

탄성지반으로 지지된 보강판의 안정해석

Stability Analysis of Stiffened Plates on Elastic Foundations

이 병 구[†] · 이 용 수* · 오 숙 경** · 이 태 은***

Lee Byoung-Koo, Lee Yong-Soo, Oh Soog-Kyoung and Lee Tae-Eun

(2003년 10월 14일 접수 : 2003년 11월 5일 심사완료)

Key Words : Plate(판), Stiffened Plate(보강판), Dynamic Stability Region(동적 안정영역), Elastic Foundation(탄성지반), Pasternak Foundation(Pasternak 지반)

ABSTRACT

This research analyzes the dynamic stability of stiffened plates on elastic foundations using the finite element method. For analyzing the stiffened plates, both the Mindlin plate theory and Timoshenko beam-column theory were applied. In application of the finite element method, 8-nodes serendipity element system and 3-nodes finite element system were used for plate and beam elements, respectively. Elastic foundations were modeled as the Pasternak foundations in which the continuity effect of foundation is considered. In order to verify the theory of this study, solutions obtained by this analysis were compared with the classical solutions in open literature and experimental solutions. The dynamic stability regions of stiffened plates on Pasternak foundations were determined according to changes of in-plane stresses, foundation parameters and dimensions of stiffener.

1. 서 론

최근에 빈번하게 발생하고 있는 건설 현장의 발파, 향타, 다짐, 굴착 등의 진동원은 지반-구조물 상호작용을 야기한다. 지반-구조물 상호작용의 해석은 진동 제어 분야 및 동적 해석 분야에서 중요한 연구대상이 되고 있다. 이에 대한 예로는 탄성지지 교차보, 교량 상판, 지표면 위에 놓인 기초, 활주로, 지하철 노반 등을 들 수 있다.

구조물의 온통 기초는 지반 위에 놓인 판으로 모형화할 수 있으며 지반 위에 놓인 판의 동적 거동을 규명하는 것은 온통 기초의 동적 설계에 근간이 된다.

Horenberg 등⁽¹⁾은 modal constraint 법을 이용하여 판의 동적 해석을 수행하였다. Celik 등⁽²⁾은 두 변수 지반으로 지지된 판을 반복법을 이용하여 해석하였고, Matsunaga⁽³⁾는 면내응력을 받는 판의 좌굴 안정해석을 연구하였다. Yokoyama⁽⁴⁾는 탄성지반으로 지지된 Timoshenko 보의 불안정에 대한 변수 연구를 수행하였고, Holopainen⁽⁵⁾는 편심 보강판의 유한요소 자유진동을 해석하였다. Li 등⁽⁶⁾은 보강판의 좌굴문제를 해석하였고, Srivastava 등⁽⁷⁾은 partial loading을 받는 보강판의 좌굴 문제를 연구하였다.

국내 연구자로 Lee 등⁽⁸⁾은 탄성지반 위에 놓인 원호형 수평 곡선보의 자유진동을 해석하였다. 이 등⁽⁹⁾은 탄성지반 위에 놓인 변단면 압축부재의 자유진동을 연구하였다. 이 등은 Timoshenko 보-기둥의 안정해석⁽¹⁰⁾ 및 비균질 Pasternak 지반 위에 놓인 면내력을 받는 판의 진동해석⁽¹¹⁾과 동적 안정해석⁽¹²⁾을 수행하였다.

† 책임저자 : 정회원, 원광대학교 토목환경도시공학부
전화 : (063) 850-6718, Fax : (063) 857-7204
E-mail : bkleest@wonkwang.ac.kr

* 정회원, 원광대학교 건축학부

** 정회원, 원광대학교 대학원 건축공학과

*** 정회원, 원광대학교 대학원 토목환경공학과

이 연구의 문헌고찰에서 Pasternak 지반으로 지지된 보강판의 자유진동과 면내력이 작용하는 보강판의 자유진동 해석결과를 이용하여 안정해석을 수행한 연구는 찾아볼 수 없었다. 이 연구에서는 Pasternak 지반으로 지지된 면내응력을 보강판의 자유진동을 해석하고 이 결과를 이용하여 Pasternak 지반으로 지지된 보강판의 안정해석을 실시하여 보강판의 안정영역을 산정하였다.

보강판의 유한요소는 판요소와 보요소로 구성되며 판요소와 보요소에 대한 강성행렬들을 전체 요소에 대해 조합하여 보강판의 동적 안정해석 방정식을 얻는다. 구조물을 지지하는 지반은 Winkler 지반에 전단층을 추가하는 지반의 연속성을 고려한 Pasternak 지반으로 모형화하였으며, 판해석은 Mindlin 판 이론을, 보 해석은 Timoshenko 보-기둥 이론을 적용하였다. 판요소는 8절점 Serendipity 요소계를, 보요소는 3절점 유한요소를 사용하였다.

2. 유한요소 해석

2.1 요소의 강성행렬구성

판요소와 보요소의 변형에너지, 운동에너지 및 외력이 한 일을 구하고 가상 일의 원리를 이용하여 이들 변분을 0(zero)으로 놓아 고유치 방정식을 산정한다.

(1) 판요소

판요소 해석을 위해 다음의 Fig. 1과 같은 8절점 Serendipity 요소계를 사용한다.

임의 점의 수직변위와 회전변위의 관계를 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = [N] \{ \delta_e \} \quad (1)$$

여기서,

w : 판요소의 수직변위

θ_x : 판요소의 x 방향 회전변위

θ_y : 판요소의 y 방향 회전변위

또한 식 (1)에서 행렬 $\{ \delta_e \}$, $[N]$ 는 다음과 같다.

$$\{ \delta_e \} = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \dots \ w_8 \ \theta_{x8} \ \theta_{y8}] \quad (2.1)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

판요소의 크기를 $2\bar{a} \times 2\bar{b}$ 로 하고 무차원 변수 $\xi = (x - x_c) / \bar{a}$, $\eta = (y - y_c) / \bar{b}$ 를 이용하여 8절점 Serendipity 요소계의 형상함수를 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\ N_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta) \\ N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\ N_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\ N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \end{aligned} \quad (3)$$

판요소의 운동 에너지 (T_e)는 다음과 같다.

$$T_e = \frac{1}{2} \left\{ \int_A \rho \left(h \dot{w}^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_x^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_y^2 \right) dA \right\} \quad (4)$$

여기서,

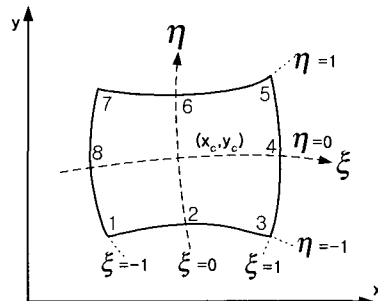


Fig. 1 Element of Serendipity 8 nodes

ρ : 판의 단위면적당 질량

$\dot{w}, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y$: 시간 변화에 따른 변위 및 회전각

Winkler 지반강성과 전단지반강성을 포함한 판요소의 변형에너지 (U_e)는 다음과 같이 행렬 형태로 쓸 수 있다.

$$U_e = \frac{1}{2} \int_A [M]^T \{ \chi \} dA + \frac{1}{2} \int_A [Q]^T \{ \psi \} dA + \frac{1}{2} \int_A k_w w^2 dA + \frac{1}{2} \int_A k_g \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dA \quad (5)$$

여기서,

k_w : Winkler 지반강성

$\{ \chi \}$: 곡률

k_g : 전단 지반강성

$\{ \psi \}$: 전단변형

$[M]$: 모멘트 행렬

$[Q]$: 전단력 행렬

외력에 의한 일 (W_e)은 한 방향 압축만을 고려하면 다음과 같다.

$$W_e = \frac{1}{2} \int P_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (6)$$

여기서,

P_x : x 방향 면내력

식 (4), (5), (6)에 식 (1)을 대입하여 행렬 형태로 정리하면 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} \{ \delta_e \}^T [M_e] \{ \delta_e \} \\ U_e &= \frac{1}{2} \{ \delta_e \}^T [[K_e] + [K_f]] \{ \delta_e \} \\ W_e &= \frac{1}{2} \{ \delta_e \}^T [K_g] \{ \delta_e \} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서,

$[M_e]$: 판요소의 질량행렬

$[K_e]$: 휨·전단 강성행렬

$[K_f]$: Winkler 지반·전단지반 강성행렬

$[K_g]$: 기하 강성행렬

(2) 보요소

Fig. 2에서 Timoshenko 보-기둥 요소의 변위는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{ q \}^e = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2, w_3, \theta_3]^T \quad (8)$$

각 절점의 변위 함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{2} \xi(1-\xi) \\ N_2 &= (1-\xi)(1+\xi) \\ N_3 &= \frac{1}{2} \xi(1+\xi) \end{aligned} \quad (9)$$

Pasternak 지반으로 지지되고 있는 길이 $2\bar{a}$ 의 Timoshenko 보-기둥요소에 대한 변형에너지 (U_{be})는 다음 식과 같다.

$$U_{be} = \frac{1}{2} \left[\int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} \left\{ EI_b \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + k' GA_b \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right)^2 + k_w (w)^2 + k_g \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \right] \quad (10)$$

여기서,

EI_b : 보-기둥 요소의 휨 강성

k' : 전단계수

G : 전단탄성계수

A_b : 보-기둥 요소의 단면적

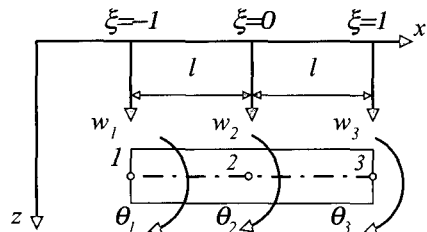


Fig. 2 Finite element model of Timoshenko beam-column

회전관성 효과를 고려한 보-기둥 요소의 운동에너지 (T_{be})는 다음과 같다.

$$T_{be} = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \rho_b \left\{ A_b \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_b \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right\} dx \quad (11)$$

여기서,

ρ_b : 보 재료의 질량밀도

t : 시간

축 하중 P 에 의한 일 (W_{be})은 다음과 같다.

$$W_{be} = -\frac{1}{2} \int_{-a}^a P \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (12)$$

Timoshenko 보-기둥 요소의 변형 에너지, 운동에너지, 축 하중이 한 일은 다음과 같이 요소의 절점 변위벡터 $\{q\}^e$ 의 항으로 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} U_{be} &= \frac{1}{2} \{q\}^e T [K]_b^e \{q\}^e \\ T_{be} &= \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^e T [M]_b^e \{\dot{q}\}^e \\ W_{be} &= \frac{1}{2} \{q\}^e T [K_g]_b^e \{q\}^e \end{aligned} \quad (13)$$

여기서,

$\{ \}$: t 에 대한 도함수

$[K]_b^e$: 휨 · 전단강성 행렬

$[K_f]_b^e$: Winkler 지반 · 전단지반강성 행렬

$[M]_b^e$: 질량 행렬

$[K_g]_b^e$: 기하강성 행렬

2.2 전체 강성 행렬 구성

관요소와 보요소의 강성 행렬을 포함한 에너지 식 (7), (13)을 전체 요소에 대해 조합하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K_E] \{\delta\} \\ T &= \frac{1}{2} \{\dot{\delta}\}^T [K_M] \{\dot{\delta}\} \\ W &= \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K_G] \{\delta\} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서,

$[K_E]$: 전체 보강판의 휨 · 전단 · 지반강성 행렬

$[K_M]$: 전체 보강판의 질량 행렬

$[K_G]$: 전체 보강판의 기하강성 행렬

가상 일의 원리에 의해 얻어진 Hamilton 방정식은 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} W dt = 0 \quad (15)$$

식 (15)에서 $t=t_1, t_2$ 일 경우 $\delta\{\delta\}=0$ 임을 고려하여 운동에너지의 항만 고려하면 식 (15)는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} -\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt &= -\delta \int_{t_1}^{t_2} \delta\{\dot{\delta}\}^T [K_M] \{\dot{\delta}\} \\ &= -|\delta\{\dot{\delta}\}^T [K_M] \{\dot{\delta}\}|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \delta\{\dot{\delta}\}^T [K_M] \{\dot{\delta}\} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \delta\{\dot{\delta}\}^T [K_M] \{\dot{\delta}\} \end{aligned} \quad (16)$$

식 (14), (16)을 식 (15)에 대입하면 다음과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\{\delta\}^T [[K_M] \{\dot{\delta}\} + [K_E] \{\delta\} - [K_G] \{\delta\}] dt = 0 \quad (17)$$

위의 식 (17)에서 다음의 운동방정식이 얻어진다.

$$[K_M] \{\dot{\delta}\} + [[K_E] - [K_G]] \{\delta\} = 0 \quad (18)$$

2.3 동적 안정 방정식 구성

식 (18)에서 $[K_G]$ 는 면내응력을 대입한 기하강성 행렬이다. 면내응력을 1로 놓고 구한 강성 행렬을 $[\bar{K}_G]$ 라 하면 $[K_G]$ 는 면내응력 σ 와 $[\bar{K}_G]$ 의 곱인 $\sigma[\bar{K}_G]$ 로 대신할 수 있다. 동적 안정 문제를 다루는 경우 σ 는 정응력 부분과 동응력 부분의 합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma = \alpha \sigma_{cr} + \beta \sigma_{cr} \cos \omega t = \sigma_0 + \sigma_1 \cos \omega t \quad (19)$$

여기서,

α, β : 좌굴응력에 대한 정적, 동적 응력비

- σ_{cr} : 정적 좌굴응력
- $\bar{\omega}$: 동적 응력의 진동수
- σ_0 : 평균응력
- σ_i : 응력진폭

식 (19)를 식 (18)에 대입하면 다음과 같은 행렬 형태의 Mathieu-Hill 방정식을 얻는다.

$$[K_M]\{\delta\} + [[K_E] - \alpha\sigma_{cr}[\bar{K}_{GS}] - \beta\sigma_{cr}\cos\bar{\omega}t[\bar{K}_{Gt}]]\{\delta\} = 0 \quad (20)$$

여기서,

- $[\bar{K}_{GS}]$: 평균응력 σ_0 에 대한 기하강성 행렬
- $[\bar{K}_{Gt}]$: 주기응력 진폭 σ_i 에 대한 기하강성 행렬

위의 Mathieu-Hill 방정식의 해는 다음과 같이 급수 형태로 가정된다.

$$\delta(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\bar{\omega}}{2} t + b_k \cos \frac{k\bar{\omega}}{2} t \right) \quad (21)$$

식 (20)을 만족하기 위해서는 식 (21)을 식 (20)에 대입하여 구한 임의의 계수 a_k 와 b_k 의 $k \times k$ 차원의 행렬식은 영(zero)이 되어야 한다.

계수 a_k 와 b_k 에 대한 $k \times k$ 행렬식을 일차 근사화 하면 다음과 같다.

$$\{[K_E] - \alpha \cdot \sigma_{cr}[\bar{K}_{GS}] \pm \frac{1}{2} \beta \sigma_{cr}[\bar{K}_{Gt}] - \frac{\bar{\omega}^2}{4}[K_M]\} = 0 \quad (22)$$

평균응력과 응력진폭의 영향을 동일하게 취하여 $[\bar{K}_{GS}] = [\bar{K}_{Gt}] = [\bar{K}_G]$ 로 하면 식 (22)는 다음과 같이 된다.

$$\left\{ [K_E] - \left(\alpha \pm \frac{1}{2} \beta \right) \sigma_{cr} [\bar{K}_G] - \frac{\bar{\omega}^2}{4} [K_M] \right\} \{w\} = 0 \quad (23)$$

식 (23)에서 정·동적 응력 계수비 α 와 β 값에 따른 판의 진동수 비($\bar{\omega}/\omega_e =$ 면내응력의 진동수/판의 고유진동수)를 구하여 동적 불안정영역을 표시한다.

이상에서와 같이 본 연구에서 개발한 탄성지반으로 지지된 보강판의 안정해석을 수행할 수 있는 알고리즘을 개발하고 이를 컴퓨터 프로그램하였다. 프로그램 언어는 Fortran power station version 4.0을 사용하였다.

3. 실험

강(鋼)이나 동(銅)을 시험체의 재료로 사용하는 경우에는 판의 강성이 너무 커서 고유진동수의 측정이 어렵기 때문에 실험실 조건에 적합한 강성을 갖는 수지를 시험체의 재료로 사용하였다. 수지의 제 계수를 알기 위해 시험편의 인장시험을 행한 후 보강판의 고유진동수를 얻기 위한 실험을 실시하였다.

Table 1은 3개의 시험편의 탄성계수를 측정된 내역이며, 시험체는 실험실의 실험조건을 고려하여 보강판을 Fig. 3과 같이 선정하였다.

면내력을 받는 보강판의 고유진동수를 실험하기 위한 시험체의 기계적, 기하적 제원은 다음과 같다.

Table 1 Mechanical properties of specimen

Specimen no.	Thickness (mm)	Young's modulus (kgf/cm ²)	Max. tension strength (kgf/cm ²)
S-1	1.50	31998.95	1159.92
S-2	1.48	30002.26	1019.21
S-3	1.49	31864.01	1018.18
Average		31288.41	1065.77

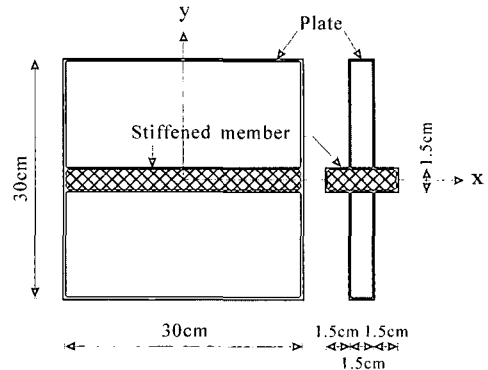


Fig. 3 Specimen model of plate with stiffened member

탄성계수 (E) : 31288.41 kgf/cm²
 판 크기 : 30 cm×30 cm
 보강재 크기 : 1.5 cm×4.5 cm
 보강재 길이 : 30 cm
 푸아송비 (ν) : 0.367
 지지상태 : 4변 단순지지
 판 질량 밀도 (ρ_b) : 1.194×10^{-6} kg/cm³
 판 두께 : 1.5 cm
 면내응력 변화 : 0, 0.2 σ_{cr} , 0.4 σ_{cr} , 0.8 σ_{cr}

실험에 사용된 가력 프레임은 SS41재질의 H형강을 사용하여 최대 100 tf 까지 안전하도록 설계되어 있다.

가력 프레임에 장착된 유압 잭의 하부에 로드 셀을 부착하여 시험체를 가력하고, 가력 상태에서 충격 망치로 보강판을 타격하여 진동측정 장치를 통하여 보강판의 고유진동수를 측정하였다. 보강판에 이론 좌굴 응력 σ_{cr} 의 0.0, 0.2, 0.4, 0.8배를 면내응력으로 가지고 각 응력 상태에서 보강판의 고유진동수를 측정하였으며, 그 결과를 후술할 Table 3에 나타내었다.

4. 검증 및 안정해석 예제

4.1 검증

보강판의 동적 안정해석 프로그램의 정밀도를 검증하기 위해 본 연구, 문헌 해 및 실험 값을 비교한다.

먼저, 문헌⁽⁷⁾과 동일한 조건을 갖는 보강판에 대해 본 해석 프로그램을 이용하여 좌굴계수를 구하고 문헌⁽⁷⁾의 해와 비교한다. 보강판의 조건은 다음과 같다.

탄성계수 (E) : 2.1×10^6 kgf/cm²
 푸아송비 (ν) : 0.3
 판 크기 : 60 cm×60 cm
 지지상태 : 4변 단순지지
 판 두께 : 0.6 cm

Table 2에서 보강판의 좌굴계수는 본 연구의 결과를 판이론을 적용한 문헌⁽⁷⁾과 박판이론을 적용한 문헌⁽¹³⁾의 결과와 비교하였다. 면의 전단력을 고려한 판이론을 적용한 문헌⁽⁷⁾과 본 연구의 해는 최대 1.31%의 만족할만한 오차를 나타내었다. 본 연구와 박판이

론을 적용한 문헌⁽¹³⁾의 결과와는 최대 오차 10.45%를 보였다. 본 연구에서는 Mindlin 판 이론을 적용하였기 때문에 판과 보강재의 면의 전단력을 고려하지 않는 박판이론과는 큰 오차를 보이고 있다.

Table 3은 면내응력 변화에 따른 보강판의 고유진동수에 대해 본 연구와 실험의 결과를 비교한 것이다. 면내응력이 0.8 σ_{cr} 일 때 제 5 모드에서 11.23%의 최대 오차를 보였다.

Table 2 Buckling coefficients by stiffness of stiffened member

Stiffness		Buckling coefficient, k				
δ	γ	This study	Ref. ⁽⁷⁾	Ref. ⁽¹³⁾	Error* (%)	Error** (%)
0.05	5	12.58	12.62	12.00	0.31	4.83
	10	15.78	15.99	16.00	1.31	1.38
	15	15.94	16.00	16.00	0.35	0.38
0.1	5	12.26	12.39	11.10	1.03	10.45
	10	15.87	15.99	16.00	0.74	0.81
	15	15.90	16.00	16.00	0.62	0.63

$\delta = A_b/bh$, $\gamma = EI_b/bD$, $k (= Pb/d)$: Buckling coeff.,

P : In-plane stress, I_b : Moment of inertia,

b : width, E : Young's modulus,

D : Flexural rigidity, A : Area.

Error* = |This study - Ref.[7]| × 100 / Ref.[7]

Error** = |This study - Ref.[13]| × 100 / Ref.[13]

Table 3 Natural frequencies (Hz) of stiffened plates by in-plane stress

In-plane stress	Mode no	This study	Experiment	Error (%)
0.2 σ_{cr}	1	391.16	400.00	2.26
	2	886.07	856.00	3.39
	3	1056.40	1125.00	6.49
	4	1396.96	1438.00	10.87
	5	1804.25	1985.00	10.02
0.4 σ_{cr}	1	338.51	348.00	2.80
	2	864.06	891.00	3.12
	3	983.81	923.00	6.18
	4	1334.80	1456.00	9.08
	5	1794.65	1961.00	9.27
0.8 σ_{cr}	1	194.33	201.00	3.43
	2	811.01	845.00	4.19
	3	816.81	855.00	4.68
	4	1207.44	1322.00	9.49
	5	1769.28	1968.00	11.23

Pasternak 지반으로 지지된 판의 고유진동수를 문헌⁽¹⁴⁾와 비교하여 본 연구 결과의 정도를 검토한다. 판의 조건은 문헌⁽¹⁴⁾와 동일하며 다음과 같다.

- 탄성계수 (E) : $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$
- 푸아송비 (ν) : 0.3
- 판 크기 : $100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$
- 지지상태 : 4변 단순지지
- 판 두께 : 20 cm
- 탄성지반변수 ($WFP = k_w a^4/D$) : 0, 10, 102, 103, 104
- 전단지반변수 ($SFP = k_g a^2/D$) : 0, 10

지반 변수 변화에 따른 문헌⁽¹⁴⁾와 본 연구의 무차원 고유진동수 ($\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$)를 비교하면 Table 4와 같다. 본 연구와 문헌⁽¹⁴⁾의 결과는 최대 0.22%의 오차를 나타내고 있어 Pasternak 지반 위에 놓인 보강판의 고유진동수 해석방법이 타당함을 검증할 수 있었다.

4.2 안정해석 예제

보강판의 동적 안정을 해석하기 위한 Pasternak 지반 위에 놓인 보강판의 모형은 Fig. 4와 같다. 보강판의 지지조건은 4변 단순지지에 국한하였으며, 해석에 사용한 지반 및 보강판의 기계적, 기하적 제원은 다음과 같다.

- 탄성계수 (E) : $2.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$
- 푸아송비 (ν) : 0.167
- 지지조건 : 4변 단순지지

- 판의 질량밀도 (ρ_b) : $2.448 \times 10^{-6} \text{ kg/cm}^3$
- 판 크기 : $500 \text{ cm} \times 500 \text{ cm}$
- 보강재 : $\delta = 0.1, \gamma = 0.4$
- 판 두께 : 25 cm
- 면내응력 변화 : $0.4 \sigma_{cr}, 0.8 \sigma_{cr}$
- Winkler 지반변수 (WFP) : 100, 1000
- 전단지반변수 (SFP) : 5, 15

Fig. 5 ~ 7은 좌굴응력과 정응력계수 α , 동응력계수 β 를 적용하고 고유치 문제를 풀므로써 α, β 및 판의 고유진동수 비 $\bar{\omega}/\omega_e$ 를 곡선으로 표시하면 보강판의 불안정영역의 경계를 나타낸 보강판의 동적 안정해석의 결과이다. 이 연구에서는 α 를 0.4, 0.8로 하고 WFP 및 SFP 를 변화시키며 안정해석을 실시하였다. 각 그래프에서 5개의 곡선 군을 볼 수 있는데, 좌측의 수직축으로부터 가까운 순서로 제 1 진동 모드에서부터 제 5 진동 모드까지를 나타낸다. 각 모드는 2개의 곡선으로 이루어져 있고, 각 모드 중 좌측 곡선은 $\alpha + (1/2)\beta$ 를, 우측 곡선은 $\alpha - (1/2)\beta$ 를 적용한 곡선들이다. 보강판의 동적 변수 ($\beta, \bar{\omega}/\omega_e$)를 그래프 상에 나타내었을 때 음영 부분에 있으면 보강판은 불안정 상태에 있고, 밖에 있으면 안정 상태에 있다. 이 그림들에서 보는 바와 같이 면내응력이 0.4에서 0.8로 커질수록 각 모드의 불안정 영역이 확대된다. 제 1, 2 모드와 제 3, 4, 5 모드는 불안정 영역이 중첩되며, 왼쪽으로 치우치고 있다. Fig. 5(a) 및 Fig. 6(a)와 같이 SFP 가 5, 15로 변하고 다른 조건들이 같은 경우에 SFP 가 커질수록 각 모드의 불안정 영역이 왼쪽으로 치우친다. Fig. 5(a)와 Fig.

Table 4 Non-dimensional frequencies of stiffened plates by foundation parameter

SFP	WFP	This study	Ref. ⁽¹⁴⁾	Error(%)
0	0	17.4345	17.4486	0.08
	10	17.7071	17.7208	0.08
	10^2	19.9952	20.0042	0.05
	10^3	35.5161	35.5028	0.04
	10^4	98.7452	98.5331	0.22
10	0	22.1956	22.2117	0.07
	10	22.4104	22.4261	0.07
	10^2	24.2580	24.2698	0.05
	10^3	38.0741	38.0638	0.03
	10^4	99.6619	99.4473	0.22

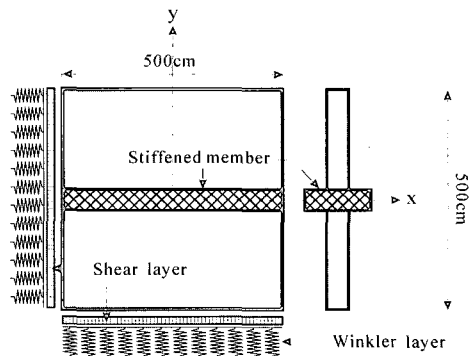
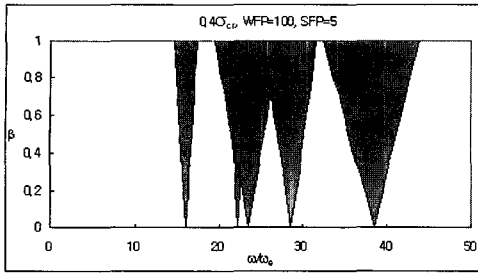
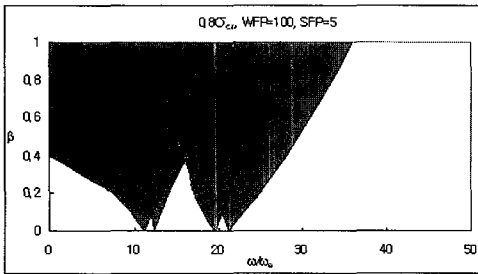


Fig. 4 Geometry of plate for stability analysis

7(a)와 같이 WFP 를 100, 1000으로 변화시키고 다른 조건들이 같은 경우에 WFP 가 커질수록 각 모드의

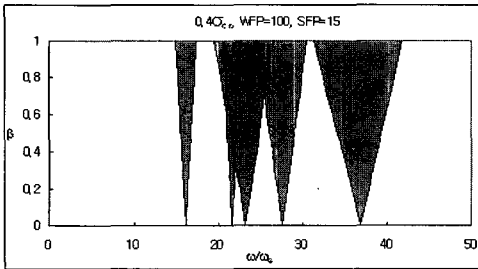


(a) $P=0.4 \sigma_{cr}$

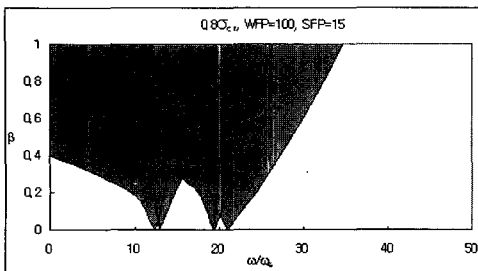


(b) $P=0.8 \sigma_{cr}$

Fig. 5 Un-stability region ($WFP=100, SFP=5$)

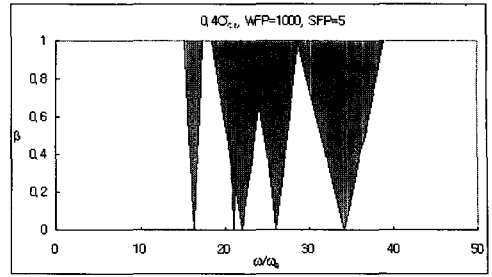


(a) $P=0.4 \sigma_{cr}$

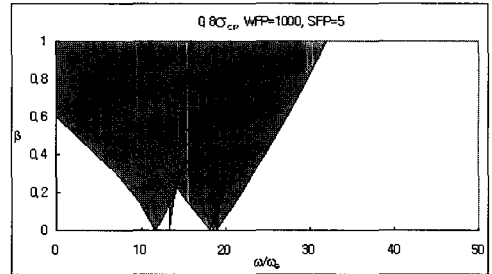


(b) $P=0.8 \sigma_{cr}$

Fig. 6 Un-stability region ($WFP=100, SFP=15$)



(a) $P=0.4 \sigma_{cr}$



(b) $P=0.8 \sigma_{cr}$

Fig. 7 Un-stability region ($WFP=1000, SFP=5$)

불안정 영역이 왼쪽으로 치우치며 불안정 영역이 좁아지고 있다.

5. 결론

이 논문은 탄성지반 위에 놓인 보강판의 동적 안정 해석에 관한 연구이다. 보강판의 유한요소는 판요소와 보요소로 구성하고 판 요소와 보 요소에 대한 강성행렬들을 전체 요소에 대해 조합하여 동적 안정해석 방정식을 얻었다. 탄성지반은 Pasternak 지반으로 모형화하였고, 판해석은 Mindlin 판이론을, 보 해석은 Timoshenko 보-기둥이론을 적용하였다. 이 연구의 결과로 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 본 연구에서 산출한 지반 위에 놓인 보강판의 고유진동수와 좌굴응력은 문헌 해와 매우 근사하였다. 또한 지반 위에 놓이지 않은 보강판의 면내응력 변화에 따른 본 연구의 고유진동수는 본 연구에서 시행한 실험 값과 매우 잘 일치하였다.

(2) 보강판의 안정영역은 면내응력이 커질수록 각 모드의 불안정영역이 확대되고, 제 1, 2모드와 제 3, 4, 5모드의 불안정 영역이 중첩되며 왼쪽으로 치우친다.

(3) Winkler 지반변수와 전단지반변수가 커질수록 각 모드의 불안정 영역은 왼쪽으로 치우치고 불안정 영역이 축소된다.

이상의 결과로 지반변수의 크기, 면내응력의 크기 및 보강재의 유무 등은 판의 동적 안정에 영향을 주는 요인이며, 보강판의 휨 강성, 크기 및 두께를 변화시키고 또한 보강재의 제원을 조절함으로써 보강판의 불안정 영역을 제어할 수 있고 결과적으로 보강판의 안정성을 확보할 수 있다.

후 기

본 연구는 한국학술진흥재단의 연구비 지원(과제번호:KRF-2002-002-D00175)에 의해 수행되었으며, 한국학술진흥재단의 연구비 지원에 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

(1) Horenberg, J. A. G. and Kerstens, J. G. M., 1985, "Transverse Vibrations of Rectangular Plates on Inhomogeneous Foundations Part II: Modal Constraint Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 101, pp. 317~324.

(2) Celik, M. and Saygun, A., 1998, "A Method for the Analysis of Plates on a Two-parameter Foundation," *Journal of Computer & Structures*, Vol. 36, pp. 2891~2915.

(3) Matsunaga, H., 1997, "Buckling Instability of Thick Elastic Plates Subjected to In-plane Stresses," *Journal of Computer & Structures*, Vol. 62, No. 1, pp. 205~214.

(4) Yokoyama, T., 1988, "Parametric Instability of Timoshenko Beams Resting on an Elastic Foundation," *Computer & Structures*, Vol. 28, No. 2, pp. 207~216.

(5) Holopainen, T. P., 1995, "Finite Element Free Vibration Analysis of Eccentrically Stiffened

Plates," *Computers & Structures*, Vol. 56, No. 6, pp. 993~1007.

(6) Li, L. and Bettess, P., 1997, "Buckling of Stiffened Plates and Design of Stiffeners," *International Journal of Pressure Vessels & Piping*, Vol. 74, pp. 177~187.

(7) Srivastava, A.K., Datta, P. K. and Sheikh, A. H., 2003, "Buckling and Vibration of Stiffened Plates Subjected to Partial Edge Loading," *Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 45, pp. 73~93.

(8) Lee, B. K., Oh, S. J. and Park, K. K., 2002, "Free Vibrations of Shear Deformable Circular Curved Beams Resting on Elastic Foundations," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 2, No. 2, pp. 77~98.

(9) 이병구, 최규문, 이태은, 김무영, 2002, "미분구적법(DQM)을 이용한 탄성지반 위에 놓인 변단면 압축부재의 자유진동 해석," *한국전산구조공학회논문집*, 제 15 권, 제 4 호, pp. 629~638.

(10) 이용수, 이병구, 김선균, 2001, "Pasternak 지반 위에 놓인 Timoshenko 보-기둥의 안정해석," *한국강구조학회논문집*, 제 13 권, 제 1 호, pp. 91~100.

(11) 이용수, 김일중, 오숙경, 2003, "비균질 Pasternak 지반 위에 놓인 면내력을 받는 후판의 진동 해석," *한국강구조학회논문집*, 제 15 권, 제 3 호, pp. 291~298.

(12) 이용수, 김일중, 오숙경, 2003, "비균질 Pasternak 지반 위에 놓인 정방형 후판의 동적 안정 해석," *대한건축학회논문집*, 제 19 권, 제 4 호, pp. 45~54

(13) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., 1963, *Theory of Elastic Stability*, 2nd Ed., McGraw-Hill, New York.

(14) Matsunaga, H., 2000, "Vibration and Stability of Thick Plates in Elastic Foundations," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 126, No. 1, pp. 27~34.