

◎ 논문

몽뚝한 물체 주변에 형성된 극초음속유동해석

백 두 성^{*1}

Analytical Solution for Hypersonic Flow on Blunt Bodies

Doo Sung Baik

A Thin-layer Navier-Stokes equations are applied for the hypersonic flow over blunt bodies with applications to laminar as well as turbulent flows. The equations are expressed in the forms of flux-vector splitting and explicit algorithm. The upwind schemes of Steger-Warming and Van Leer are investigated to predict accurately the heating loads along the surface of the body. A mixed scheme has been presented for the differencing the convective terms and the mixed scheme is found to be less dissipative producing accurate solutions.

Key Words: Navier-Stokes, 극초음속, flux vector splitting, Steger-Warming, Van Leer, explicit, shock capturing, 혼합형

1. 서 론

과거 10년 넘게 오일러와 Navier-Stokes 방정식에 관한 폭넓은 진보가 이루어졌으며 충격파에 한 정확한 표출과 점성해의 전체적인 정확도를 증진하는데 강조되어 왔다.

비점성 미분계수를 근사적으로 구하기 위하여 Navier-Stokes 알고리즘은 여러가지 형태로 분류하였다. 이러한 형태 중 가장 흔히 이용하는 방법으로 중앙차분법 혹은 flux vector splitting 이 있다. 물론 이러한 기술은 양해법 또는 음해법 수치해석 공식에 적용될 수 있다. Navier-Stokes 방정식의 초창기의 해법은 비점성 미분계수에 대해 중앙차분을 이용하였다. 1970 중반까지 풀이과정은 양해법이었고 수렴조건으로 CFL이 주어졌다.

CFL은 계산과정 동안 해가 접근될 수 있도록 시간 간격을 결정한다. 이러한 시간 간격은 유동

장에서 가장 작은 격자 간격으로 결정되어야 하기 때문에 Navier-Stokes 계산에 많은 제약 즉 수렴하기 위하여 상당량의 반복계산을 필요로 한다. 특히 높은 레이놀드 수 유동에서는 해에 접근하기가 어려웠다. 1976년 Beam 과 Warming[2]는 "approximate factorization" 혹은 Alternating Direction Implicit" 라 불리는 음해법을 발표했는데 이러한 방법은 이론적으로는 다소 시간 간격의 제약을 해결하였다. 그러나 실질적으로 선형화와 factorization에 의하여 생성되는 오차는 시간 간격에 다소 제약을 준다.

계산과정에서 급초음속과 같은 충격파를 포함하는 유동장은 "shock fitting" 기법을 사용하여 취급되었다. Morett[3]에 의하여 발전된 이러한 방법은 충격파가 계산 영역의 경계층을 형성한다고 생각함으로써 급한 기울기의 영역을 피했다. 1979년에 Steger and Warming[4]은 "flux vector splitting" 기술을 도입하였고 이 기법으로 이러한 급한 기울기를 비교적 쉽게 계산하였다. "shock capturing" 기법은 일련의 충격파를 명확하게 풀 수 있도록 했다. 또 다른 "upwind" 기법이 발전되어 이는 천음속에서 극초음속까지의 다양한 유동장에 적용되었다.

*2003년 5월 19일 접수

*1.정회원, 국민대학교 자동차전통대학원

2. 수치 해석

2.1 지배방정식

유체 운동의 지배 방정식은 질량, 관성, 에너지 보존에 의해 다음과 같이 무차원 형태로 표현된다.

연속방정식 :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\alpha \rho v}{y} = 0 \quad (1)$$

운동량방정식-x :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) + \alpha \frac{\rho uv}{y} \\ &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \alpha \frac{\tau_{xy}}{y} - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu v}{y} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

운동량방정식-y :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(p + \rho u^2) + \alpha \frac{\rho v^2}{y} \\ &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\alpha}{y}(\tau_{yy} - \tau_{\theta\theta}) \\ & - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{Re} \left[\frac{\mu v}{y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu v}{y} \right) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

에너지 방정식 :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho e_t) + \frac{\partial}{\partial x}(p u + \rho e_t u) + \frac{\partial}{\partial y}(p v + \rho e_t v) + \\ & \frac{\alpha}{y}(p v + \rho e_t v) = \frac{\partial}{\partial x}(u \tau_{xx} + v \tau_{xy} - q_x) + \\ & \frac{\partial}{\partial y}(u \tau_{xy} + v \tau_{yy} - q_y) + \frac{\alpha}{y}(u \tau_{xy} + v \tau_{yy} - q_y - \\ & \frac{2}{3} \frac{\mu}{Re} \frac{v^2}{y}) - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu uv}{y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu v^2}{y} \right) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 shear stress term은 다음과 같이 주어진다.

$$\tau_{xx} = \frac{\mu}{Re} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{yy} = \frac{\mu}{Re} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{\mu}{Re} \left[\frac{4}{3} \frac{v}{y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]$$

여기서 열전도 항은 Fourier's의 열전도 법칙에 의거했고 무차원의 형태로 다음과 같이 표현되었다.

$$q_x = \frac{\mu}{RePr(\gamma-1)M_\infty^2} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\mu}{RePr} \frac{\partial e}{\partial x}$$

$$q_y = \frac{\mu}{RePr(\gamma-1)M_\infty^2} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\mu}{RePr} \frac{\partial e}{\partial y}$$

2.2 경계조건

경계조건으로서 다음과 같이 구분하여 해석하였다.

(i) 정체선 경계조건

정체선을 따라 경계를 설정하는 것은 극도로 어렵다. 이러한 어려움은 주로 매트릭스 전환과 관련 있으며, 정체선에 따른 유체의 성질은 zero, first 혹은 2nd order 과정을 통하여 영역의 내부로부터 외삽해서 이루어진다[6].

다른 방법은 정체선을 사용하는 것을 피한다. i=1 에서의 경계는 i=2에서의 밀러 이미지를 이용하여 구한다.

(ii) 자유유동 경계조건

자유유동의 조건은 변화하지 않는다. 따라서 모든 i에 대하여 j=jmax에서 물리적인 특성은 자유유동에서와 같이 구한다.

(iii) 출구 경계조건

외부유동의 경계조건은 유동이 아음속 혹은 초음속인 것에 달려있다. 외부유동이 초음속일 경우 경계조건은 다소 어렵는데 이것은 초음속 유동의 상부유동에서 교란이 일어나 유동장에 영향을 주기 때문이다. 이러한 상황을 해결하는 일

반적인 방법은 하나의 경계조건을 설정하고 내부로부터 나머지를 외삽하는 방법이다. 잘못된 경

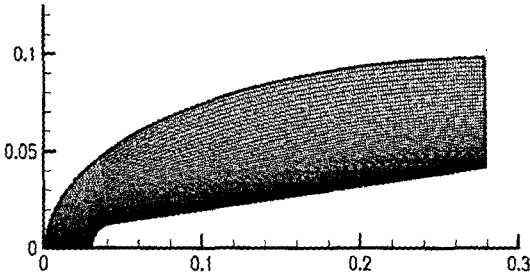


Fig. 1 Grid (250×80, β=1.005)

계조건은 유동장을 역으로 미치게 한다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 초음속인 유동에 외부 경계조건을 설정한다. Fig.1 에서 유동은 원추의 구 부분에서 가속화하기 시작한다. 직선 부분을 따라서 유동은 초음속이고 경계값은 zeroth order extrapolation을 이용하여 내부 (즉 imax-1)에서 외삽해서 구한다.

이러한 경계조건은 유동장의 전반적인 흐름이 초음속인 비점성 흐름에게만 적용된다. 점성유동에서는 벽에 가까운 경계조건의 부분이 아음속이 되고 상기 조건들이 정확하게 적용되지 않는다. 이러한 문제를 제거하기 위하여 외부흐름 경계의 음속부분에 압력을 일정하게 고정하고 그 밖의 값은 같은 방법으로 extrapolate 해서 얻는다.

(iv) 벽에서의 경계조건

에너지 방정식에서 벽의 경계조건은 일반적으로 단일 혹은 등온으로 가정하여 해석한다. 이러한 조건을 처리하는데 중요한 사항은 압력은 경계층 안에서는 일정하다고 가정되었으며, j=2 선상에서의 격자를 아주 조밀하면 j=1 선상에서의 물체 표면과 아주 가깝게 된다. 그래서 j=2 선상에서의 압력은 j=1 선상에서의 압력과 거의 비슷하게 된다.

(a) 단일 벽

만일 벽이 단일되었다면, 열전도가 형성되지 않고 열의 기울기는 벽에서는 0 이다. 이는 $T_{i,1} = T_{i,2}$ 를 의미한다. $P_{i,1}=P_{i,2}$ 이기 때문에 벽에서의 밀도는 완전기체 상태방정식에서 벽 내부에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}$$

(b) 등온 벽

등온 벽에서의 내부에너지는 다음과 같다.

$$e = \frac{T_w}{\gamma(\gamma-1) M_\infty^2}$$

여기서 T_w 는 무차원된 벽면 온도이다.

2.3 Flux 벡터 Splitting 기법

중앙차분 과 가점성을 피하고 파동의 전파와 characteristics의 이론에 입각한 Flux vector splitting 기법을 적용했으며 각 점에서의 flux는 2가지의 요소 즉 (+)와 (-)로 나누어진다.

Steger-Warming는 비점성 Jacobian 매트릭스 $A = \partial \bar{E} / \partial \bar{Q}$ and $B = \partial \bar{E} / \partial \bar{Q}$ 의 eigen 값의 부호에 근거해서 Flux 벡터를 나누었다. 오일러 방정식과 같은 쌍곡형 시스템에 Jacobian은 실수 eigen 값을 갖어야 한다. 이러한 eigen 값은 쌍곡 선 시스템의 특성을 결정해서 정보의 전파방향을 나타내준다. 실수의 eigen 값과 eigen 벡터는 대각선 매트릭스가 될 수 있어서 다음과 같이 표현 될 수 있다.

$$A = X D X^{-1}$$

여기서 D는 대각선 매트릭스인데 이들의 요소는 매트릭스 A의 eigen 값이고 X는 eigen 벡터 매트릭스이다.

2.4 혼합형 기법

혼합형 기법은 중앙차분과 연관된 안정성을 피하면서 upstream 차분에서 파생하는 부정확성을 피하는데 착안하여 유동의 streamwise 방향 (ξ)으로 대류 미분계수에 steger-warming flux vector splitting 방법을 수직방향 (η)으로는 중앙차분법을 적용하였다.

3. 계산 및 고찰

3.1 고정 시간 간격

전진하는 시간 간격은 위치 혹은 반복계산에 따라 고정하거나 변화 시킬 수 있으나 안정성의 조건으로 주어진 CFL 수는 지켜져야 한다. 안정

된 1차원에서의 양해법 알고리즘에 대하여서는 $CFL < 1$ 이 요구된다. 각각의 반복계산에서 고정된 시간간격을 갖기 위하여 시간 간격은 격자에서

있는 근사적인 방법은 Fay 와 Riddell 에 의하여 제공된 극초음속의 정체점에서의 열량에 관한 실험적인 관계에 의한다.

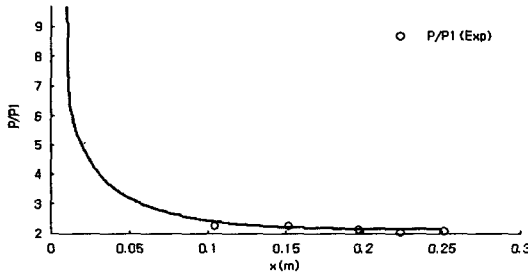


Fig. 2 Pressure (P/P_{∞}) Distribution for Turbulent Flow

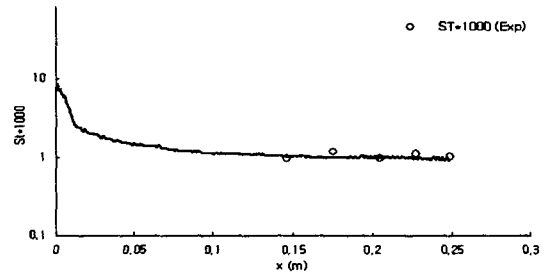


Fig. 3 Stanton No for Laminar Flow

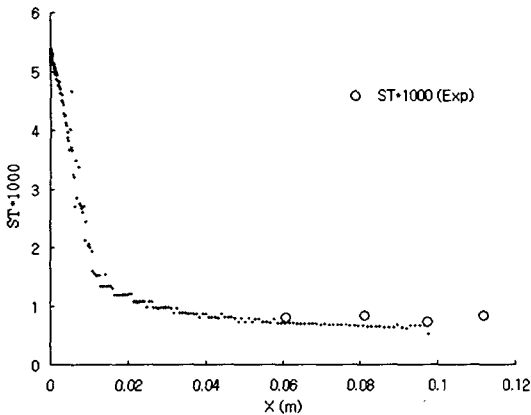


Fig. 4 Stanton No for Turbulent Flow

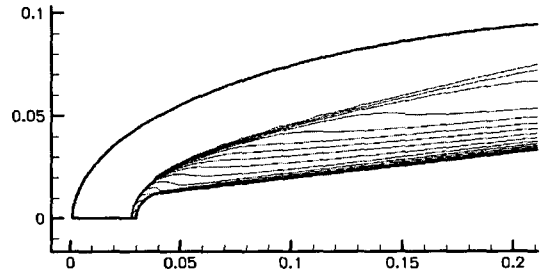


Fig. 5 Mach Contour

최소한의 간격의 시점에서 CFL 조건 즉 $CFL = U_{\max} (\Delta t / \Delta x)$ 을 적용함으로써 얻어진다. 격자가 coarse인 영역에서는 시간 간격이 크게 되고 격자가 조밀한 지역에서는 빨리 진행하도록 하는 것이 바람직하다. 주어진 문제에 있어서 고정된 시간 간격은 $CFL=0.1$ 로 하고 지역 시간 간격을 처음에 $CFL=0.1$ 로 시작하였다가 점성층에서는 CFL을 0.3으로 증가하였다.

3.2 계산결과

극초음속 무딘 물체주위의 유동장에 관한 실험 데이터는 구하기 어려우며 주된 원인으로는 이러한 실험장치에 관한 시설이 용이하지 않기 때문이다. 이러한 연구의 결과가 실험적인 데이터와 근사적인 방법으로 얻은 값과 비교 되었다. 현재까지 Heat flux 예상에 관하여 가장 신빙성

외형은 7° 무딘 콘 모양이고 nose의 반지름은 0.0127m 이다. 외부 자유 유동의 조건은 층류의 경우로서 $M_{\infty} = 8.0$ 이고 대기온도와 압력은 각각 54.44K 와 151.58 N/m² 이고, 난류의 경우로 $M_{\infty} = 8.0$, 대기온도 와 압력은 54.44K 와 569.7 N/m² 이다. 그리고 해당되는 레이놀드수는 각각 미터당 3.23×10^6 와 12.17×10^6 이고 모델의 표면온도는 300K 로 주어졌다. Fig. 1은 형성된 격자를 보여준다.

Fig. 2-4 에서는 Maus 실험결과[6]와 비교한 값을 보여준다. Fig. 2에서 콘의 표면을 따른 압력장의 변화는 레이놀드수의 영향을 크게 받지 않음을 알 수 있었다. Fig. 3과 4에서는 Stanton 수의 변화를 층류 및 난류의 경우에 있어서 실험치와 비교해본 결과 레이놀드수에는 민감하나 전반적으로 비교적 잘 일치됨을 확인할 수 있었다.

Fig. 5는 해당 표면의 마하수의 윤곽을 나타내고 있다.

4. 결론

극초음속 무딘 물체의 유동장을 파악하기 위해서 Thin layer Navier-Stokes 방정식이 적용되었다. 1차보다 2차 order를 Steger-Warming and Van Leer flux 벡터 분리 기술은 상당히 예측을 증진시켰다. 대류 미분계수를 차분하기 위하여 혼합식 방법이 제시되었다. 이러한 방법은 유선 방향으로 flux 벡터 분리를 하고 수직 방향으로는 중앙 차분법을 적용하였다. 이러한 혼합식 방법은 upwind 방법의 2nd order 형태보다 덜 소산 되어서 격자의 간격이 비교적 크더라도 정확한 해에 접근할 수 있다.

여기서 검토된 알고리즘은 격자에 관계되며, 격자의 해상도는 직접적으로 정확한 해에 미친다. 정확하지 못한 격자의 간격은 열량을 부정확하게 예측을 준다. 정확도는 알고리즘의 소산적인 성질에 달려 있다. 그러나 지나치게 작은 격자 간격은 오히려 중앙 차분법에서 볼 수 있듯이 불안정하게 한다. 가점성은 이러한 불안정성을 제거해주었다.

참고문헌

- [1] Fay., J. A. and Riddell, F. R., "Theory of Stagnation Point Heat Transfer in Dissociated Air," Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 25, No. 2, Feb. 1958, p.73.
- [2] Beaming, R. M. and Warming, R. F., "An Implicit Finite Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation Law form," J. of Computational Physics, Vol. 22, 1976, p.81-110.
- [3] Moretti, G., "Three Dimensional Supersonic Steady Flow With Any Number of Imbedded Shocks," AIAA Paper No. 74-10, 1974.
- [4] Steger J. L. and Warming, "Flux Vector Splitting of the Inviscid Gas Dynamics Equations With Application to Finite Difference Methods," NASA TM-78605, 1979.
- [5] Steger J. L. and Warming, R. F., "Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite difference Method," J. of Comp. Physics,
- [6] Maus, J. R., 1984, "Comparison of PNS Code Results with AEDC Tunnel B Data for Blunt Cone and Viconic," Workshop on the Development and Application of the AFWAL PNS Code," Dayton, Ohio.