◎ 정정 논문

비선형 $k-\varepsilon$ 난류모델에 따른 정사각형 덕트내 난류유동 수치해석
(8권1호 게재논문중 그림정정)

명 현 국*

Simulation of Turbulent Flow in a Square Duct with Nonlinear $k-\varepsilon$ Models

Hyon Kook, Myong

Two nonlinear $k-\varepsilon$ models with the wall function method are applied to the fully developed turbulent flow in a square duct. Typical predicted quantities such as axial and secondary velocities, turbulent kinetic energy and Reynolds stresses are compared in details both qualitatively and quantitatively with each other. A nonlinear $k-\varepsilon$ model with the wall function method capable of predicting accurately duct flows involving turbulence-driven secondary motion is presented in the present paper. The nonlinear $k-\varepsilon$ model of Shih et al.[1] adopted in a commercial code is found to be unable to predict accurately duct flows with the prediction level of secondary flows one order less than that of the experiment.

Key Words: Nonlinear $k-\varepsilon$ model(비선형 $k-\varepsilon$ 모델), Turbulence-driven secondary flow (난류로 야기되는 이차유동), Anisotropy (비등방성), Simulation(수치해석)

1. 서 론

비원형 단면(noncircular duct)을 가지는 덕트내에서의 난류유동은 공학적으로 중요한 열교환기, 공기조화시스템, 연소챔버 및 원자로의 냉각채널 등에서 나타난다. 이 유동의 주된 특징은 충분히 발달된 유동의 경우에도 횡단면상에 난류의 비등방성에 의해 야기되는 이차유동(secondary flow)이 존재한다는 것이다. 이 이차유동은 축방향 주류속도에 비해 1% 이하로 상대적으로 매우 작으나, 난류에너지를 재분배시키고, 주유동 속도에 영향을 주어 결과적으로 벽면전단응력 분포를 변화시키는 등 유동장 전반에 걸쳐 큰 영향을 미친다. 따라서, 현재까지 많은 실험적 및 수치해석적 연구가 수행되어 왔다[1]-[7].

한편, 컴퓨터의 급속한 발달에 힘입어 공학적으로 중요한 복잡한 형상을 가지는 물체 주위 및 내부의 난류유동예측을 위해 현재 일반좌표계를 사용하는 상용코드가 널리 사용되고 있다. 그러나, 대부분의 상용코드는 난류의 등방성 가정에 기초한 선형(linear) 난류모델을 채택하고 있어 비원형 단면을 가지는 덕트내에서의 난류유동과 같은 난류의 비등방성에 기인하여 발생하는 난류유동을 제대로 예측하지 못하고 있다. 최근, 난류의 비등방성을 고려한 비선형(nonlinear) 난류모델을 도입시킨 상용코드(STAR-CD)[8]가 개발되어, 비원형 단면을 가지는 복잡한 난류유동 해석에 사용되고 있으나, 이 비선형 난류모델에 대한 정확한 평가가 아직 이루어지지 않은 상태이다.

* 2003년 01월 14일 접수
* 국민대학교 기계자동차공학부

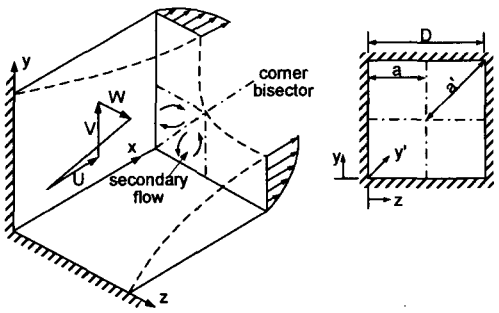


Fig. 1 Coordinate system and pertinent variables in a straight square duct.

저자[9]는 최근 정사각형 형상을 가지는 덕트 내의 유동을 대상으로 하여, 현재 상용코드에 도입된 저레이놀즈수형 비선형난류모델이 정성적으로 이차유동을 예측하기는 하나, 정량적인 면에서 실험결과에 비해 한 차수 이상 작게 예측하여 이차유동에 기인하여 생기는 벽면전단응력, 축방향 속도, 레이놀즈응력 등 실험적으로 알려진 유동장의 변화를 제대로 예측할 수 없음을 명확하게 규명하였다. 그러나, 일반적으로 공학적인 문제는 고레이놀즈수 유동이고, 이러한 유동해석에 경제적인 벽함수 방법을 사용하는 고레이놀즈수형 비선형 난류모델에 대한 정확한 평가는 아직 이루어지지 않은 상태로 이에 대한 정립이 필요하다.

본 연구에서는 이러한 배경하에 상용코드에 도입된 공학적으로 사용하기 편리한 벽함수를 사용하는 고레이놀즈수형 비선형 난류모델의 예측성능을 정량적으로 평가하고, 상용코드에 사용될 수 있는 고레이놀즈수형 비선형 난류모델을 제안하고자 한다. 또한 향후 고레이즈수형 비선형 난류모델의 개선방향을 위한 데이터베이스를 구축한다.

2. 수치해석방법

2.1 해석모델 및 비선형난류모델

본 연구에서 대상으로 하는 해석모델은 Fig. 1에 나타낸 바와 같이 정사각형 단면을 가지는 덕트내의 난류유동으로, 형상이 단순하고 실험결과가 많이 있어 비선형 난류모델을 정량적으로 평가하기에 적절하다. 또한, 본 연구에서는 해석의

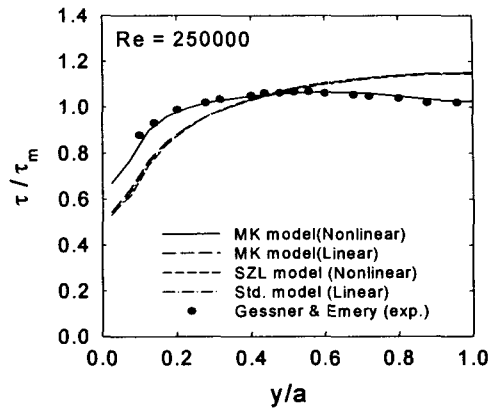


Fig. 2 Local wall shear stress distributions for fully-developed flow in a square duct.

편의상 완전히 발달된 난류유동의 경우만을 고려하기로 한다.

현재까지 많은 비선형 난류모델이 제안되어 있으나, 본 연구에서는 실현성(realizability)을 만족하고 있으며, 현재 상용코드[8]에서 유일하게 채용하고 있는 Shih 등[1]의 비선형 $k-\varepsilon$ 난류모델(이하 SZL 모델)과 실현성을 만족하고 있지 않은 기존의 많은 비선형 난류모델 중에서 정사각형 덕트유동에 대해 예측성능이 우수한 것으로 확인된 저자[7, 10]에 의해 제안된 비선형 $k-\varepsilon$ 모델(이하 MK 모델)을 대상으로 상호비교를 수행한다. 이 두 모델에 대한 상세한 사항은 참고문헌[1, 7, 10]에 나와 있으므로, 여기서는 간략하게 두 모델의 특징만을 기술한다.

벽함수를 사용하는 고레이놀즈수형 비선형 $k-\varepsilon$ 난류모델은 고레이놀즈수형 선형 $k-\varepsilon$ 난류모델과 기본적으로는 똑같은 모델방정식 및 모델상수를 사용하고 있으나, 레이놀즈응력과 변형율 사이의 관계가 다음과 같이 비선형으로 표현된다[11].

$$\begin{aligned}\overline{\rho u_i u_j} &= \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij} - \mu_t S_{ij} \\ &+ C_1\mu_t\frac{k}{\varepsilon}\left(S_{ik}S_{kj} - \frac{1}{3}S_{kl}S_{kl}\delta_{ij}\right) \\ &+ C_2\mu_t\frac{k}{\varepsilon}\left(\Omega_{ik}S_{kj} + \Omega_{jk}S_{ki}\right) \\ &+ C_3\mu_t\frac{k}{\varepsilon}\left(\Omega_{ik}\Omega_{jk} - \frac{1}{3}\Omega_{kl}\Omega_{kl}\delta_{ij}\right)\end{aligned} \quad (1)$$

$$\mu_t = C_\mu \frac{\rho k^2}{\varepsilon} \tag{2}$$

$$S_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i},$$

$$\Omega_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \tag{3}$$

위의 식(1)에서 선형 난류모델은 우변의 처음 두 항만을 사용하며, SZL 모델은 비선형 난류모델의 모델상수에 대해서 아래와 같은 모델형태를 채용하고 있다.

$$C_1 = \frac{0.75}{(1000 + S^3)C_\mu} \tag{4a}$$

$$C_2 = \frac{3.75}{(1000 + S^3)C_\mu} \tag{4b}$$

$$C_3 = \frac{4.75}{(1000 + S^3)C_\mu} \tag{4c}$$

$$C_\mu = \frac{2/3}{1.25 + S + 0.9\Omega} \tag{5}$$

$$S = \frac{k}{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}}, \Omega = \frac{k}{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\Omega_{ij}\Omega_{ij}} \tag{6}$$

반면, MK 모델[7, 10]은 원래 저레이놀즈수형 난류모델이나 고레이놀즈수형에 대해서는 벽면 근처의 영향을 고려한 벽감쇄함수 및 추가항들을 제외하면 식(1)로 표현되며, 다음과 같은 모델상수 값을 가진다.

$$C_1 = 0.28,\ C_2 = 0.2375,\ C_3 = 0.05 \tag{7}$$

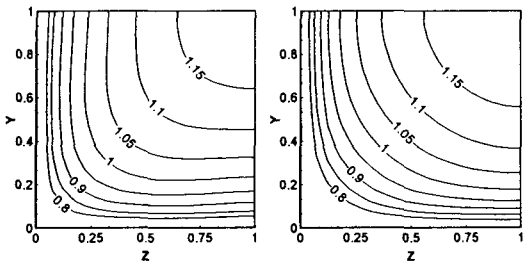
2.2 수치해석방법

수치해석은 자체 개발한 MOSA3D코드[12]를 사용하여 수행하였다. 이 코드는 유한체적법과 SIMPLE 해법에 기초하고 일반좌표계(경계밀착좌표계)와 정렬격자계를 채택하고 있다. 본 연구에서는 완전히 발달된 유동을 경제적으로 처리하기 위해 축(주유동) 방향으로 1~3개의 셀층만이 요구되는 수치해석방법을 코드에 도입하였다. 이 수치해석방법은 입구면상에 압력경계조건을, 출구면에 명시된 유동출구조건을 부과시키는 방법으로, 입출구면에 대해 압력을 제외한 모든 양들에 주기조건을 줌으로써 얻어지며 본 연구에서와 같이 완전히 발달된 유동을 해석하는데 매우 경제적인 방법으로 일부 상용코드에서도 채택되고 있다.

본 연구에서는 대칭성을 고려하여 Fig. 1에 나타낸 정사각형 단면의 1/4만을 대상으로 하였으며, y 및 z 축 방향으로 각각 20개의 등간격 격자를 사용하고, 벽면경계에 대해서는 선형 난류모델에서 사용하는 벽함수를 그대로 사용하였다. 또한, 대류항에 대한 도식으로는 하이브리드 도식(hybrid scheme)을 사용하였다. 참고로, 본 논문에서 이하 비교고찰하는 덕트 폭 및 축방향 평균속도에 기초한 레이놀즈수 Re가 250,000인 경우, 벽면으로부터 첫 번째 격자에서의 y^+ (또는 z^+)는 약 130 정도이다. 또한, 수치해의 정확도에 대한 대류항 도식 및 격자의존성은 벽면 근방에서의 값을 제외하고는 전체적인 해석결과에 대한 영향이 무시할만한 수준이다.

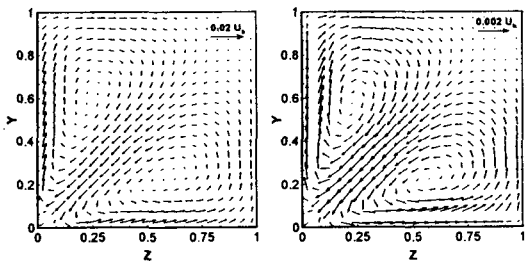
3. 결과 및 고찰

Fig. 2는 완전히 발달된 난류유동에 대한 덕트 주변길이에 따른 국소 벽면전단응력의 예측결과를 실험결과[6, 13]와 함께 나타내고 있다. 참고로 선형모델 결과도 함께 나타냈다. 실험결과는 벽면 부근에서 코너쪽으로 향하는 이차유동에 기인하여 벽면전단응력이 대칭면(양쪽 벽면의 중심)으로부터 코너쪽을 향해 상승하여 코너와 대칭면 중간 지점에서 최대값을 가진 후, 코너부근에서 급격히 떨어짐을 보여주고 있다. 예측결과를 보면 MK 비선형 모델은 실험적으로 알려진 특징을 정확하게 예측하고 있으며, 정량적으로도 실험결과와 매우 잘 일치하고 있다. 이 결과로부터 벽함수를 사용하는 MK의 고레이놀즈수형 비선형 모델이 이차유동을 잘 예측하고 있음을 예상할 수 있다. 반면, SZL 비선형 모델은 비등방성 효과를 전혀 고려하지 않는 두 선형모델과 유사하게 코너에서부터 상승하여 양쪽 벽면의 중심인 대칭면에서 최대로 되는 예측결과를 보여주고 있어, 이러한 실험적 결과를 전혀 반영시키지 못하고 있다.



(a) MK model (b) SZL model

Fig. 3 Contours of axial velocity U/U_b .

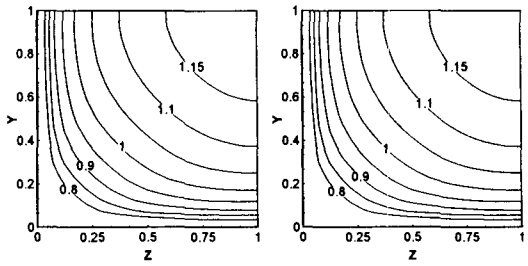


(a) MK model (b) SZL model

Fig. 5 Secondary flow vectors.

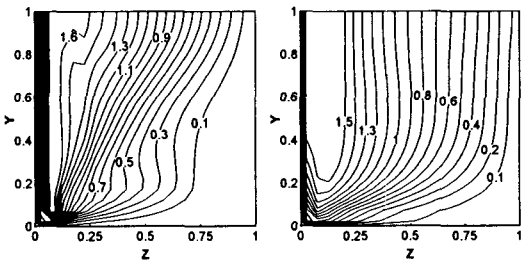
Fig. 3은 축방향 속도의 등고선을 보여주고 있다. 예측 결과를 보면 MK 비선형 모델은 코너쪽으로 향한 이차유동에 기인하여 등고선이 코너쪽을 향해 만곡된 형상 및 속도구배가 가장 심한 부분이 코너와 대칭면 사이에 나타나는 실험적으로 잘 알려진 사실[2, 4, 6, 13]을 명확하게 보여주고 있다. 반면, STAR-CD 모델은 이러한 경향을 전혀 나타내고 있지 않으며, 난류의 비등방성을 전혀 고려하지 않는 선형(등방) 모델의 결과(Fig. 4)와 거의 유사한 분포를 나타내고 있다. 또한, Fig. 2 및 Fig. 4로부터 두 선형모델은 모델방정식에 사용되는 모델 상수는 약간 다르지만 동등한 정도의 예측성능을 나타내고 있음을 알 수 있다.

Fig. 5는 예측된 이차유동 속도벡터를 나타내고 있다. 참고로, 비슷한 레이놀즈수에서의 실험결과[6, 13]는 이차유동 속도크기의 최대값을 축방향 평균속도의 약 1.8 %로 보고하고 있다. 예측결과를 보면 두 모델이 정성적으로 유사한 이차유동의 분포 형태를 보여 주고 있으나, 정량적으로는 크게 차이를 나타내고 있다. 즉, MK 모델이 이차유동 속도크기의 최대값을 축방향 평균



(a) MK model (b) SZL model

Fig. 4 Contours of axial velocity U/U_b by two linear $k-\epsilon$ models.

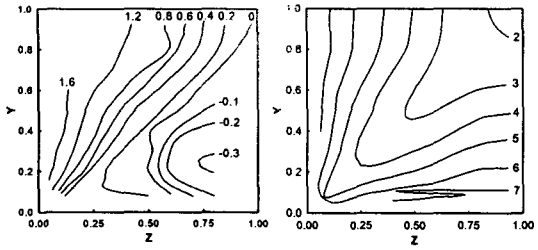


(a) MK model (b) SZL model

Fig. 6 Contours of turbulent shear stress $-\overline{uw}/U_b^2$ (x 10^3).

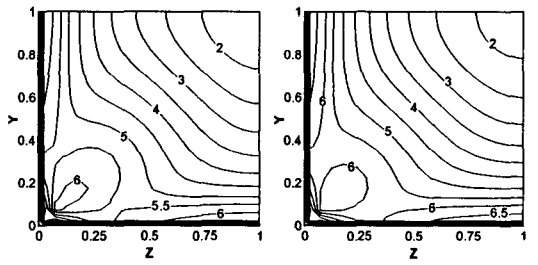
속도의 약 1.2 % 정도로 실험결과보다 다소 작게 예측하고 있다. 반면, SZL 모델은 0.15 %로 실험결과 및 MK 모델에 비해 한 차수 작게 이차유동을 예측하고 있음을 나타내고 있다. 결과적으로, SZL 모델은 이차유동을 예측하기는 하나, 정량적인 면에서 너무 작게 예측하여 앞에서 기술한 이차유동에 기인하여 생기는 벽면전단응력, 축방향 속도 및 뒤에서 비교분석할 레이놀즈 응력 등 실험적으로 알려진 유동장의 변화를 제대로 예측할 수 없음을 예상 수 있다.

Fig. 6은 난류 전단응력 $\overline{uw}$ 의 분포를 나타내고 있다. MK 모델은 이차유동으로 인해 코너와 대칭면 사이에서 심하게 만곡되고, 최대 전단응력이 대칭면에서 나타나지 않고 코너쪽으로 이동하는 실험적으로 알려진 사실[2, 6, 13] 및 실험결과(Fig. 7(a))을 비교적 잘 보여주고 있다. 반면, SZL 모델은 전반적으로 선형모델과 유사하게 대칭면에서 최대 전단응력을 가지며, 이차유동에 기인되어 변화하는 전단응력 분포를 제대로 예측하고 있지 못하다.



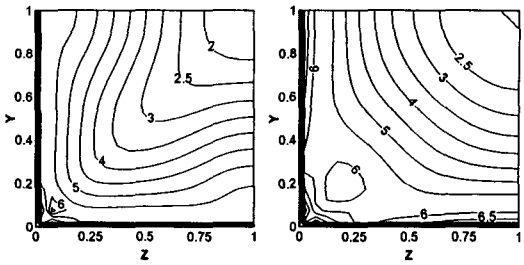
(a) $-\overline{uw}/U_b^2$ (x 10^3) (b) k/U_b^2 (x 10^3)

Fig. 7 Experimental results[6] for contours of turbulent shear stress and turbulent kinetic energy.



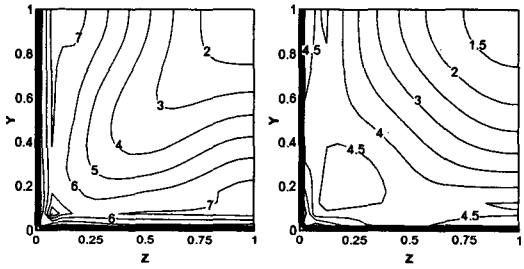
(a) MK model (b) SZL model

Fig. 9 Contours of turbulent kinetic energy k/U_b^2 (x 10^3) by two linear models.



(a) MK model (b) SZL model

Fig. 8 Contours of turbulent kinetic energy k/U_b^2 (x 10^3).



(a) MK model (b) SZL model

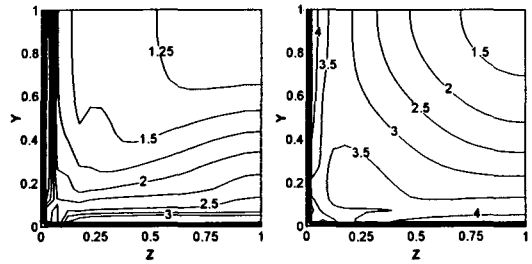
Fig. 10 Contours of turbulent normal stress $\overline{u^2}/U_b^2$ (x 10^3).

Fig. 8은 예측된 난류에너지의 등고선을 나타내고 있다. 실험결과[2, 4, 6, 13]에 따르면 난류에너지 등고선이 코너쪽을 향해 심하게 만곡된 형상을 보인다고 보고 되어 있는데, 예측결과를 보면 MK 모델은 Fig. 7 (b)에 나타낸 실험결과와 같이 등고선이 코너쪽을 향해 만곡된 형상을 비교적 잘 나타내고 있다. 반면, SZL 모델은 실험적 사실을 전혀 반영시키고 있지 못하며, 선형 모델의 결과(Fig. 9)와 매우 유사한 결과를 나타내고 있으며, 이것은 식(1)의 비선형 항들에 의한 수직응력의 비등방성 효과가 제대로 반영되지 않았음을 의미한다.

이러한 사실은 Fig. 10 및 Fig. 11에 각각 나타낸 축방향 및 z 방향의 수직응력 등고선 예측결과로부터 확인할 수 있다. 먼저, Fig. 10에 나타낸 축방향 수직응력에 대해 실험결과[2, 4, 6, 13]에 따르면 이 수직응력 등고선이 난류에너지와 유사하지만 코너쪽을 향해 더욱 심하게 만곡된 형상을 나타내고 있다고 보고 되어있는데, 예측결과를 보면 MK 모델은 특히 코너 및 벽면 근방에서 상대적으로 수직응력이 높게 나타나는 실험적 사실을 명확하게 보여주고 있으나, SZL 모델은 실험적 사실을 전혀 반영시키고 있지 못하며, 난류에너지 및 선형 모델의 결과(그림 생략)와 유사한 결과를 나타내고 있다.

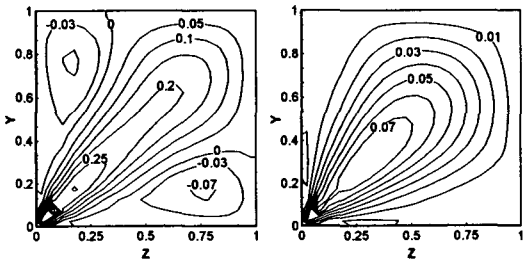
한편, Fig. 11에 나타낸 z 방향의 수직응력 분포에 대한 실험결과[4, 6, 13]에 따르면 이 수직응력은 이차유동으로 인해 상당히 비대칭적인 형상을 나타내고 있으며, 난류강도도 축방향 수직응력에 비해 상대적으로 크게 작아진다고 보고되어있다. 예측결과를 보면 MK 모델은 이러한 실험적 사실을 비교적 잘 반영하고 있는데 비해, SZL 모델은 비대칭성이 매우 약하고 선형모델에서 얻어지는 대칭에 가까운 분포를 보여주고 있으며, 난류강도도 상대적으로 크게 떨어지지 않고 있다. 따라서, 이 결과로부터 SZL 모델은 이 수직응력의 비대칭성에 기인하여 나타나는 이차유동을 제대로 예측할 수 없을 것을 예상할 수 있다.

마지막으로, 이차유동을 발생시키는 데 중요한



(a) MK model (b) SZL model

Fig. 11 Contours of turbulent normal stress $\overline{v^2}/U_b^2$ (x 10^3).

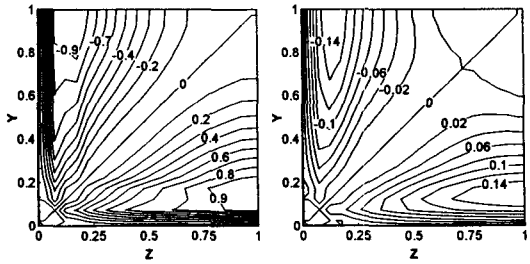


(a) MK model (b) SZL model

Fig. 13 Contours of turbulent shear stress $-\overline{vw}/U_b^2$ (x 10^3).

역할을 하는 것으로 알려진 정사각형 단면상의 수직응력의 차, $\overline{w^2}-\overline{v^2}$ 및 레이놀즈 전단응력 $\overline{vw}$ 을 Fig. 12 및 Fig. 13에 각각 나타냈다. 먼저, Fig. 12에 나타낸 단면상의 수직응력의 차, $\overline{w^2}-\overline{v^2}$에 대한 예측결과를 보면 두 모델이 정성적으로는 유사한 형상을 예측하고 있으나, 정량적으로는 MK 모델에 비해 SZL 모델은 한 차수 작게 예측하고 있다. 이 결과로부터 SZL 모델은 이차유동을 발생시키는 주된 역할을 하는 수직응력의 차를 상대적으로 작게 예측하여 결과적으로 이차유동을 정량적으로 정확히 예측하지 못함을 알 수 있다.

또한, Fig. 13에 나타낸 레이놀즈 전단응력 $\overline{vw}$ 의 등고선에 대한 결과를 보면 두 모델이 정성적으로 실험적 사실[2, 4]과 유사한 형상을 예측하고 있으나, 정량적으로는 Myong-Kasagi 모델에 비해 SZL 모델은 약 1/5 정도 작게 예측하고 있다. 따라서, 현재 상용코드에 채택되어



(a) MK model (b) SZL model

Fig. 12 Anisotropy between turbulent normal stress components $(\overline{w^2}-\overline{v^2})/U_b^2$ (x 10^3).

있는 SZL 모델은 이차유동을 발생시키는 주된 역할을 하는 레이놀즈 전단응력 및 앞에서 기술한 난류수직응력의 차를 상대적으로 작게 예측하여, 결과적으로 난류에 기인하여 발생하는 이차유동을 정량적으로 정확히 예측하지 못하며, 또한 벽면전단응력, 축방향 속도, 레이놀즈응력 등 실험적으로 알려진 유동장의 변화를 제대로 예측할 수 없음을 알 수 있다.

4. 결 론

정사각형 형상을 가지는 덕트내의 완전히 발달된 난류유동을 대상으로 하여, 현재 상용코드에 도입된 벽함수를 사용하는 Shih 등[1]의 비선형 $k-\varepsilon$ 난류모델과 Myong-Kasagi[10]의 저레이놀즈수형 비선형 $k-\varepsilon$ 난류모델의 고레이놀즈수형 모델의 예측성능을 정량적으로 상호비교분석을 통해 평가하였다. 본 연구결과,

(1) 축(주유동) 방향으로 1~3개의 셀층만이 요구되는 완전히 발달된 유동을 경제적으로 처리할 수 있는 수치해석방법이 확립되었다.

(2) 본 연구에서 제시한 Myong-Kasagi의 고레이놀즈수형 난류모델은 이차유동에 기인하여 생기는 벽면전단응력, 축방향 속도, 레이놀즈응력 등 실험적으로 알려진 유동장의 변화를 잘 예측하고 있음이 확인되었다. 향후 이 모델을 복잡한 형상을 가지는 이차유동예측을 위해서 실현성을 항상 만족하도록 개량할 필요가 있다.

(3) 상용코드에 도입된 Shih 등의 비선형난류모델은 정성적으로 이차유동을 예측하기는 하나, 정량적인 면에서 MK 모델 및 실험결과에 비해 한차수 이상 작게 예측하여 이차유동에 기인하여

생기는 벽면전단응력, 축방향 속도, 레이놀즈응력 등 실험적으로 알려진 유동장의 변화를 제대로 예측할 수 없음이 명확하게 확인되었다.

(4) 축방향 속도, 단면상의 이차속도, 레이놀즈 응력 등에 대한 등고선 결과를 상세히 제시하여 향후 비선형 난류모델의 개선을 위한 데이터베이스를 구축하였다.

후 기

본 연구는 과학기술부가 지원하는 국책연구개발사업 (공학용해석S/W기술개발사업, 과제번호: M1-0128-00-0002)에 의하여 이루어졌음을 밝히며, 이에 감사드린다.

참고문헌

[1] Shih, T.H., Zhu, J. and Lumley, J.L., "A Realizable Reynolds Stress Algebraic Equation Model," NASA TM-105993, (1993).

[2] Brundrett, E. and Baines, W.D., "The Production and Diffusion of Vorticity in Duct Flow," J. Fluid Mech., Vol.19, (1964), pp.375~394.

[3] Launder, B.E. and Ying, W.M., "Prediction of Flow and Heat Transfer in Ducts of Square Cross Section," Proc. Inst. Mech. Engrs., Vol.187, (1973), pp.455~461.

[4] Melling, A. and Whitelaw, J.H., "Turbulent Flow in a Rectangular Duct," J. Fluid Mech., Vol.78, (1976), pp.289~315.

[5] Demuren, A. O. and Rodi, W., "Calculation of Turbulent Driven Secondary Motion in Non-Circular Ducts," J. Fluid Mech., Vol. 140, (1984), pp. 189~222.

[6] Gessner, F.B., "Corner Flow (Secondary Flow of the Second Kind)," in Kline et al. (eds.), Proc. 1980-1981 AFORS-HTTM Stanford Conf. on Complex Turbulent Flows, Stanford University, (1982).

[7] Myong, H.K. and Kobayashi, T., "Prediction of Three-Dimensional Developing Turbulent Flow in a Square Duct with an Anisotropic Low-Reynolds-Number $k-\varepsilon$ Model," ASME J. Fluids Engineering, Vol.113, (1991), pp.608~615.

[8] STAR-CD, Methodology Manual, Version 3.10, Computational Dynamics Ltd., (1999), pp.2.1~2.14.

[9] 명현국, "비선형 저레이놀즈수 $k-\varepsilon$ 난류모델에 따른 정사각형 덕트내 완전 발달된 난류유동 예측," 대한기계학회에 투고중(2002).

[10] Myong, H.K. and Kasagi, N., "Prediction of Anisotropy of the Near-Wall Turbulence with an Anisotropic Low-Reynolds-Number $k-\varepsilon$ Turbulence Model," ASME J. Fluids Engineering, Vol.112, (1990), pp.521~524.

[11] Craft, T.J., Launder, B.E. and Suga, K., "Development and Application of a Cubic Eddy-Viscosity Model of Turbulence," Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol.17, (1996), pp.108-115.

[12] 명현국, "정렬격자계를 사용하는 3차원 대류열전달 해석프로그램 개발," 기계의 날 선포 및 2002년도 기계관련 연합심포지움 논문집 (대한기계학회편), (2002), pp. 2614~2619.

[13] Gessner, F.B. and Emery, A.F., "The Numerical Prediction of Developing Turbulent Flow in Rectangular Ducts," Trans. ASME. J. Fluids Engineering, Vol.103, (1981), pp.445~455.