한국 CAD/CAM 학회 논문집
제8권 제4호 2003년 12월 pp. 262-269

학술논문

# 가시화를 위한 단면곡선, 반사성질선, 점근선 생성 기법

남 종 호*

# Computation of Section Curves, Reflection Characteristic Lines, and Asymptotic Curves for Visualization

Nam, J. H.*

**ABSTRACT**

An approach to compute characteristic curves such as section curves, reflection characteristic lines, and asymptotic curves on a surface is introduced. Each problem is formulated as a surface-plane intersection problem. A single-valued function that represents the characteristics of a problem constructs a property surface on parametric space. Using a contouring algorithm, the property surface is intersected with a horizontal plane. The solution of the intersection yields a series of points which are mapped into object space to become characteristic curves. The approach proposed in this paper eliminates the use of traditional searching methods or non-linear differential equation solvers. Since the contouring algorithm has been known to be very robust and rapid, most of the problems are solved efficiently in realtime for the purpose of visualization. This approach can be extended to any geometric problem, if used with an appropriate formulation.

***Key words*** : characteristic curves, property surface, contouring algorithm, surface-plane intersection

## 1. 서 론

곡면-평면 교차와 컨투어링기법을 이용하면, 자유곡면의 형상처리과정에 관련된 특정 문제들을 효율적으로 해결할 수 있다. 단면곡선, 반사성질선, 점근선 등과 같은 특성선(characteristic curves)들은, 곡면의 질을 검증하는 유용한 성질을 지니고 있기 때문에 스타일링부터 검사까지 여러 설계단계에서 많이 이용되고 있다. 예전에는 곡면의 등가선(iso-parametric curves)이라는 수학적인 곡선을 주로 이용하였지만, 점차 특성선들을 활용하여 곡면설계시 공학적이고 기능적인 요소를 함께 고려하는 것이 새로운 설계파라다임으로 제시되고 있다.

효율적인 활용을 위하여 이러한 특성선을 빠른 시간에 생성하여 실시간에 가시화하는 것이 필요하다. 하지만 특성선을 구하기 위하여 종래의 탐색기법이나 미분방정식을 이용할 경우, 실시간은 물론이고 해의 안정성도 보장되지 않는 경우가 많다. 본 논문에서는 소개된 특성선들을 3가지 영역으로 분류하여 이들을 빠른 시간에 구할 수 있는 해법을 제시하고자 한다.

첫 번째 영역은 단면곡선 산출에 사용되는 곡면-평면의 교차문제이다. 이 문제는 자동차나 선박, 항공기 등과 같이 자유곡면을 다루는 공학 설계 문제에서 많이 쓰인다.

두 번째 영역은 최근에 활발하게 응용되고 있는 반사성질선을 계산하는 분야이다. 반사성질선은 빛의 물리적인 반사성질을 이용하여 곡면의 정도를 측정하는 도구로서, 단면곡선보다 한 단계 높은 측정기준을 제공한다. 전산기를 이용한 반사성질선에 관한 연구는, 최근 20년 동안 CAGD(Computer Aided Geometric Design) 분야에서 많이 다루어져왔다[1-4]. 반사성질선은 주로 미학적인 관심이 강조되는 자동차의 스타일링에서 많이 이용되고 있다.

세 번째 영역은 곡면의 변곡성질을 나타내는 곡선의 산출문제이다.

수학적인 측면에서 보면, 첫 번째 영역은 위치, 두 번째는 1차 미분, 그리고 마지막 영역은 2차 미분과 관련이 있다. 이러한 성질들은 4장에서 자세히 다루도록 한다.

*정회원, EDS PLM Solutions
- 논문투고일: 2003. 03. 28
- 심사완료일: 2003. 09. 05

위의 문제들을 해결하기 위한 노력은 여러 각도에서 다루어져 왔다. 앞서 설명한 바와 같이, 기존의 탐색기법이나 미분방정식을 이용한 해법은, 해의 안정성과 계산시간의 문제 때문에, 실시간이 요구되는 가시화 영역에서는 바람직하지 않다. 본 논문에서는 각 문제의 특성을 정식화한 후, 해당 문제를 곡면-평면 교차문제로 치환하여 해결하는 방법을 제시한다*. 일반적으로 곡면-평면의 교차분제는, 곡면-곡면 교차[5-7]의 단순화된 형태로, 해석적인 해를 가지지 않는다. 따라서 수치적인 방법으로 문제를 해결하고 있다. 본 논문에서는 수치적 해석 대신에 컨투어링기법을 이용한 효율적인 해법을 제시한다.

2장에서는 컨투이링기법의 개요를 설명하고, 3장에서는 함수성질곡면 생성과 함수곡면-평면 교차 기법을 기술한다. 소개된 특성선들에 대한 해법과 예제가 4장에 소개되고 5장에서 결론을 내린다.

## 2. 컨투어링 기법

수치적 컨투어링기법은 컴퓨터그래픽스 분야에서 널리 사용되어온 방법으로[8-10] 응용대상에 따라 다음 2가지 형태로 구분된다. 평면과 곡면의 각 미세 메쉬를 차례로 교차시켜, 미세 메쉬 내에서 등가선의 미세요소를 구한 후, 미세 등가선을 순서 없이 늘어놓는 방법이 첫 번째 형태이다. 두 번째 형태는 추적기법을 추가로 적용하여 첫 번째 형태에서 구해진 비정렬 등가선 요소를 순차적으로 정렬하는 것이다.

기하학적 문제에서 등가선을 하나의 엔티티로 활용하기 위해서는 정렬된 곡선의 정보가 필요하므로 두 번째 형태가 적합하다고 할 수 있다. 본 논문에서는 미시간대학에서 개발된 NISO 알고리즘을 이용하도록 한다[11].

NISO는 다음 2 단계를 걸쳐 등가선을 산출한다: 1) 곡면 메쉬의 모든 모서리를 주어진 평면과 교차시킨 후, 2) 구해 진 교차점들을 순차적으로 추적하여 곡선을 생성한다. 효과적인 추적을 위하여 NISO는 점점(vertex), 모서리(edge), 그리고 면(face)의 상관관계를 테이블화 한다(Fig. 1). NISO는 선형적인 계산을 수행하므로 매우 효율적이다. 에지테이블을 작성하는 것에 다소 시간이 걸리지만, 주어진 곡면에 대해 초기에 한 번만 작성하면 되므로, 반복적인 교차계산을 할 경우 매우 유리하다.

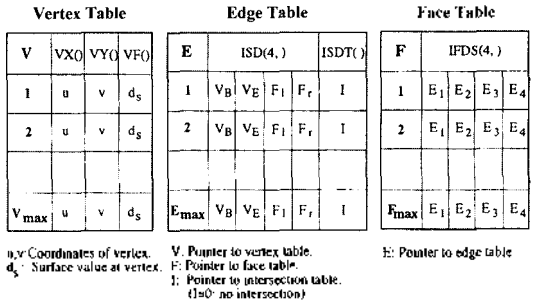



**Fig. 1.** NISO data structure[4].

## 3. 함수성질곡면 대 평면 교차

함수성질곡면(property surface 또는 functional property surface)은 구하고자하는 함수의 특성을 표현하는 곡면이다. 함수성질곡면의 형태는 기하학적 문제를 어떻게 함수화하는 가에 관계되므로, 주어진 문제에 대해 각기 다른 형태일 수도 있다. 함수성질곡면을 이용하여 교차문제의 해를 구하기 위한 절차는 1) 주어진 곡면의 격자를 만들고, 2) 각 격자에서 함수값을 계산하고 함수값의 분포를 표현해주는 새로운 함수곡면을 생성, 3) 생성된 함수곡면을 평면과 교차하여 해를 구한다. 각 절차를 아래에 자세히 설명한다.

### 3.1 격자 생성

첫 번째 순서는 해당 곡면의 격자를 생성하는 것이다. 격자 생성 시 특별한 제약조건은 없으나, 교차문제의 해의 정확도가 격자의 밀도에 비례하므로 가능한 잘게 나누는 것이 좋다. 하지만 밀도가 높을수록 계산 부담이 많아지므로 곡면형상의 복잡도를 고려하여 격자간격을 조정하는 기술이 요구된다.

격자 생성은 매개변수영역(parametric space)에서 이루어진다. 2차원 매개변수평면을 등간격으로 나누는 것이 일반적인 절차이다. 한 가지 문제점은, 곡면의 매개변수화 정도에 따라 (특히 bad parametrized 곡면에서) 매개변수영역에서 생성된 격자간격이 3차원영역(object space)의 간격과 많은 차이가 있을 수 있다는 점이다. 3차원영역의 등간격을 원한다면, 3차원의 표본점을 매개변수영역으로 역사상(inverse mapping)하는 작업을 거쳐야 한다.

### 3.2 함수성질곡면 생성

생성된 격자에서 해당 함수값을 계산한다. 곡면-평

*단면곡선산출을 위한 곡면-평면 교차와 용어를 구별하기 위하여 본 논문에서는 함수곡면-평면 교차라고 부르도록 한다.

면 교차문제의 경우 곡면의 각 격자 위치에서 평면까지 투영된 거리가 해당함수가 된다. 해당함수를 구하는 식은 다음 장에서 자세히 알아보도록 한다.

해당함수는 매개변수영역 격자위에서 이산적 분포를 가진 점들의 집합이 된다. 밀도는 격자의 밀도와 동일하나 분포는 일반적으로 비정규적이다. 이 점들은, 격자밀도에 비례하여 $m \times n$의 형태를 가지며, 곡면생성기법을 통하여 새로운 자유곡면으로 표현될 수 있다. 이 자유곡면을 함수성질곡면(또는 함수곡면)이라고 정의한다. 구하고자 하는 해의 정도 여부에 따라 함수성질곡면의 생성 방법을 달리 할 수 있다. 즉, 높은 정도가 요구되는 경우, 스키닝이나 데이터 맞춤(fitting), 또는 보간방법(interpolation)을 쓰고, 비교적 단순한 문제 혹은 격자의 간격이 매우 조밀할 때는 각 점들을 직선으로 잇는 폴리곤방법을 써도 무방하다. Fig. 2는 생성된 함수성질곡면의 예이다.

### 3.3 함수성질곡면 대 평면 교차

함수성질곡면은 매개변수 영역상에서 특정 계산값을 나타내는 곡면이다. 매개변수 평면과 평행한 임의의 평면은, 그 높이가 함수성질곡면을 구할 때 사용되었던 값 중 특정한 값을 의미한다. 즉, 함수성질곡면을 임의의 평면과 교차시킨다는 의미는, 함수성질곡면에서 평면의 높이와 동일한 값을 지닌 점들을 구한다는 것이다.

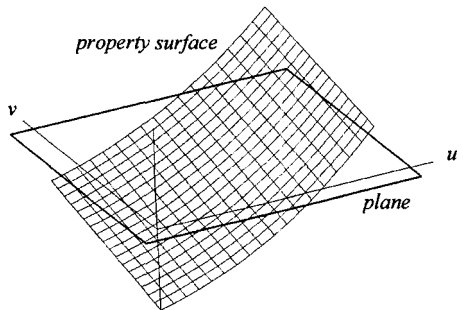



**Fig. 2.** A property surface.

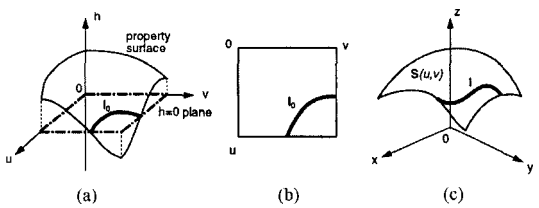



**Fig. 3.** Intersection between property surface and plane.

함수곡면-평면의 교차는 앞서 설명한 컨투어링기법을 이용하여 빠른 시간 내에 구할 수 있다. Fig. 3에, 주어진 함수성질곡면과 $h = 0$ 평면이 교차하는 과정을 도시화하였다. 컨투어링기법 적용 후에 구해진 점들을 연결한 선 $l_0$가 매개변수 영역상(Fig. 3(b))에 나타나 있다.

### 3.4 함수성질곡면 매핑

함수성질곡면 대 평면의 교차문제에서 얻어진 해의 형태는, 매개변수 좌표계에서 동일한 높이($h$)를 가진 점들의 집합이다.

구해진 컨투어 점의 매개변수값($u$, $v$)을 원래 곡면식($S(u, v)$)에 대입하면, 3차원영역에 있는 대응점을 구할 수 있다. 이 점들을 곡선보간법을 이용하여 연결하면 구하고자하는 최종 해가 나온다. 본 논문에서는 3차원 곡선보간을 위해 폴리라인을 이용하였다. 이 경우에는 실제곡선과 보간곡선간의 오차가 발생한다. 격자가 비교적 조밀할 경우 보간곡선이 아크형태를 지닌다고 가정할 수 있으므로, 최대오차는 직선(보간곡선)과 아크(실제곡선)의 오차로 표현된다.

Fig. 3(b)의 $l_0$를 3차원 영역으로 사상한 결과($l$)가 주어진 곡면($S(u, v)$)과 함께 Fig. 3(c)에 도시되어있다.

### 3.5 제약점

본 기법의 가장 큰 제약은 함수성질곡면이 단일함수(single-valued function)가 되어야 한다는 것이다. 한 격자에서 2개 이상의 해가 동시에 존재하게 되면 선택의 문제가 발생하고 따라서 해의 검증이 필요하게 된다. 하지만 공학설계에 쓰이는 상당수의 곡면형상은, 평면상으로 투영된다는 의미에서, 비교적 단순하기 때문에 (설계상, 복잡한 곡면은 여러 단순 조각으로 분할되기도 한다.) 대부분 단일함수를 이룬다.

또 한 가지 제약점은 함수성질곡면 산출, 교차해법 적용, 컨투어곡선, 그리고 교차곡선 보간 등에서 중첩된 오류의 크기이다. 각각의 계산단계에서 발생한 수치적 오류를 주어진 허용오류치 이하로 유지할 수 있는 정확한 방법을 구사하여야 하는데, 이는 대단히 어려운 문제이다. 참고로 보통 상용 캐드소프트웨어들이 지니고 있는 허용오류치는 0.001~0.005 mm 이다.

따라서 본고에서 제시된 방법은 되도록 가시화의 목적으로 활용하되, 만약 가시적인 목적을 넘어서 기하학적으로 정확한 결과를 원할 때는 허용오류를 고려한 격자구성을 시도하여야하고, 교차곡선 보간시 선형보간을 대신하는 방법을 고려하여야 한다.

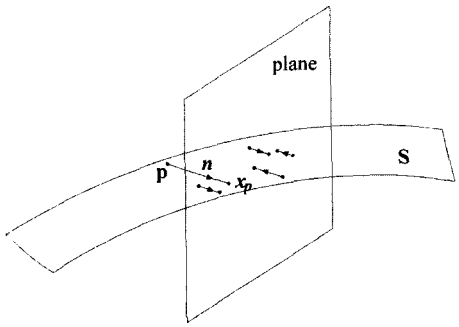



**Fig. 4.** Distance from surface points to plane.

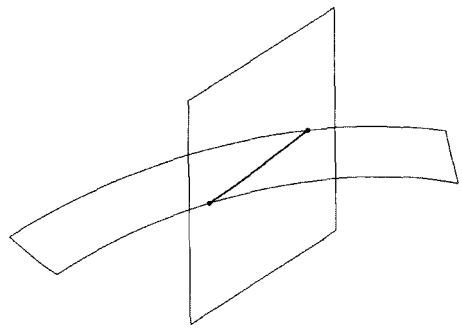


**Fig. 5.** Intersection line.

## 4. 기하학적 문제 응용

### 4.1 단면곡선 계산

단면곡선(section curves)은 임의의 곡면과 평면이 교차할 때 발생하는 평면곡선으로, 곡면을 검증하는 수단 외에도 설계에 필요한 도움선으로 널리 쓰인다. 단면곡선 생성에 필요한 곡면-평면 교차문제는 다음과 같이 정식화된다. 한 곡면이 한 평면과 교차할 때, 교차선에 있는 교차점은 반드시 곡면과 평면에 동시에 속한다는 사실을 이용한다. 즉 Fig. 4에 보여지듯이 곡면 상 임의의 점 중에서 평면으로 투영되었을 때 그 거리가 0인 점을 찾는 것이다.

임의의 평면식을 평면의 단위법선벡터 $\boldsymbol{n}$과 평면내 임의의 점 $\boldsymbol{x}_0$로 나타내면 다음과 같다:

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0. \tag{1}$$

곡면 상에 있는 임의의 점 $\boldsymbol{p}$로부터 평면에 투영된 점을 $\boldsymbol{x}_p$라 하면 $\boldsymbol{x}_p$는 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{n}$, 그리고 상수 $\lambda$로 표기된다:

$$\boldsymbol{x}_p=\boldsymbol{p}+\lambda\boldsymbol{n}. \tag{2}$$

$\boldsymbol{x}_p$를 평면식 $\boldsymbol{x}$에 대입하면 다음과 같은 관계식이 도출된다:

$$(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{n}=\lambda. \tag{3}$$

이 때 $|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{p}|$는 곡면에서 평면까지의 거리($d$)가 되므로, 해당함수($f(\lambda)$)는 $\lambda$가 된다.

Fig. 4에 예시된 곡면과 평면의 교차를 구해보면 다음과 같다. 우선 매개변수좌표의 각 점에서 $d$를 계산하여 함수성질곡면을 생성한다. Fig. 4의 곡면과 평면에 대하여 계산된 함수성질곡면이 Fig. 2에 property surface로 도시되어 있다. 주어진 곡면과 평면의 교차는 $d$가 0이 되는 점의 연속을 의미하므로, 함수성질곡면과 $d=0$인 평면(Fig. 2에서 plane)이 교차되는 궤적을 컨투어링기법을 이용하여 산출한다. 곡면의 식을 이용하여 3차원 공간좌표로 변환된 궤적이 바로 교차선이 된다(Fig. 5).

### 4.2 반사성질선 계산

반사성질선(Reflection characteristic lines)은 곡면식의 1차 미분에 관련된 곡면법선벡터로부터 결정된다. 반사성질선이 제공하는 패턴이 곡면의 질을 판단하는데 중요한 역할을 하기 때문에 곡면 설계 및 검증 분야에서 널리 사용되고 있다.

반사성질선의 물리학적 현상은 기본적으로 빛의 반사성질을 이용했다는 점에서는 동일하나, 정식화하는 과정 차이에서 다른 형태로 분류된다. 가상 고전적인 반사각과 입사각을 이용한 물리학적 반사선(reflect lines)[1,2], 등가선으로 표현되는 등가반사선(isophotes)[3], 물리학적 반사선을 개량한 하이라이트선(highlight lines)[4], CATIA반사선[12], 등이 소개되었다. 이 중 CATIA반사선과 하이라이트선은, 물리학적 반사선과는 달리, 관찰자 위치 의존적인 요소를 배제하고 있다. 결과로 다소 현실감이 떨어지기는 하지만, 곡면 측정 및 평가 면에서 편리한 면이 있어 주목을 받고 있다.

반사성질선이 CAGD응용에서 보여주는 가장 중요한 성질은 곡면의 연속성을 한 단계 (도함수의 미분차수) 과장하여 보여준다는 것이다. 여기서 곡면의 연속성이란 매개변수적 연속성(parametric continuity, $C^n$) 또는 기하학적 연속성(geometric continuity, $G^n$)을 의미한다. 본 논문에서는 기하학적 연속성으로 통일하여 부르도록 한다. 만일 두 곡면이 위치연속성($G^0$)만 가지고 접합되었을 경우, 또는 한 곡면 내에서 꺾인 부분이 있을 경우, 접합 부위에 반사성질선을 계산하여 보면 반사성질선이 위치불연속성($G^{-1}$)을 나타내 준다. 즉 곡면이 $G^n$이라면, 반사성질선은 한 차수 낮은

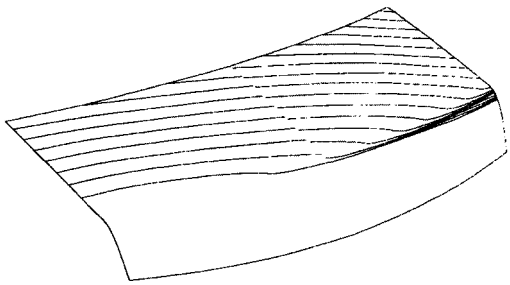


**Fig. 6.** Discontinued reflection characteristic lines[4].

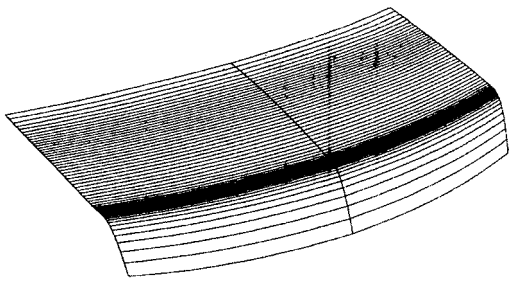


**Fig. 7.** Deck lid with iso-parametric lines[4].

$G^{n-1}$이 되는 것이다. 한 예가 Fig. 6과 7에 보여지고 있다.

자동차 트렁크리드와 같이 대칭성이 있는 부품들은 통상 반쪽만 모델링된 후 미러링(mirroring)을 통하여 접합된다. 접합상태가 위치연속성만 가지고 있다하더라도, 경우에 따라서는 곡면의 상태가 순정된(fairing) 것처럼 보일 수가 있다(Fig. 7). 이런 경우에는 곡면의 등가선, 단면곡선 등으로는 그 상태를 바르게 점검할 수가 없다. 그러나 반사성질선을 계산해 보면 접합부분에서 반사성질선의 불연속이 나타남을 바로 알 수 있다(Fig. 6). 따라서 트렁드리드는 단지 위치만 연속하다고 판별할 수 있다. 곡면의 검증에 매우 유용한 도구이다.

4.2.1 반사선

반사선(reflect lines)은 사용자의 눈 위치벡터($\mathbf{e}_p$)와 선형광원벡터(**L**, linear light source)가 주어졌을 때, 곡면 상에서 법선벡터(**n**)에 대하여 거울처럼 반사시켜주는 점들의 집합으로 정의된다. Fig. 8이 예시하듯이, 사용자가 마치 선형광원을 곡면 상에서 보는 것과 같다. 컨투어링기법과 반사맵을 이용한 해법이 발표된 바 있다[13].

반사선은 사용자 눈의 위치에 따라서 변화한다. 이는 곡면의 질을 검증하는 복적에, 한편으로는 부합되

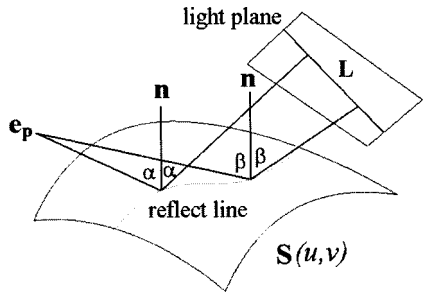



**Fig. 8.** Definition of reflect line.

나, 또 다른 한편으로는 사용자 위치에 따라 계속 반사선 계산을 갱신해야하는 번거로움이 따른다. 복잡한 곡면의 경우 당연히 소요시간이 증가하므로 바람직하지 못한 단점이 된다. 또한 복수의 사용자가 실제로 결코 같은 반사선을 볼 수 없기 때문에 ($\mathbf{e}_p$의 위치가 다르기 때문에)결과에 대한 이견이 있는 경우도 발생한다.

4.2.2 등가반사선

등가반사선(isophotes)은 반사선과 같은 맥락으로 여겨지는 또 다른 반사성질선이다. 반사선과 등가반사선이 소개된 이후로, 한편으로는 등가반사선을 반사선의 특별한 종류로 분류하기도 하고[14], 또 다른 한편으로는 양자를 구분하기도 하는[15] 논란이 있었다. 최근에는 두 특성선들이 일부 겹치기는 하나 본질적으로 다르다는 문헌이 발표된 바 있다[16]. 수학적인 본질의 차이는 있다손 치더라도, 응용 측면에서 보면 그러한 구분이 별 의미가 없다고 할 수 있다.

등가반사선은 다음 식으로 정의된다(Fig. 9):

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = cos(\alpha) = c, \quad c \in [-1, 1] \tag{4}$$

주어진 곡면에 대하여 **e**와 $\alpha$를 고정시키면, 등가반사선은 곡면 법선벡터의 함수가 된다. 즉 곡면의 법선벡터가 곡면의 질을 결정하게 된다. 식 (4)의 좌변을

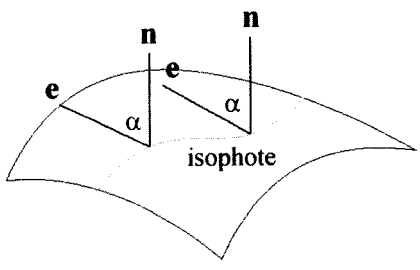



**Fig. 9.** Definition of Isophote.

해당함수로 삼고 함수성질곡면을 생성한 후, 우변의 $c$를 변화시키면 여러 각도에 따른 등가반사선을 구할 수 있다.

#### 4.2.3 하이라이트선

반사선은 사용자의 위치에 따라서 변하는 단점이 있다고 앞서 기술한 바 있다. 이런 단점을 보정하기 위한 방법으로 하이라이트선이 제안되었다. 하이라이트선은 곡면의 점들 중에서 그 법선벡터(**n**)가 주어진 선형광원선(**L**)을 교차하고 지나는 점들의 집합으로 정의된다.

물리적으로는 사용자가 해당 곡면과 함께 움직이는 것과 같은 효과를 준다. 따라서, 하이라이트선은 사용자의 위치에 관계없이 항상 같은 위치에 존재하게 된다. 이러한 점은 설계단계에 따라 장점이 될 수도, 단점이 될 수도 있으므로 반사선과 하이라이트선을 적절하게 구분하여 사용하는 것이 좋다.

해당함수는 **n**과 **L**간의 거리 $d$로 표현되며, 거리 $d$가 0인 점들이 바로 하이라이트선이 된다:

$$d = |(\mathbf{B}\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{Q})| / \|\mathbf{B}\times\mathbf{n}\| \qquad (5)$$

거리 $d$는 항상 양수이기 때문에 함수성질곡면에서 $d=0$인 해를 찾는 것은 접면을 구하는 문제로 수치계

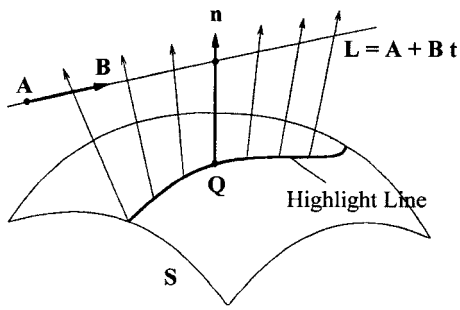



**Fig. 10.** Definition of highlight line[4].

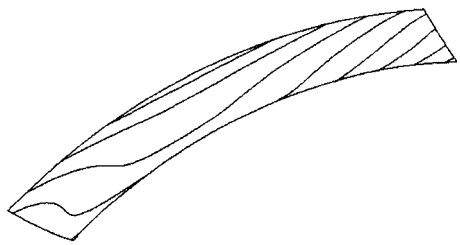


**Fig. 11.** Highlight lines on wheel-well surface.

산상 어려움이 많이 따른다. 거리 $d$ 대신 부호를 가지는 거리 $d_s$로 바꾸면 함수성질곡면은 음수와 양수 영역에 걸친 곡면으로 치환되어 곡면-평면 교차문제를 비교적 수월하게 처리할 수 있다. 거리 $d_s$는 식 (5)에서 분자의 절대값을 제거한 형태가 된다.

자동차 바퀴주위의 곡면에 대하여 계산된 하이라이트선이 Fig. 11에 나타나 있다.

### 4.3 점근선 계산

앞서 기술한 반사성질선이 1차 미분에 관련된 함수라면 곡면의 변곡을 나타낸다고 알려진 점근선(asymptotic curves)은 2차 미분과 관련되는 함수라 할 수 있다. 점근선은, 곡면 상에서 곡률이 0이 되는 점들의 집합으로 정의된다.

곡면의 곡률($\kappa_n$, normal curvature)은 미분기하학의 계수들로 이루어져 있으며 다음과 같이 정의된다.

$$\kappa_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{II}{I} \qquad (6)$$

여기서 $E$, $F$, $G$는 곡면의 제1계수이고 $L$, $M$, $N$은 제2계수이다. 자세한 수학적 내용은 미분기하학을 다루는 여러 문헌을 참조하기 바란다[17].

전통적으로 점근선을 구하는 방법은 비선형 미분방적식을 수치적으로 푸는 것이다 (대표적으로 Runge-Kutta 방법이 많이 사용되고 있다). 대부분의 미분방적식의 해법에는 "좋은" 초기값이 필수적이다. 즉 어떤 형태로든 초기값이 주어져야 하는데, 이 역시 수치적 추적기법을 사용하기 때문에 효율성에 문제가 있다. 복잡한 곡면에 대하여 모든 점근선을 구하고자 할 경우, 각 점근선이 시작하는 점들을 미리 구하여야 하므로 문제가 더욱 복잡하여진다.

본 논문에서 소개한 함수곡면-평면 교차해법을 이용할 경우 미분방적식을 풀 필요가 없다. 따라서, 초기치를 산정할 필요가 없어지고, 또한 모든 점근선을 주어진 격자의 정도에 따라 일시적으로 구할 수 있으므로 매우 효율적이 된다.

법선곡률 $\kappa_n$은 식 (6)로 표현되므로, 분모가 항상 양이라고 가정하면 (분모는 $d_u = d_v = 0$인 경우를 제외하고는 항상 양수이다.), $\kappa_n = 0$은 곧 분자가 0이 되는 것을 뜻한다. 따라서 분자($II$)를 $f(\lambda)$라는 해당함수로 정의한다:

$$f(\lambda) = L + 2M\lambda + N\lambda^2 \quad \text{where} \quad \lambda = \frac{dv}{du} \qquad (7)$$

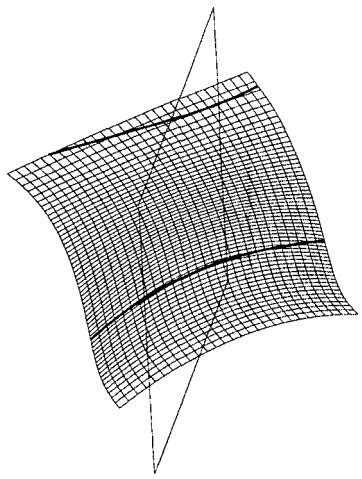


**Fig. 12.** Asymptotic curves for a certain direction.

각 격자 상에서 $f(\lambda)$를 계산한 후, 함수성질곡면을 형성하고, 함수성질곡면이 0이 되는 교차선을 구하면 이 교차선이 바로 점근선이다.

점근선은 가우시안곡률(Gaussian curvature)이 음인 영역에서 나타난다. 예로 음의 가우시안곡률 영역을 포함한 한 곡면에 대한 결과를 Fig. 12에 실었다. 마름모로 나타난 사각평면이 점근선의 결정방향($\lambda$)을 나타낸다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 자유곡면 모델링 문제에서 흔히 발생되는 특성곡선 산출에 관한 기법을 소개하였다. 곡면의 설계단계에서 흔히 접하는 단면곡선 산출, 곡면의 질을 검증하기 위한 방법으로 쓰이는 반사성질선 계산, 곡면의 변곡성질을 판별할 수 있는 점근선 계산 등에 대해, 우선 각 문제의 기하학적 특성을 파악하여 함수성질곡면을 생성하고, 이 함수성질곡면과 구하고자 하는 값을 나타내는 평면과의 교차를 수행하였다. 함수성질곡면과 평면의 교차문제를 효율적으로 풀기 위하여 컨투어링기법을 채택하였다. 이로서, 기존의 방법인 비선형 미분방정식을 풀지 않고도, 특성곡선을 산출하므로써 특성곡선의 실시간 가시화를 구현하여 준다.

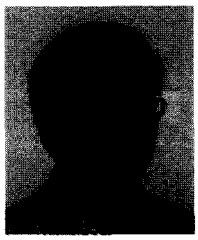
본 방법에 의한 결과는 주로 가시화 목적으로 쓰이는 것을 전제로 한다. 컨투어링기법 활용에 소요되는 대부분의 시간은 에지테이블 작성에 쓰이는데, 가시화의 경우 처음 한 번만 에지테이블을 작성하면 되므로 이 후에는 매우 신속하게 해를 구할 수 있다. 특성곡선 산출에 연루된 단계별 오류들의 중첩으로 인하여, 정확한 곡선을 구하고자 할 때는 주의를 하여야 한다.

소개된 방법은 본 논문에 예시된 특성곡선 외에 다른 기하학문제에서도 쉽게 적용될 수 있다. 필요한 것은 기하학적 특성을 파악하여 적절한 함수성질곡면을 효율적으로 생성하는 일이다.

## 참고문헌


1. Klass, R., "Correction of Local Surface Irregularities Using Reflection Lines," *Computer Aided Design*, Vol. 12, No. 2, pp. 73-77, 1980.
2. Kaufmann, E. and Klass, R., "Smoothing Surfaces Using Reflection Lines for Families of Splines," *Computer Aided Design*, Vol. 20, No. 6, pp. 312-316, 1988.
3. Poeschl, T., "Detecting Surface Irregularities Using Isophotes," *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 1, No. 2, pp. 163-168, 1984.
4. Beier, K. and Chen, Y., "Highlight-line Algorithm for Realtime Surface Quality Assessment," *Computer Aided Design*, Vol. 26, No. 4, pp. 268-277, 1994.
5. Bajaj, C. *et al.*, "Tracing Surface Intersections," *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 5, No. 4, pp. 285-307, Nov. 1988.
6. Barnhill, R. and Kersey, S., "A Marching Method for Parametric Surface Intersection," *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 7, No. 1-4, pp. 257-280, June 1990.
7. 조두연 외, "곡면간의 교차곡선 계산을 위한 개선된 Tracing 알고리즘," 한국CAD/CAM학회 논문집, 제4권, 제3호, pp. 269-283, 1999.
8. Palmer, J., "An Economical Method of Plotting Contours," *Austral. Comput. J.*, Vol. 2, No. 1, pp. 27-31, 1970.
9. Preusser, A., "TRICP: A Contour Plot Program for Triangular Meshes," *ACM Trans. Math. Soft.*, Vol. 10, pp. 473-475, 1984.
10. Sutcliffe, D., "Contouring Over Rectangular and Skewed Rectangular Grids - An Introduction," in Brodlie, K. (Ed.) Mathematical Methods in Computer Graphics and Design, Academic Press, 1980.
11. Beier, K.-P., "VIEWX - ISOX, Documentation of a Program System to Create Graphics Representations and Countour Plots of a Thress Dimensional Surface," Department of Naval Architecture and Marine Engineering, The University of Michigan, October 1987.
12. Lu, Y., "Direct Manipulation of Curve and Surface Properties Using a Piecewise Polynomial Basis Function," Ph.D. dissertation, University of Michigan, Ann Arbor, 1995.

13. Kang, J. *et al.*, "Efficient Algorithm for Real-time Generation of Reflection Lines," *KSME International Journal*, Vol. 15, No. 2, pp. 160-171, 2001.
14. Farin, G., *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, 4th Ed. Academic Press, Boston, 1996.
15. Hagen, H. *et al.*, "Surface Interrogation Algorithms," *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 12, No. 5, pp. 53-60, 1992.
16. Theisel, H., "Are Isophotes and Reflection Lines the Same?," *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 18, pp. 711-722, 2001.
17. Struik, D., *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover Publications, New York, 1961.



**남 종 호**

1985년 서울대학교 조선공학과 학사
1988년 미국 메사추세스공과대학 해양공학과 석사
1988년~1994년 한국기계연구원(대덕선박분소)
1998년 미국 미시간대학교 조선해양공학과 박사
1999년~현재 미국 EDS PLM Solutions
관심분야: 조선 CAD/CAM, 가시화 및 가상현실, 자유형상 곡선 및 곡면 설계