

# 말단질량을 갖는 외팔 송수관의 고유치 분기와 플러터 모드

## Eigenvalue Branches and Flutter Modes of a Cantilevered Pipe Conveying Fluid and Having a Tip Mass

류 봉 조<sup>†</sup> · 류 시 응\* · 이 중 원\*\*

B. J. Ryu, S. U. Ryu and J. W. Lee

(2003년 10월 28일 접수 : 2003년 11월 25일 심사완료)

**Key Words** : Tip Mass(끝단질량), Pipe Conveying Fluid (유체 이송 송수관), Quasi Mode(준 모드), Eigenvalue Branch(고유치 분기), Flutter(플러터)

### ABSTRACT

The paper describes the relationship between the eigenvalue branches and the corresponding flutter modes of cantilevered pipes with a tip mass conveying fluid. Governing equations of motion are derived by extended Hamilton's principle, and the numerical scheme using finite element method is applied to obtain the discretized equations. The flutter configurations of the pipes at the critical flow velocities are drawn graphically at every twelfth period to define the order of quasi-mode of flutter configuration. The critical mass ratios, at which the transference of the eigenvalue branches related to flutter takes place, are definitely determined. Also, in the case of having internal damping, the critical tip mass ratios, at which the consistency between eigenvalue braches and quasi-modes occurs, are thoroughly obtained.

### 1. 서 론

내부 유동유체가 흐르는 송수관의 동역학 및 진동에 관한 이론과 실험에 의한 최초 연구는 Benjamin<sup>(1-2)</sup>에 의해 이루어졌는데 그는 2자유도 분절된 송수관의 동적안정성에 관한 연구에 초점을 맞추었다. Gregory와 Paidoussis<sup>(3-4)</sup>는 유체가 흐르는 연속체 외팔 송수관의 진동에 대해 이론 및 실험적 연구를 병행하였다. 그 후, 부가질량이나 스프링 지지된 송수관의 동적안정성과 진동에 관한 많은 연구들이 이루어졌다. Hill과 Swanson<sup>(5)</sup>은 내부 유동유체가

흐르는 송수관의 동적안정성에 미치는 부가질량의 영향에 대해 조사하였고, Sugiyama와 그의 공동연구자들<sup>(6)</sup>은 탄성 스프링 지지된 유체 유동 송수관의 동적안정성에 관한 연구를 행하였다. 또한, Sugiyama와 그의 공동연구자들<sup>(7)</sup>은 송수관의 안정성에 미치는 부가질량과 감쇠의 복합효과에 대해 연구하였다. 국내의 연구로서도 외팔 수직 파이프의 동적안정성과 진동제어에 대한 이론 및 실험적 연구가 이루어져 왔다.<sup>(8)</sup> 최근 Paidoussis<sup>(9)</sup>는 그의 저서를 통하여, 내부 유동 유체가 흐르는 송수관의 진동과 안정성에 대한 많은 연구자들의 연구내용과 자신의 연구내용을 종합하여 기본적인 송수관의 동역학을 정립하였다.

그러나, 내부유동유체에 의한 송수관의 진동 및 동적안정성 연구를 하는데 있어, 불안정 모드와 이에 상응하는 고유치 분기 사이의 관계에 혼란스런 논의가 때때로 있어왔다. 이러한 혼란스런 논의는

† 책임저자 : 정희원, 한밭대학교 기계공학부  
E-mail : bjryu701@hanbat.ac.kr  
Tel : (042) 821-1159, Fax : (042) 821-1587  
\* 한밭대학교 생산융합기술연구소  
\*\* 정희원, 충남대학교 대학원 기계공학과

Paidoussis<sup>(9)</sup>의 저서에 나타나 있는 소위 “모드변화(mode exchange)”라는 것이 몇몇 종류의 비 보존계에서 일어난다는 사실로부터 기인된다. 내부 유동유체에 의한 송수관의 동역학에 있어 “모드변화”는 Gregory와 Paidoussis<sup>(3)</sup>에 의해 처음 발견되었고, 그 후, 몇몇 연구자들에 의해서도 발견되어졌다. 여기서, “모드변화”라고 하는 것은 “고유치 충돌(collision of eigenvalues)”의 결과로 일어날 수 있는데 이러한 고유치 충돌에 대한 수학적 기술은 Seyranian<sup>(11)</sup>에 의하여 논의되어져 왔다. 한편, 내부유동유체에 의한 외팔 송수관의 근 궤적(root locus)과 플러터 모드 형상 사이의 완전한 관계는 Paidoussis<sup>(9)</sup>의 저서에 잘 설명되어 있고, “모드 변화”와 “모드 수(mode number)”에 대해서는 비보존계에 있어 감쇠의 불안정화 영향과 더불어 Semler와 그의 공동연구자들<sup>(12)</sup>에 의해 논의되어왔다.

그러나, 이들의 주된 관심은 감쇠의 불안정화 영향에 대한 설명이었는데 즉, 안정성의 임계에 관한 것이었고 어떤 진동 모드들에 대해서도 보여진 것이 없었다.

따라서 본 논문의 목적은 부가질량을 갖고 내부 유동유체에 의한 외팔 송수관의 고유치 천이와 이에 상응하는 불안정 모드들에 대해 조사하고 특히 불안정 모드와 이에 상응하는 고유치분기와의 관계가 일반적인 동역학 계와는 달리 반드시 일치하지 않는다는 것을 보여주는 것이다.

## 2. 이론 해석

### 2.1 수학적 모델

Fig. 1은 전체길이가  $L$  이고 자유단에 집중질량  $M$ 을 가진 외팔 송수관의 수학적 모델을 보여준다. Fig. 1에서  $EI$ 는 송수관의 굽힘 강성이고,  $V$ 는 유속을 나타낸다.

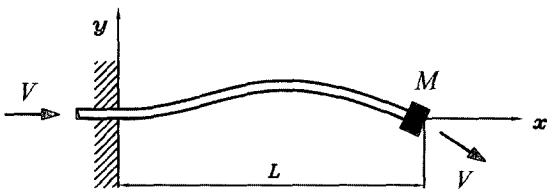


Fig. 1 Mathematical model of a cantilevered pipe conveying fluid with a tip mass

### 2.2 운동 지배방정식

Fig. 1 모델에 대한 운동 지배방정식을 얻기 위해 확장된 해밀톤 원리를 이용하면 다음과 같다.

$$\delta \int_0^t (T + W_c - U) dt + \int_0^t (\delta W_{id} + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (1)$$

여기서  $T$ 는 운동에너지,  $W_c$ 는 유체력의 보존 성분에 의한 일,  $U$ 는 탄성포텐셜에너지  $\delta W_{id}$ 는 내부감쇠에 의한 가상일, 그리고  $\delta W_{nc}$ 는 비 보존성분에 의한 가상 일을 나타낸다.

$$T = \int_0^L \left[ \frac{m_p}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{m_f}{2} \left\{ V^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial t} + V \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\} \right] dx + \left[ \frac{M}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right]_{x=L} \quad (2)$$

$$W_c = \int_0^L \frac{m_f V^2}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3)$$

$$U = \int_0^L \frac{EI}{2} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4)$$

$$\delta W_{id} = - \int_0^L E^* I \left( \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx \quad (5)$$

$$\delta W_{nc} = -m_f V \left[ \frac{\partial y}{\partial t} + V \frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=L} \delta y \quad (6)$$

식 (2)부터 식 (6)까지에 있어,  $m_p$ 와  $m_f$ 는 각각 송수관과 유동유체의 단위길이 당 질량을 의미하고,  $E^*$ 는 내부재질 감쇠계수를 표시한다. 이제 식 (2)에서 식 (6)을 식 (1)에 대입하면 다음과 같다.

$$\int_0^t \int_0^L \left[ \{m_p + m_f\} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \delta \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + m_f V \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \delta \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) - E^* I \left( \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m_f V \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \delta \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) - EI \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right] dx dt + \int_0^t \left[ M \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \delta \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) - m_f V \left\{ \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + V \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right\}_{x=L} \delta y \right] dt = 0 \quad (7)$$

계산상의 편리를 위해 다음과 같은 무차원화된 좌

표와 파라미터들을 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \eta = \frac{y}{L}, \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_f + m_p}}, \mu = \frac{M}{(m_f + m_p)L},$$

$$\beta = \frac{m_f}{m_f + m_p}, \gamma = \frac{E^*}{EL^2} \sqrt{\frac{EI}{m_f + m_p}}, u = VL \sqrt{\frac{m_f}{EI}} \quad (8)$$

식 (8)의 무차원 파라미터들과 좌표들을 식 (7)에 대입하면 식 (9)와 같이 된다.

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 \left[ \eta_\tau \delta \eta_\tau + \beta^2 u (\eta_\tau \delta \eta_\xi + \eta_\xi \delta \eta_\tau) + u^2 \eta_\xi \delta \eta_\xi - \eta_{\xi\xi} \delta \eta_{\xi\xi} - \gamma \eta_{\xi\xi\tau} \delta \eta_{\xi\xi} \right] d\xi d\tau$$

$$+ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ \mu \eta_\tau \delta \eta_\tau - \beta^2 u \eta_\tau \delta \eta_\tau - u^2 \eta_\xi \delta \eta_\xi \right]_{\xi=1} d\tau = 0 \quad (9)$$

### 2.3 유한요소법의 적용

식 (9)의 무차원화된 지배방정식으로부터 수치 해를 얻기 위해 유한요소법을 이용하였으며, 외팔 송수관을 N개의 균일한 요소로 분할한 그림은 Fig. 2와 같다.

Fig. 2에서 국부좌표 ( $\zeta = N\xi - i + 1; 0 \leq \zeta \leq 1$ )를 식 (9)에 대입하면 다음과 같은 이산화된 방정식을 얻게 된다.

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left\{ \eta_\tau^{(i)} \delta \eta_\tau^{(i)} + \beta^2 u N (\eta_\tau^{(i)} \delta \eta_\zeta^{(i)} + \eta_\zeta^{(i)} \delta \eta_\tau^{(i)}) + u^2 N^2 \eta_\zeta^{(i)} \delta \eta_\zeta^{(i)} - N^4 \eta_{\zeta\zeta}^{(i)} \delta \eta_{\zeta\zeta}^{(i)} - \gamma N^4 \eta_{\zeta\zeta\tau}^{(i)} \delta \eta_{\zeta\zeta}^{(i)} \right\} d\zeta + \left\{ \mu \eta_\tau^{(i)} \delta \eta_\tau^{(i)} - \beta^2 u N \eta_\tau^{(i)} \delta \eta_\tau^{(i)} - u^2 N^2 \eta_\zeta^{(i)} \delta \eta_\zeta^{(i)} \right\}_{\zeta=1} \right] d\tau = 0 \quad (10)$$

한편, 변위함수 ( $\eta^{(i)}(\zeta, \tau) = \mathbf{e}^{(i)}(\zeta) \cdot \mathbf{v}^{(i)}(\tau)$ )를 도입하고, 이를 식 (10)에 대입하면 다음과 같은 방

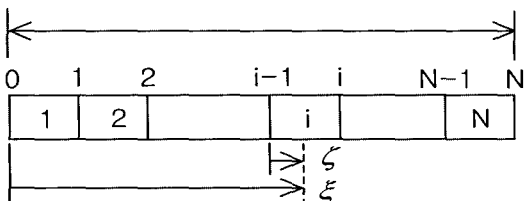


Fig. 2 Finite element model of the pipe

정식을 얻게 된다.

$$[\mathbf{M}]\{\dot{\mathbf{v}}_\tau\} + [\mathbf{C}]\{\mathbf{v}_\tau\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{v}\} = \mathbf{0} \quad (11)$$

### 2.4 고유치 문제

식 (11)에 있어 벡터  $\{\mathbf{v}(\tau)\}$ 는 식 (12)와 같고,

$$\{\mathbf{v}(\tau)\} = \{\mathbf{x}\} \exp(\lambda \tau) \quad (12)$$

식 (11)은 식(13)의 표준 고유치문제로 귀착된다.

$$\{\dot{\mathbf{z}}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{z}\} \quad (13)$$

여기서

$$\{\mathbf{z}\} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{v}\} \\ \{\mathbf{w}\} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}] & -[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{C}] \end{bmatrix}$$

이다. 여기서,  $\{\mathbf{w}\}$ 는  $\{\partial \mathbf{v} / \partial \tau\}$ 를 의미한다.

계의 안정성 판별은 특성근 ( $\lambda = \sigma \pm i\omega$ )의 실수 부분인  $\sigma$ 의 부호에 의해 판별된다. 즉  $\sigma > 0$ 일 때 계는 불안정하게 되고,  $\sigma < 0$ 일 때 안정하게 된다. 따라서,  $\sigma = 0$ 일 때 계의 안정과 불안정의 경계가 되는 임계조건으로 이때의 유속이 임계유속( $u_{cr}$ )이 된다.

### 2.5 모드 형상

플러터가 발생하는 임계유속( $u_{cr} = u_*$ )에서 고유 벡터  $\{\mathbf{x}\}$ 에 의해서  $\{\mathbf{v}(\tau)\}$ 를 계산하면 각 모드에 대한 모드형상을 얻을 수 있다.

$$\{\mathbf{v}(\tau)\} = \{\mathbf{x}_i\} \cos(\omega_i \tau + \phi_i) \quad (14)$$

여기서 위상 각  $\phi_i$ 는 다음과 같다.

$$\tan \phi_i = \text{Im}\{\mathbf{x}_i\} / \text{Re}\{\mathbf{x}_i\} \quad (15)$$

## 3. 해석결과와 고찰

### 3.1 고유치 분기

자유단에서 집중질량을 갖고 내부유동유체에 의한 흐름이 있는 송수관의 안정성 및 진동에 대한 수치해석 결과는 유한요소법을 이용해 얻었다.

Fig. 3은 질량 파라미터  $\beta$ 가 0.366일때의 고유치 곡선을 나타낸다. 2차 고유치 분기에서 가장 먼저 허수 축을 가로질러 플러터가 발생한다. 이때의 임계유속 값은  $u_{cr}$ 은 6.35이다. Fig. 4는  $\beta$ 가 0.367일 때의 고유치 곡선을 나타낸다. 이 그림에서 3차 고유치 분기에서 가장 먼저 허수 축을 가로질러 플러터가 발생

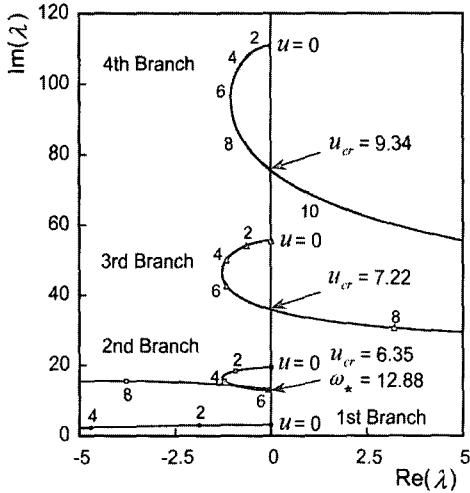


Fig. 3 Argand diagrams of the four lowest eigenvalues of the cantilevered pipes conveying fluid for  $\beta=0.366$  ( $\mu=0.1, \gamma=0.0$ )

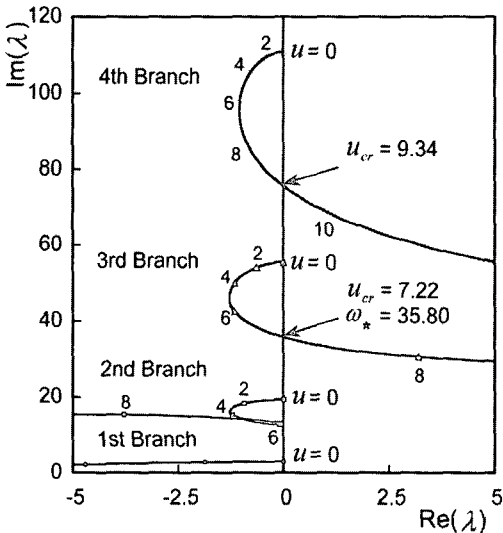


Fig. 4 Argand diagrams of the four lowest eigenvalues of the cantilevered pipes conveying fluid for  $\beta=0.367$  ( $\mu=0.1, \gamma=0.0$ )

하고 임계유속은 7.22로 급격히 증가하는 것을 알 수 있다. Fig. 5는  $\beta$ 가 0.830일 때의 고유치 곡선을 나타낸다. 4차 고유치 분기에서 플러터가 발생하며,  $\beta$ 값을 조금 증가시킨  $\beta=0.836$ 일 때의 고유치 곡선 Fig. 6에서는 3차 고유치 분기에서 플러터가 발생한다.

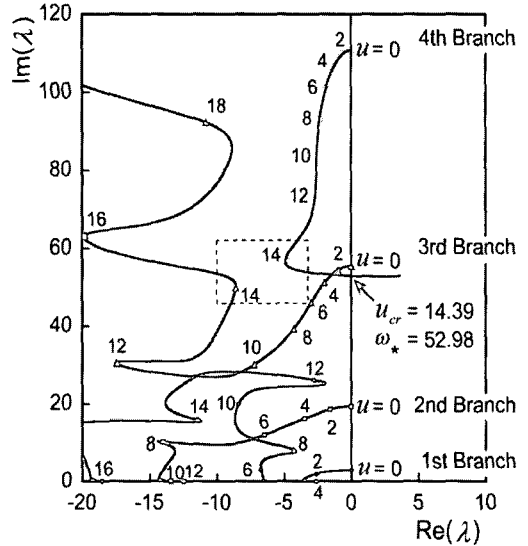


Fig. 5 Argand diagrams of the four lowest eigenvalues of the cantilevered pipes conveying fluid for  $\beta=0.830$  ( $\mu=0.1, \gamma=0.0$ )

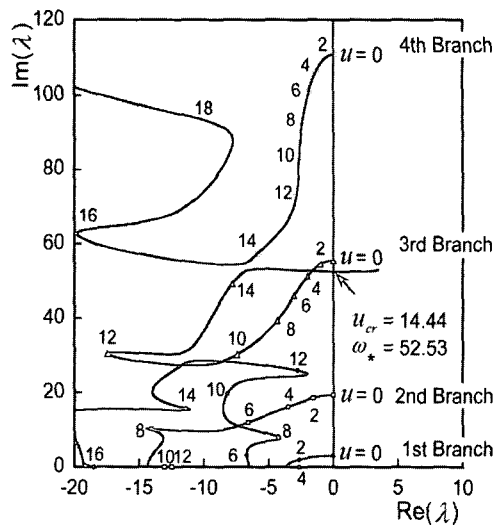


Fig. 6 Argand diagrams of the four lowest eigenvalues of the cantilevered pipes conveying fluid for  $\beta=0.836$  ( $\mu=0.1, \gamma=0.0$ )

이제 불안정에 관계하는 고유치 분기에 대해 상세히 관찰하기 위해서 Fig. 7에서는  $\beta$ 가 0.830인 Fig. 5의 점선부분과  $\beta=0.832, 0.835, 0.836$ 일 때의 분기 궤적을 확대하여 나타내었다. 4차 분기와 3차 분기가

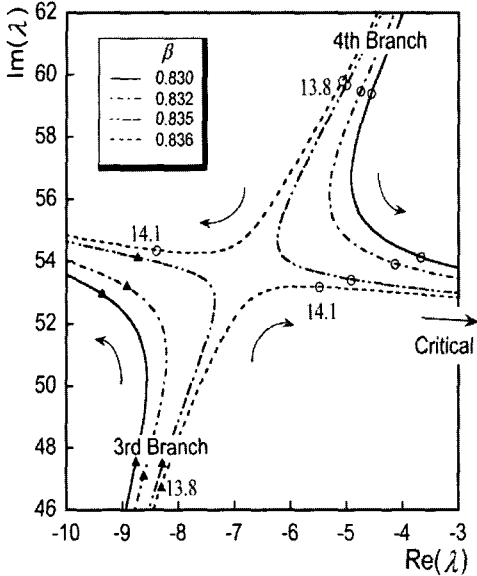


Fig. 7 Transfer of instability branch from the fourth to the third branch

유착하고 전환이 발생하여  $\beta=0.836$ 에서는 3차 분기에서 플러터가 발생하는 것을 알 수 있다. 즉,  $\beta=0.836$ 에서만 3차 분기가 고유치 실수축의 우반 평면 쪽으로 이동되어 불안정이 일어나는 것이다.

Fig. 3에서 Fig. 7이 내부감쇠가 없는 경우인데 비해 Fig. 8과 Fig. 9는 내부감쇠를 고려한 경우로서 무차원 내부감쇠계수  $\gamma$ 가  $\gamma=0.001$ 인 경우이다. Fig. 8은 무차원 질량비  $\beta$ 가  $\beta=0.862$ 일때의 고유치 곡선을 보여주는데 3차 고유치 분기에서 가장 먼저 허수축을 가로지르는 플러터 불안정이 일어남을 알 수 있다. 이때의 임계유속 값은  $u_{cr}=8.96$ 이고, 고유진동수  $\omega_*$ 는 33.826이다.

Fig. 9는  $\gamma=0.001$ 이고  $\beta=0.863$ 일때의 고유치 곡선을 나타내며, 이 그림에서는 4차 고유치분기에서 플러터가 먼저 발생하고 임계유속과 고유치가 각각  $u_{cr}=11.38$ 과  $\omega_*=69.925$ 로 크게 증가 되는 것을 알 수 있다.

### 3.2 불안정 모드 형상

Fig. 10과 Fig. 11은 각각 내부감쇠가 있는 경우와 없는 경우에 대해 불안정에 관계하는 진동 모드 형상

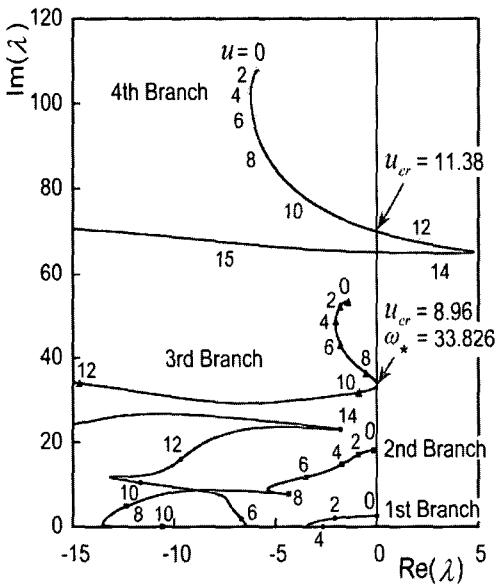


Fig. 8 Argand diagrams of the four lowest eigenvalues of the cantilevered pipes conveying fluid for  $\beta=0.862$  ( $\mu=0.217, \gamma=0.001$ )

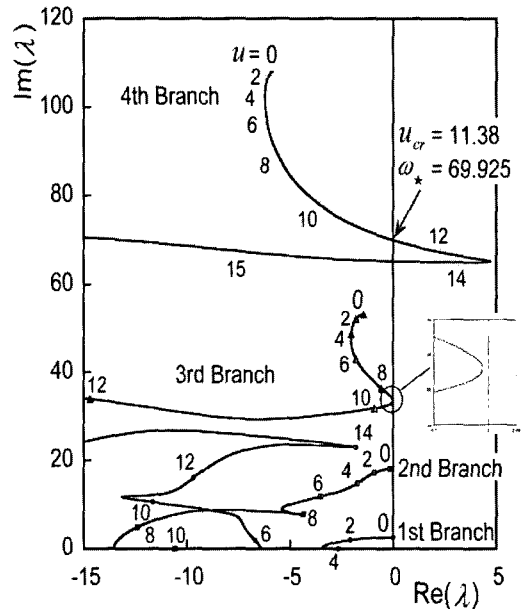


Fig. 9 Argand diagrams of the four lowest eigenvalues of the cantilevered pipes conveying fluid for  $\beta=0.863$  ( $\mu=0.217, \gamma=0.001$ )

을 나타낸 그림들로 각각 1/12의 주기로 최대진폭이 파이프의 전체길이의 1/10에 해당된다.

먼저 Fig. 10(a)는  $\beta$ 가 0.366일때의 불안정 진동 모드형상으로 하나의 이동절점(moving node)을 가지

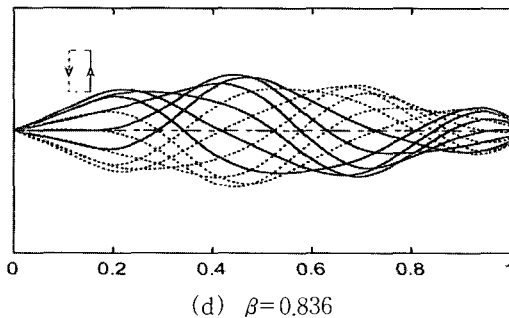
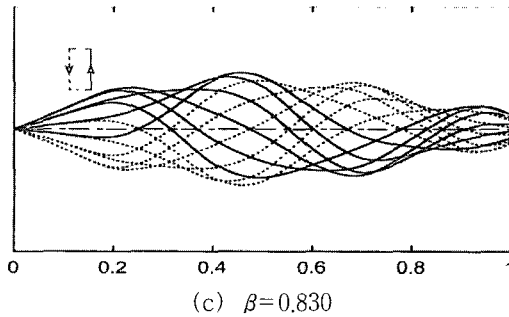
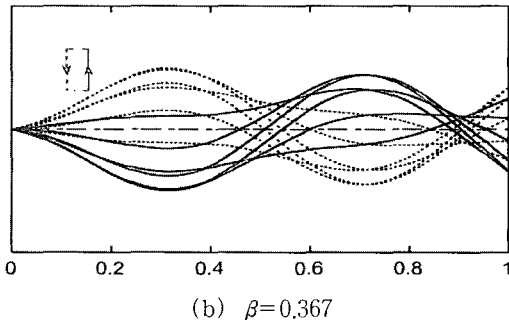
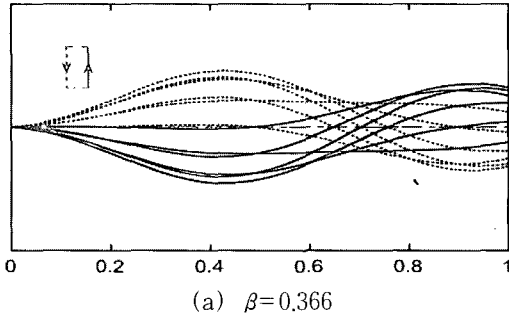


Fig. 10 Unstable mode configurations ( $\mu=0.1, \gamma=0.0$ ).

며 준(quasi) 2차 모드 형이다. Fig. 3 에서와 같이 플러터에 관계하는 고유치 분기도 2차 고유치 분기로 일치한다. Fig. 10(b)는  $\beta$ 가 0.367일때의 불안정 진동 모드 형상으로 두개의 이동절점을 가지므로 준3차 모드형이고 플러터에 관계하는 고유치 분기도 Fig. 4 에서 알 수 있듯이 3차 분기로 일치한다. Fig. 10(c)는  $\beta$ 가 0.830일때의 불안정 진동 모드 형상으로 3개의 이동 절점을 가진 준4차 모드형 이다. Fig. 5 에서와 같이 플러터에 관계하는 고유치 분기도 4차 분기로 일치한다. Fig. 10(d)는  $\beta$ 가 0.836일때의 불안정 진동 모드 형상으로 Fig. 10(c)와 마찬가지로 3개의 이동절점을 가진 준 4차 모드형임을 알 수 있다.

그러나 플러터에 관계하는 고유치분기는 Fig. 6 과 Fig. 7에서 고찰해 본 것처럼 두개의 고유치 분기가 유착과 전환에 의해 3차 분기에서 플러터가 발생한다.

Fig. 11은 내부감쇠가 있는 경우( $\gamma=0.001$ )로서 Fig. 11(a)는  $\beta$ 가 0.862일 때의 불안정 진동 모드 형상으로 이 경우 두개의 이동절점을 지닌 준 3차 모드를 보여주고 있다.

Fig. 8에 나타난 바와 같이 플러터가 발생하는 고

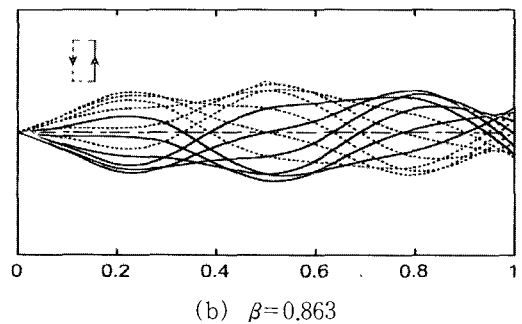
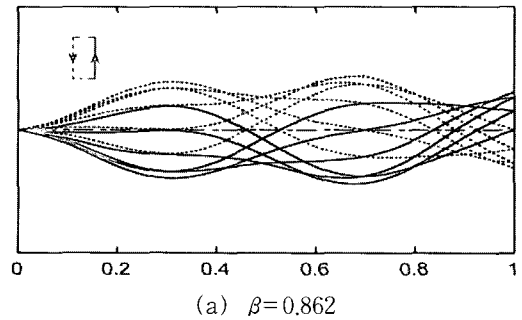


Fig. 11 Unstable mode configurations ( $\mu=0.217, \gamma=0.001$ )

유치 분기도 3차 고유치 분기로 플러터에 관계하는 모드와 분기의 차수가 일치한다는 것을 알 수 있다.

Fig. 11(b)는  $\beta$ 가 0.863일 때의 불안정 진동 모드 형상으로 3개의 이동절점을 가진 준 4차 모드형으로 Fig. 9에서 살펴본 바와 같이 플러터에 관계하는 고유치 분기도 4차로 일치함을 알 수 있다.

이상에서 살펴본 바와 같이 고유치 분기의 차수와 준 모드의 차수는 반드시 일치하는 것만은 아니라는 것을 알 수 있다.

### 3.3 질량비와 임계유속

Fig. 12에서 Fig. 14는 내부감쇠가 없는 경우( $\gamma=0.0$ ). 말단질량비  $\mu$ 가 각각  $\mu=0.1$ ,  $\mu=0.126$ ,  $\mu=0.2$ 에 대해 무차원 임계유속과 질량비 곡선을 나타내며, 이 곡선들에 있어 플러터에 관계하는 고유치 분기의 차수와 불안정일 때의 진동 모드와의 관계를 상세히 나타내었다.

먼저 Fig. 12에 있어,  $0 < \beta \leq 0.366$ 에서는 2차의 고유치 분기에서 플러터 불안정이 발생하고,  $0.367 \leq \beta \leq 0.704$ 에서는 3차 고유치 분기에서 플러터가 발생한다. 또한  $0.705 \leq \beta \leq 0.835$ 에서는 4차 고유치 분기에서 플러터 불안정이 발생하고, 4차 고유치 분기에서

3차 고유치 분기로 전환되어  $0.836 \leq \beta \leq 0.839$ 에서는 3차 분기에서 플러터가 발생한다.

한편, 3차 고유치 분기에서 1차 고유치 분기로 전

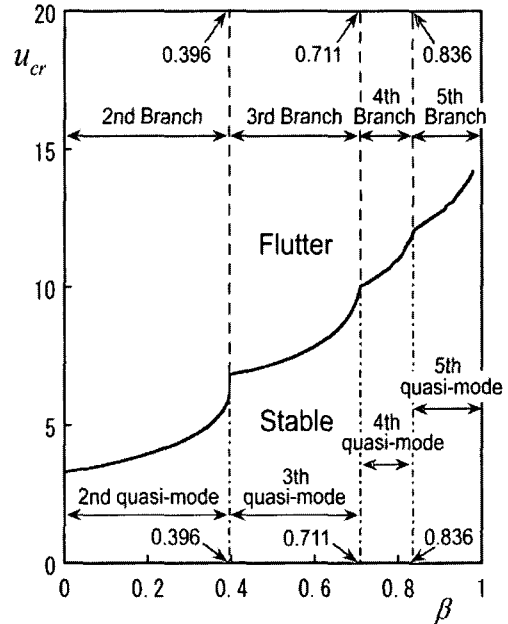


Fig. 13 Stability map and the critical mass ratios for  $\mu=0.126$  ( $\gamma=0.0$ )

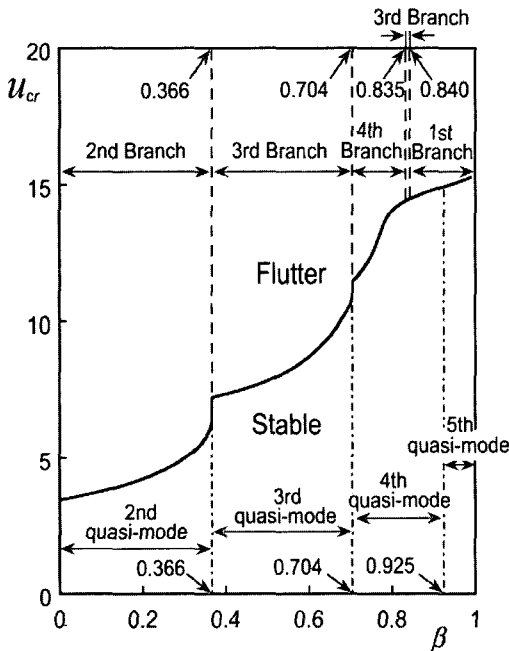


Fig. 12 Stability map and the critical mass ratios for  $\mu=0.1$  ( $\gamma=0.0$ )

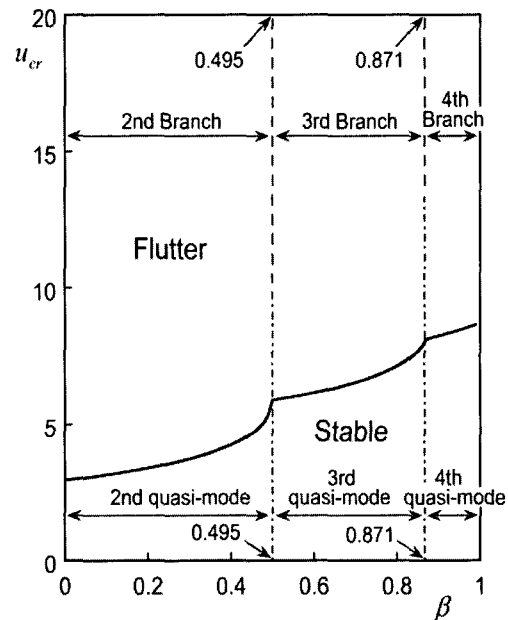


Fig. 14 Stability map and the critical mass ratios for  $\mu=0.2$  ( $\gamma=0.0$ )

환되어  $0.840 \leq \beta < 1$ 에서는 1차 고유치 분기에서 플러터가 발생한다. 이 경우 질량비  $\beta$ 의 영역 내에서 불안정이 발생하는 진동모드의 차수와 고유치분기의 차

수가 반드시 일치하지는 않음을 나타낸다.

또한, Fig. 13의  $\mu=0.126$ 과 Fig. 14의  $\mu=0.2$ 의 경우에는 불안정이 발생하는 고유치 분기와 불안정 모드의 차수가 서로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 이는 말단질량비  $\mu=0.126$ 이 경계가 되어 이 말단 질량비 이상에서는 불안정이 발생하는 고유치 분기와 불안정 모드의 차수가 일치하고 있음이 검증되었다.

그러나 Fig. 10의  $\mu=0.2$ 에서는 불안정이 발생하는 분기와 진동모드의 차수가 질량비  $\beta$ 의 변화영역 내에서 일치함을 알 수 있다.

Fig. 15에서 Fig. 17의 경우는 내부감쇠가 존재( $\gamma = 0.001$ )하는 경우, 말단질량비  $\mu$ 가 각각  $\mu=0.1, 0.217, 0.3$ 에 대해 무차원화된 임계유속과 질량비 곡선을 나타낸다. 먼저 Fig. 15의  $\mu=0.1$ 에 있어서 불안정에 관계하는 고유치 분기의 차수와 진동모드의 차수가 반드시 일치하지는 않지만 Fig. 16과 Fig. 17에 있어서는 일치함을 알 수 있다. 따라서, 내부 감쇠가 있는 경우는 말단질량비  $\mu$ 가 0.217이상에서는 질량비  $\beta$ 의 변화에 관계없이 불안정에 관계하는 고유치분기의 차수와 진동모드가 일치한다는 것을 알 수 있다.

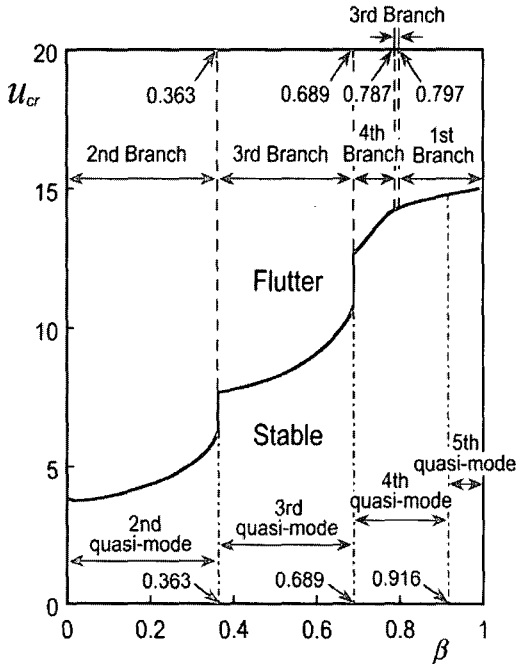


Fig. 15 Stability map and the critical mass ratios for  $\mu=0.1$  ( $\gamma=0.001$ )

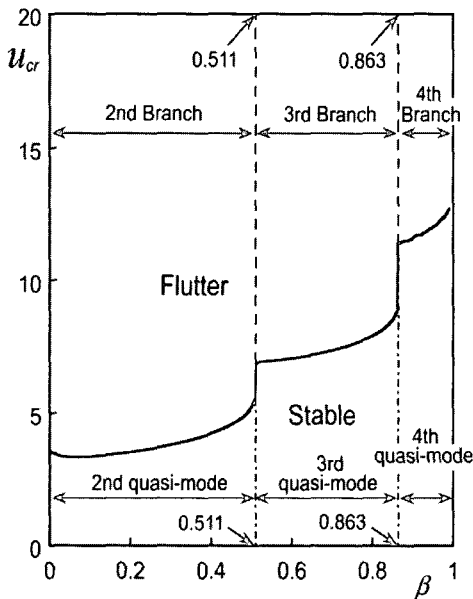


Fig. 16 Stability map and the critical mass ratios for  $\mu=0.217$  ( $\gamma=0.001$ )

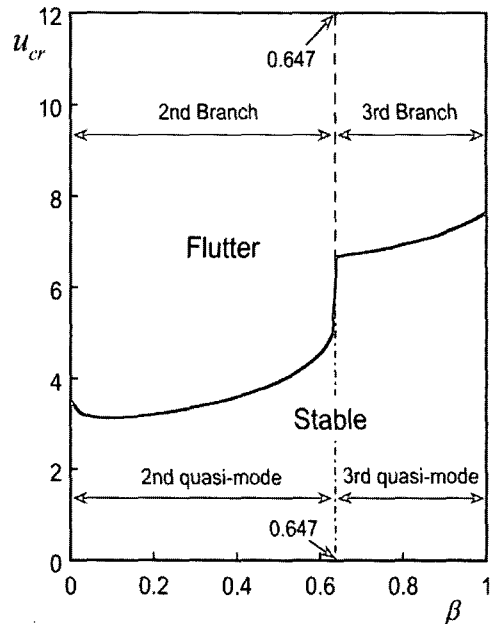


Fig. 17 Stability map and the critical mass ratios for  $\mu=0.3$  ( $\gamma=0.001$ )



#### 4. 결 론

본 논문에서는 말단질량을 갖고 내부 유동유체에 의한 외팔송수관의 플러터에 관계하는 고유치 분기와 불안정 모드에 대하여 상세히 고찰하였다. 말단질량이 없는 이전의 연구<sup>(10)</sup>에 있어서는 플러터에 관계하는 고유치 분기가 유착과 전환이 발생하기 때문에 진동수의 크기에 의존하는 불안정 모드의 차수와 고유치 분기의 차수가 반드시 일치하지는 않았으나 본 논문에서와 같이 말단질량이 있는 경우에는 말단 질량비  $\mu$ 와 내부감쇠 파라미터  $\gamma$ 의 유무에 따라 다음과 같은 결론이 얻어졌다.

첫째, 내부감쇠가 없는 경우, 말단 질량비  $\mu$ 가 0.126이상이면 플러터에 관계하는 고유치 분기가 유착과 전환이 발생하지 않으며 이때의 불안정 진동모드의 차수와 고유치 분기의 차수는 일치하며,  $\mu < 0.126$ 이면 반드시 일치하지는 않는다.

둘째, 내부감쇠가 존재하는 ( $\gamma=0.001$ )하는 경우에 있어서는 말단 질량비  $\mu$ 가 0.217이상에서는 플러터에 관계하는 고유치 분기의 차수와 불안정 진동모드의 차수가 일치하며,  $\mu < 0.217$ 에서는 반드시 일치하지만은 않는다.

#### 참 고 문 헌

(1) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (I. Theory)," Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol. 261, pp. 457~486.  
 (2) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (II. Experiment)," Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol. 261, pp. 487~499.  
 (3) Gregory, R. W. and Paidoussis, M. P., 1966, "Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid (I. Theory)," Proceedings of the Royal Society (London), Series A, Vol. 293, pp.

512~527.

(4) Gregory, R. W. and Paidoussis, M. P., 1966, "Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid (II. Experiment)," Proceedings of the Royal Society (London), Series A, Vol. 293, pp. 528~542.

(5) Hill, J. L. and Swanson, C. P., 1970, "Effects of Lumped Masses on the Stability of Fluid Conveying Tube," Journal of Applied Mechanics, Vol. 37, pp. 494~497.

(6) Sugiyama, Y., Tanaka, Y., Kishi, T. and Kawagoe, H., 1985, "Effect of a Spring Support on the Stability of Pipes Conveying Fluid," Journal of Sound and Vibration, Vol. 100, pp. 257~270.

(7) Sugiyama, Y., Kumagai, Y., Kishi, T. and H., 1986, "Studies on Stability of Pipes Conveying Fluid (The Effect of a Lumped Mass and Damping)," Bulletin of JSME, Vol. 29, pp. 929~934.

(8) 류봉조, 정승호, 강용철, 1998, "유체유동을 갖는 외팔 송수관의 동적 안정성과 진동제어에 관한 연구," 한국소음진동공학회논문집, 제 8 권, 제 1 호, pp. 171~179.

(9) Paidoussis, M. P., 1998, "Fluid-structure Interactions Slender Structures and Axial Flow," Academic Press, Vol. 1, pp. 196~276.

(10) Ryu, S. U., Sugiyama, Y. and Ryu, B. J., 2002, "Eigenvalue Branches and Modes for Flutter of Cantilevered Pipes Conveying Fluid," Computers and Structures, Vol. 80, pp. 1231~1241.

(11) Seyranian, A. P., 1994, "Collision of Eigenvalues in Linear Oscillatory Systems," Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 58, pp. 805~813.

(12) Semler, C., Alighanbari, H. and Paidoussis, M. P., 1998, "A Physical Explanation of the Destabilizing Effect of Damping," Journal of Applied Mechanics, Vol. 65, pp. 642~648.