信賴性應用硏究
제3권, 제1호, pp. 83-92, 2003

불확실성 측도에 따른 수명분포의 분류

남 경 현

경기대학교 경제학부

Classifications of Life Distributions Based on Uncertainty Measures

Kyung Hyun Nam

Division of Economics, Kyonggi University

Abstract

We studied the trend change of failure rate function and uncertainty of residual life function in terms of location of their trend change points. It is shown that the trend change of uncertainty of residual life takes place before the failure rate changes its trend. Like DIFR(IDFR) does not necessary implies IDMRL(DIMRL), we find the fact that DIFR(IDFR) does not always imply IDURL(DIURL) under certain conditions, through the exponentiated-weibull distribution.

1. 서론

신뢰성을 연구할 때 안정된 신뢰성을 유지하기 위한 최적의 유지 보수 정책을 세우고 시스템의 수명을 모형화 하는데 있어서 노화의 개념은 매우 중요한 역할을 하고 있으며 부품이나 장비의 노화 과정에 대한 모형설정은 신뢰도 함수, 고장률 함수, 평균 잔여 수명 함수들에 의해서 이루어져 왔다. 이러한 모형연구는 역소진 분석, 유지 보수 정책 또는 단순히 시스템의 수명을 모형 화 하는데 아주 유용하다. 수명 분포들은 노화의 서술에 따라 여러 가지로 분류할 수 있는데, 형태 모수가 1보다 큰 감마 분포와 와이블 분포 등은 시간이 지날수록 성능이 약화되며, 형태 모수가 0과 1사이에 있는 감마 분포와 와이블 분포는 시간이 지날수록 성능이 좋아진다. 이러한 단조 증가 혹은 단조 감소 형태의 분포 이외에 고장률과 평균 잔여 수명 등이 증가하다가 감소하거나, 혹은 감소하다가 증가하는 등의 경향 변동을 보여주고 있는 분포들이 많은 연구자들로부터 관심을 끌고 있다. 한편, 시스템의 신뢰성을 연구하는 공학자들은 부품이나 장비의 수명이 불확실할 때에 신뢰도가 떨어진다는 점을 고려하여 부품 수명의 불확실성 측도를 규명하기 위하여 많은 노력을 기울이고 있다.

이 논문에서는 Shannon(1948)이 정의한 정보측도와 고장률을 사용하여 부품의 수명 T에 대한 불확실성 측도를 소개하고 불확실성 잔여 수명 함수를 정의하고 이를 모형에 적용하여 각 모수들의 변화에 따른 경향변동을 고장률 함수와 불확실성 잔여 수명 함수에 따라 살펴보고 변동 점의 상호 위치 관계를 파악하고자 한다.

2. 불확실성측도

이 장에서는 부품이나 시스템의 노화에 따르는 성능의 변화를 정량적으로 측정 할 수 있는 불확실성 측도를 정의하고 이러한 함수가 시스템의 가동시간 t의 증가에 따라서 어떻게 변화하는지에 대한 성질들을 알아본다. 시스템의 성능을 가동시간 t의 함수로 간주하였을 때 시스템의 수명을 통계적으로 나타내는 수명 분포들의 분류에 이러한 함수를 이용할 수 있으며, 또한 시스템의 주어진 임무 수행 능력이 좋아지는지 또는 악화되는지에 대한 분석이 가능하리라 본다.

시간 T를 부품이나 시스템의 수명 또는 고장 시간을 나타내는 연속 확률 변수라 하고, 수명의 분포 함수를 $F(t)=P(T\le t)$라 하자. 여기서 $t\le 0$일 때 $F(t)=0$이며, $F(t)$를 누적 분포 함수 또는 불 신뢰도 함수라고도 한다. 신뢰도함수 $R(t)=P(T>t)=1-F(t)$로 정의한다. 또한 확률 밀도 함수를 $f(t)$로 표시하기로 하자. 수명이 사용횟수나 사이클 등의 이산 확률 변수에 의하여 측정되는 것도 가능하나 이 논문에서는 수명이 연속 확률 변수인 경우만을 고려한다.

확률 밀도 함수가 f(t)이고 불 신뢰도 함수가 F(t)일 때 불확실성 측도는

$$H(f) = -\int_0^\infty f(x)\log f(x)\,dx = -E(\log(f(T)))$$

와 같이 정의된다. Shannon과 Weiner는 H(f)를 정보측도라고도 한다. H(f)는 확률의 집중도를 측정하는데 Low 엔트로피 분포는 더욱 집중되어서 High 엔트로피 분포보다 더욱 정보를 많이 줌을 알 수 있다.

신뢰성 분야나 수명 분포들에서는 부품이나 시스템의 현재 연령에 대한 정보가 고려의 대상이므로 불확실성에 대한 측도에 있어서도 시간 t를 고려해야 하므로 보다 현실적인 접근 방법으로 시간 t에 있어서 부품의 수명에 대한 불확실성 측도를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} H(f,t) &= -\int_t^\infty \frac{f(x)}{R(t)}\log\frac{f(x)}{R(t)}\,dx \\ &= -\frac{1}{R(t)}\int_t^\infty f(x)\log f(x)dx + \log R(t) \\ &= 1 - \frac{1}{R(t)}\int_t^\infty (\log\lambda(x))f(x)dx \end{aligned}$$

여기에서 $\lambda(t) = \dfrac{f(t)}{R(t)}$ 인 고장률 함수를 나타낸다.

부품이나 시스템이 시점 t까지 가동하고 있다면 $H(f,t)$는 T>t라는 조건하에서 T-t의 조건부 확률 밀도함수에 포함되어 있는 기대 불확실성 정도를 측정할 수 있으며 다음과 같은 정의를 이용한다.

정의 1 만약 불확실성 측도 $H(f,t)$가 음이 아닌 모든 t에서 감소(증가)할 때 그 수명분포는 감소(증가) 불확실성 잔여 수명을 갖는다고 하며 DURL(IURL)로 표기한다.

위의 사실로부터 우리는 다음과 같은 몇 가지 사실을 확인할 수 있다. 만약 $L(f,t)\geq 0$ ($L(f,t)\leq 0$)이면 DURL(IURL)이다. 여기서 $L(f,t) = -H'(f,t)$이다. 만약 수명분포가 DURL이면서 동시에 IURL이라면

$$R(t)\log\lambda(t) - \int_t^\infty f(x)\log\lambda(x)dx = 0$$

따라서, $\lambda'(t) = 0$. 즉, $\lambda(t) = \lambda$이며 $R(t) = \exp(-\lambda t)$인 지수 분포를 갖는다는 사실을 알

게 된다. 이것은 지수분포의 고장률 함수가 상수인 것처럼 지수 분포의 불확실성 측도도 상수로서 지수 분포가 DURL이면서 동시에 IURL인 유일한 분포라는 것을 의미한다. 또, 만약 고장률 함수가 증가(감소)한다면 즉, IFR(DFR)이면 그 수명분포는 역시 DURL(IURL)이다.

정의 2. 어떤 시점 t_0에 대하여

$$\begin{cases} H'(f,t)<0 \ \ (>0), & t<t_0 \\ H'(f,t_0)=0 & \\ H'(f,t)>0 \ \ (<0), & t>t_0 \end{cases}$$

의 조건을 만족할 때 분포함수는 욕조형(역욕조형) 불확실성 잔여 수명 함수를 갖는다고 한다. 여기서 욕조형 불확실성 잔여 수명 함수를 DIURL, 역욕조형 불확실성 잔여 수명 함수를 IDURL로 나타낸다.

3. Exponentiated-Weibull 분포

Mudholkar 와 Srivastava(1993)는 세 개의 모수를 가지고 있는 와이블 분포의 일반 형으로 알려져 있는 분포를 소개하였는데 이 분포에 따른 고장률 함수는 욕조 형이나 역 욕조 형 뿐 만 아니라 다양한 형태의 단조 형 고장률 함수를 포함하고 있으며 이 분포는 다음과 같이 정의된다.

$$F(t)=\ 1-\exp[-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\alpha}]^{\theta} \qquad , t\geq 0$$

이 분포의 고장률함수 $\lambda(t)$와 불확실성 잔여 수명함수 $H(f,t)$는 다음과 같이 구해진다.

$$\lambda(t)=\frac{\alpha\theta\left\{\ 1-\exp[-\left(\frac{t}{\sigma}\right)]^{\alpha}\right\}^{\theta-1}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\alpha-1}}{\sigma\exp[\ \frac{t}{\sigma}\ ^{\alpha}]\left\{1-[\ \ 1-\exp[-\left(\frac{t}{\sigma}\right)]^{\alpha}]^{\theta}\right\}},\ t\geq 0$$

$$H(f,t)=1-\frac{1}{\left\{1-[\ \ 1-\exp[-\left(\frac{t}{\sigma}\right)]^{\alpha}]^{\theta}\right\}}$$

$$\int_t^{\infty} \log \frac{\alpha\theta \left\{ 1-\exp[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)]^{\alpha} \right\}^{\theta-1} \left(\frac{x}{\sigma} \right)^{\alpha-1}}{\sigma \exp[\frac{x}{\sigma}{}^{\alpha}] \left\{ 1-[\ 1-\exp[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)]^{\alpha}]^{\theta} \right\}} \frac{\alpha\theta \left\{ 1-\exp[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)]^{\alpha} \right\}^{\theta-1} \left(\frac{x}{\sigma} \right)^{\alpha-1}}{\sigma \exp\ (\frac{x}{\sigma})^{\alpha}} dx,\ t \geq 0$$

다음 표에서처럼 이 분포는 다양한 α, θ 값에 따라 IDFR, DIFR, IFR, DFR이 됨을 알 수 있다.

<표1> 모수에 따른 분포의 고장률 형태

α	θ	고장률 형태
1	1	상수형(지수분포)
	1	단조형(와이블)
<1	<1	DFR
>1	>1	IFR
>1	<1	DIFR 혹은 증가
<1	>1	IDFR 혹은 감소

본 논문에서는 고장률함수의 경향이 바뀌는 경우인 욕조형 고장률 ($\alpha>1, \theta<1$)과 역욕조형 고장률 ($\alpha<1, \theta>1$)인 경우만 고려하였다. DIFR(IDFR)이 항상 IDMRL(DIMRL)이 되지 않는 것처럼 DIFR(IDFR)도 항상 IDURL(DIURL)이 되지 않음을 알 수 있다.

3. 1 $\alpha>1, \theta<1$인 경우

이 경우의 고장률함수는 욕조형이거나 t에 따라서 고장률이 증가하는 경우이다. 고정된 값 α에 대하여 1보다 작은 θ^*_1와 θ^*_2를 각각 고장률함수와 불확실성 잔여 수명함수의 단조성이 바뀌는 값이라 하자. 즉, $\theta<\theta^*_1$에서 DIFR이고 $\theta<\theta^*_2$에서 IDURL이며 그 밖의 경우에는 IFR과 DURL이다. 여기에서 θ^*_1와 θ^*_2는 계산된 근사값이다.

<표2> $\lambda(t)$ 와 $H(f,t)$의 단조성이 바뀌는 θ값

α	θ_1^*	θ_2^*
1.5	0.6666	0.6345
2	0.4999	0.4772
3	0.3333	0.309
4	0.2499	0.211
5	0.2	0.169
6	0.166	0.135
7	0.140	0.112
8	0.122	0.092

<표2>에서 보면 α가 증가할수록 θ_1^*와 θ_2^*의 값들은 감소함을 볼 수 있다. 또한 고장률함수의 θ_1^*값은 항상 불확실성 잔여 수명함수의 θ_2^*값보다 크다는 것을 알 수 있다.

<표3> $\lambda(t)$와 $H(f,t)$의 변동점 ($\alpha>1, \theta<1$)

α	θ	$\lambda(t)$의 변동점 (백분위수)	$H(f,t)$의 변동점 (백분위수)	분류
1.5	0.2	0.7256(0.8565)	0.4266(0.7537)	DIFR(IDURL)
	0.4	0.4549(0.5872)	0.1981(0.3720)	DIFR(IDURL)
	0.6	0.1179(0.1443)	0.0070(0.0115)	DIFR(IDURL)
	0.65	0.0282(0.0301)	0(0)	DIFR(DURL)
	0.7	0(0)	0(0)	IFR(DURL)
	0.9	0(0)	0(0)	IFR(DURL)
2.0	0.2	0.4034(0.6844)	0.1795(0.5015)	DIFR(IDURL)
	0.3	0.2904(0.4702)	0.0921(0.2388)	DIFR(IDURL)
	0.4	0.1604(0.2302)	0.0189(0.0475)	DIFR(IDURL)
	0.49	0.0190(0.0205)	0(0)	DIFR(DURL)
	0.5	0(0)	0(0)	IFR(DURL)
	0.8	0(0)	0(0)	IFR(DURL)
4.0	0.1	0.2969(0.6067)	0.1026(0.4022)	DIFR(IDURL)
	0.2	0.1343(0.2007)	0.0006(0.0028)	DIFR(IDURL)
	0.24	0.0350(0.0400)	0(0)	DIFR(DURL)
	0.3	0(0)	0(0)	IFR(DURL)
	0.4	0(0)	0(0)	IFR(DURL)

위의 <표3>으로부터 고정된 α값에 대하여 θ가 증가함에 따라 $\lambda(t)$와 $H(f,t)$의 변동점이나 그에 따르는 백분위수 값들이 감소함을 알 수 있다. 마찬가지로 고정된 값 θ에 대하여 α가 증가함에 따라 $\lambda(t)$와 $H(f,t)$의 변동점이나 그에 따르는 백분위수 값들이 역시 감소하고 있다.

($\alpha=1.5, \theta=0.65$) ($\alpha=2.0, \theta=0.49$) ($\alpha=4.0, \theta=0.24$)의 경우에 고장률함수는 경향변동을 보이고 있으나 불확실성 잔여 수명 함수는 경향변동을 나타내고 있지 않다. 이로써 DIFR이라고 해서 항상 IDURL 성질을 가지고 있지 않음을 알 수 있다.

3.2 $\alpha\langle 1, \theta\rangle 1$인 경우

이 경우의 고장률 함수는 역욕조형이거나 t에 따라서 고장률이 감소하는 경우이다. 고정된 값 θ에 대하여 1보다 작은 α^*_1와 α^*_2를 각각 고장률함수와 불확실성 잔여 수명함수의 단조성이 바뀌는 값이라 하자. 여기에서 α^*_1와 α^*_2는 계산된 근사값이며 σ는 계산의 편의를 위하여 1로 고정하였다.

<표4> $\lambda(t)$ 와 $H(f,t)$의 단조성이 바뀌는 α값

θ	α^*_1	α^*_2
1.5	0.6666	0.681
2	0.5003	0.514
3	0.334	0.354
4	0.252	0.277
5	0.202	0.232
6	0.161	0.197
7	0.143	0.176
8	0.127	0.162

위의 <표4>로부터 θ가 증가할수록 α^*_1와 α^*_2의 값들은 감소함을 알 수 있으며, α^*_1값은 항상 α^*_2값보다 작다.

다음 <표5>에는 다양한 α와 θ값에 따른 DIFR과 IDURL의 경향변동점이 백분위수와 함께 주어져있다. 아래의 <표5>를 보면, 고정된 θ값에서 α가 증가함에 따라 $\lambda(t)$와 $H(f,t)$의 변동점과 그에 따르는 백분위수 값들이 감소함을 알 수 있다. 한편, 고정된 α에 따라 θ가 증가하면서 $\lambda(t)$와 $H(f,t)$의 변동점이나 그에 따르는 백분위수 값들이 증가하고 있다. $\alpha>1$ 이고 $\theta<1$인 경우처럼 $\alpha<1$이고 $\theta>1$의 경우에도 IDFR의 경향변동 성질이 DIURL에서도 이루어지지 않고 있음을 알 수 있다. $(\alpha=0.67, \theta=1.5)$, $(\alpha=0.51, \theta=2.0)$, $(\alpha=0.26, \theta=4.0)$의 경우에 고장률 함수는 그 경향변동을 보이고 있으나 불확실성 잔여수명함수의 경우에는 그렇지 않음을 알 수 있다.

<표5> $\lambda(t)$와 $H(f,t)$의 변동점 ($\alpha<1, \theta>1$)

α	θ	$\lambda(t)$의 변동점 (백분위수)	$H(f,t)$의 변동점 (백분위수)	분류
0.99	1.5	4.8629(0.9875)	4.1968(0.9761)	IDFR(DIURL)
0.90		1.6794(0.7115)	1.0495(0.5218)	IDFR(DIURL)
0.80		0.4837(0.2804)	0.1334(0.0769)	IDFR(DIURL)
0.67		0.0005(0.0005)	0(0)	IDFR(IURL)
0.60		0(0)	0(0)	DFR(IURL)
0.40		0(0)	0(0)	DFR(IURL)
0.99	2.0	5.7361(0.9929)	5.0630(0.9863)	IDFR(DIURL)
0.90		2.8485(0.8521)	2.1036(0.7364)	IDFR(DIURL)
0.80		1.6036(0.5891)	0.8938(0.3590)	IDFR(DIURL)
0.60		0.1490(0.0765)	0.0051(0.0017)	IDFR(DIURL)
0.51		0.0008(0.0007)	0(0)	IDFR(IURL)
0.50		0(0)	0(0)	DFR(IURL)
0.40		0(0)	0(0)	DFR(IURL)
0.99	4.0	7.0772(0.9961)	6.3964(0.9925)	IDFR(DIURL)
0.90		4.7038(0.9307)	3.8739(0.8710)	IDFR(DIURL)
0.50		1.4385(0.2382)	0.3665(0.0421)	IDFR(DIURL)
0.26		0.000022(0.000015)	0(0)	IDFR(IURL)
0.20		0(0)	0(0)	DFR(IURL)

4. 결론

불확실성 잔여 수명 함수의 경향 변동 점과 고장률 함수의 경향 변동 점을 구하여 그들의 백분위수(percentile)을 비교해 본 결과 전체적으로 고장률 함수의 경향변동점이 불확실성 잔여 수명 함수의 경향변동점보다 후에 나타남을 알 수 있었다. 또한 모형의 모수의 값들에 따른 경향 변동점의 위치를 파악해 본 결과 θ가 증가함에 따라 $\alpha>1$ 이고 $\theta<1$ 인 경우의 경향 변동 점은 고장률 함수나 불확실성 잔여 수명 함수 두 경우 모두 미리 발생하였고, $\alpha<1$ 이고 $\theta>1$인 경우에는 경향 변동점이 후에 위치하고 있음을 알 수 있다. θ를 고정하고 α값의 변화에 따른 경향 변동점의 위치 변화는 $\alpha>1$ 이고 $\theta<1$ 인 경우에는 두 함수 모두 미리 발생하였고 $\alpha<1$ 이고 $\theta>1$ 인 경우에는 α 의 값이 작아짐에 따라 두 경우 모두 앞서서 발생하였다.

본 연구로부터 발견한 사실을 고장률 함수 뿐만이 아니라 평균 잔여수명 함수와 비교 연구함으로써 고장률 함수, 평균 잔여수명 함수, 불확실성 잔여 수명 함수들의 경향 변동들을 비교하고 이를 다른 DIFR모형들에 적용한다면 경향 변동 점 연구에 도움이 되는 여러 중요한 사실들을 도출해 낼 수 있을 것이다.

참고문헌

[1] Nam, K. H. and Park, D. H. (1995), Study on Trend Changes for Certain Parametric Families,품질경영학회지, 23, 3, 93-101.

[2] Aarset, M. V. (1987), How to Identify a Bathtub Hazard Rate, *IEEE Transactions on Reliability*, 36, 106-108.

[3] Ebrahimi, N.(1996), How to Measure Uncertainty in the Residual Life Time distribution, *Sankhya; The Indian Journal of Statistics*, 58.A, 48-56.

[4] Glaser, R. E. (1980), Bathtub and Related Failure Rate Characterizations, *Journal of the American Statistical Association*, 75, 667-672.

[5] Loader (1991),Inference for a Hazard Rate Change Point, *Biometrika*, 78, 749-757.

[6] Mudholkar, G.S. and Srivastava, D.K. (1993), Exponentiated-Weibull Family for Analysing Bathtub-Failure Rate Data, *IEEE Transactions on Reliability*,42,299-302.

[7] Park, D. H.(1988),Testing Whether Failure Rate Changes its Trend, *IEEE transactions on Reliability*, 37, 375-378.

[8] Shannon, C. E.(1948), A Mathematical Theory of Communication, *Bell Systems Technical Journal*, 279-423 and 623-656.

[9] Wiener, N.(1948), Cybernetics, New York, John Wiley.