3이다.

그리고, 6의 배수는

– 27 –

<그림 11> 3차 5-1 27쪽



0, 6, 12, 18, 24, 30, …

이고, 15의 배수는

0, 15, 30, 45, …

이다. 그러므로, 6과 15의 최소공배수는 30이다. 그런데,

$6\times15=90$ $3\times30=90$

이므로,

$6\times15=3\times30$

즉, 6과 15의 곱은 6과 15의 최대공약수와 최소공배수의 곱과 같다.

그러므로, 6과 15의 최소공배수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$6\times15=3\times30 \rightarrow (6\times15)+3=30$

즉, 두 수의 최소공배수는 두 수의 곱을 두 수의 최대공약수로 나누어 구할 수 있다.

$6\times8=2\times24 \rightarrow (6\times8)+2=24$

에서 6과 8의 최소공배수는 24임을 알 수 있다.

(1) 18과 24의 최소공배수를 구하여라.

– 28 –

<그림 12> 3차 5-1 28쪽

이 방법은 최대공약수와 최소공배수와의 관계를 이용한 방법으로, 두 수의 곱과 두 수의 최대공약수를 알고 있을 때 사용하면 편리하다.

IV. 결 론

이상에서의 분석과 논의를 바탕으로 하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 1차에서 7차까지의 교과서에서 볼 수 있는 교수학적 변환은 교과서가 개편됨에 따라 점차 절충적이고 안정적인 형태를 갖추게 되었다.

1, 2차 교과서에서 볼 수 있는 교수학적 변환은 비교적 덜 구조화된 것으로 약수와 배수 관련 내용을 간단히 설명하고. 확인 문제를 제시하는 것으로 끝내고 있다. 3차 교과서

에서는 약수와 배수 단원에 집합 개념과 소인수 분해 개념 등 다양한 수학적 개념들이 혼합되어 있다. 그런데 이런 교수학적 변환은 학생의 이해를 고려한 학생의 인지적 상황보다는 수학적, 논리적 원리에 의존하고 있는 것으로서 학습자의 입장에서는 여러 가지 개념적 혼선을 불러올 수 있다.

5, 6, 7차 교과서에서는 생활 문제 상황 및 실생활 소재를 도입하여 약수와 배수의 수학적 개념과 실세계와의 연관성을 강조하였다. 특히, 7차 교과서에서는 교수학적 변환이 수학적 내용의 제시보다는 탐구 활동을 통한 수학적 개념의 형성에 초점을 맞추고 있다.

둘째, 약수와 배수에 대한 지도 방법은 교과서 개편을 거듭하는 동안 수학적 체계를 갖추기 위해 학습 요소의 정돈이 이루어졌고, 각 시기별 교과서마다 학습 지도 방법과 학습 전개 방식에서 차이를 발견할 수 있었다. 이러한 차이는 학습자의 측면에서 개념을 인식하고, 쉽게 일반화할 수 있도록 교과서를 구성하는 과정에서 발생된 것이라고 볼 수 있다.

셋째, 약수와 배수를 지도하기 위한 도입 활동으로 생활 장면 및 실생활 소재를 사용하는 것은 약수와 배수에 대한 개념이 학습자에게 의미 충실한 학습이 되도록 하는 데 꼭 필요한 교수학적 변환이다.

초등학교 학생들은 심리학적 발달의 특성상 수학적인 내용을 추상적인 방법이나 연역적인 방법으로 이해하기 어렵기 때문에 도입 활동으로 생활 장면을 도입하는 교수학적 고안은 학습자의 학습 동기를 유발할 뿐만 아니라 학습자의 수학적 지식의 인식 과정에서의 개인화/배경화를 지원한다.

넷째, 최대공약수 및 최소공배수를 공통인 인수(공약수)로 나누어 구하는 방법에 대한 지도 과정에서는 학습자의 개인화/배경화를 고려한 교수학적 고안이 절실히 요구된다.

교과서는 수학적 지식을 학습자의 수준에 알맞게 변형하여 제시하는 매개체이다. 최대공약수 및 최소공배수를 공통인 인수로 나누어 구하는 방법은 학생들이 각 단계에 대한 이해 없이 무조건 암기하여 사용할 여지가 있는 내용으로, 각 단계에 대한 이해가 선행될 수 있도록 학습자의 수준에 적절한 교수학적 변환이 이루어져야한다.

다섯째, 학습자 중심의 학습을 위한 교과서 제작을 위해서 교과서에서의 학습 활동에 대한 연구가 심도 있게 이루어져야 한다.

7차 교과서에서는 교수학적 변환이 수학적 내용의 제시보다는 탐구 활동을 통한 수학적 개념의 형성에 초점을 맞추고 있다. 즉, 약수와 배수의 각 개념의 정의를 먼저 제시하고 이어서 학생이 문제를 풀도록 했던 기존의 교과서 전개 방식을 바꾸어 학생들의 활동을 거쳐 약수와 배수의 각 개념에 도달하도록 교과서를 구성하고 있다.

이것은 구성주의 학습관에 의거하여 학습자 주도의 학습이 되도록 하는 교수학적 변환으로 학생의 활동을 안내하고 지시하는 과정에서 발생할 수 있는 교과서 혹은 교사의 역할에 대한 한계와 그 보완책에 대하여 계속적인 연구가 이루어져야 한다.

참 고 문 헌

강완 (2000). 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 지도 방법의 변천과 전망. **서울교육대학교 과학과 수학 교육 논문집 26**, pp. 117-138.

강완, 백석윤 (1998). **초등수학교육론**. 서울: 동명사.

강태석 (2001). **초등학교 수학 교과서에 나타난 분수의 크기 비교 지도 방법에 관한 분석**. 서울교육대학교 석사학위논문.

강홍규, 조영미 (2000). 학교 수학에서의 다양한 정의 방법과 교수학적 의의. **대한수학교육학회 2000년도 춘계 수학교육학연구발표대회논문집**, pp. 161-186. 대한수학교육학회.

교육부 (1993). **산수 5-1**. 서울: 국정교과서주식회사.

교육부 (1994). **국민학교 교육과정 해설(Ⅰ) - 총론, 국어, 수학**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육부 (1996). **수학 5-1**. 서울: 국정교과서주식회사.

교육부 (1997). **수학과 교육과정 〔별책8〕**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육부 (1997). **초등학교 교사용 지도서 5-1**. 서울: 국정교과서주식회사.

교육부 (1998). **초등학교 교육과정 해설(Ⅳ) - 수학, 과학, 실과**. 서울: 서울특별시 인쇄공업협동조합.

교육부 (2002). **수학 5-가**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육부 (2002). **초등학교 교사용 지도서 수학 5-가**. 서울: 대한교과서주식회사.

김응태, 박승안 (1997), **정수론(제4판)**. 서울: 경문사.

문교부 (1995). **산수 6-1**. 서울: 국정교과서주식회사.

문교부 (1965). **산수 5-2**. 서울: 국정교과서주식회사.

문교부 (1979). **산수 5-1**. 서울: 국정교과서주식회사.

문교부 (1983). **산수 5-1**. 서울: 국정교과서주식회사.

배종수 (1999). **초등 수학 교육 내용 지도법 - 제7차 교육과정을 중심으로**. 서울: 경문사.

송영순 (1999). **초등학교 수학과 교육과정 변천에 관한 연구**. 경기대학교 석사학위논문.

송정환 (2001). **초등학교 수학 교과서에 나타난 수직과 평행 지도 방법에 대한 분석**. 서울교육대학교 석사학위논문.

안갑선 (1999). **중학교에서의 약수와 배수에 관한 지도 방법 연구**. 서강대학교 석사학위논문.

우정호 (1999). **학교 수학의 교육적 기초**, 서울: 서울대학교 출판부.

우정호 (2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교 출판부.

유병림, 고동욱, 오병승 (1991). **산수과 교육의 이론과 실제**, 서울: 동명사.

이경화 (1996). **확률 개념의 교수학적 변환에 관한 연구**. 서울대학교 박사학위논문.

Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. In H. -G. Steiner (Ed.), *Theory of Mathematics Education (TME) (ICME 5-Topic Area and Miniconference* (pp. 110-119). Adelaide, Australia.

David M. Burton (1989). *Elementary Number Theory (Third Edition).* Wm. C. Brown Publishers.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Joseph H. Silverman (1997). *A Friendly Introduction to Number Theory.* Prentice-Hall, Inc.

Kang, W. (1990). Didactic transposition in mathematics textbooks. *For the Learning lf Mathematics, 12*, pp. 2-7.

<Abstract>

An Analysis of Teaching Divisor and Multiple in Elementary School Mathematics Textbooks

Choi, Ji Young[4]; & Kang, Wan[5]

This study analyzes divisor and multiple in elementary school mathematics textbooks published according to the first to the 7th curriculum, in a view point of the didactic transposition theory.

In the first and second textbooks, the divisor and the multiple are taught in the chapter whose subject is on the calculations of the fractions. In the third and fourth textbooks, divisor and multiple became an independent chapter but instructed with the concept of set theory. In the fifth, the sixth, and the seventh textbooks, not only divisor multiple was educated as an independent chapter but also began to be instructed without any conjunction with set theory or a fractions. Especially, in the seventh textbook, the understanding through activities of students itself are strongly emphasized.

The analysis on the each curriculum periods shows that the divisor and the multiple and the reduction of a fractions to the lowest terms and to a common denominator are treated at the same period. Learning activity elements are increase steadily as the textbooks and the mathematical systems are revised. The following conclusion can be deduced based on the textbook analysis and discussion for each curriculum periods.

First, learning instruction method also developed systematically with time.

Second, teaching method of the divisor and multiple has been sophisticated during the 1st to 7th curriculum textbooks. And the variation of the teaching sequences of the divisor and multiple is identified.

Third, we must present concrete models in real life and construct textbooks for students to abstract the concepts by themselves.

Fourth, it is necessary to develop some didactics for students' contextualization and personalization of the greatest common divisor and least common multiple.

Fifth, the 7th curriculum textbooks emphasize inquiries in real life which learning activities by the student himself or herself.

Keywords: Elementary Mathematics Textbooks, Didactic Transposition, Divisors and Multiples, Mathematics Curriculum.

4) ji0620@chollian.net
5) wkang@ns.snue.ac.kr