

치차-분지계를 갖는 비틀림 축계의 설계를 위한 위험속도 계산

최명수

부경대학교

Computation of Critical Speeds for Design of Torsional Shafting with Gear-Branches Systems

Myung-Soo CHOI

Pukyong National University

Abstract

While designing a torsional shafting with various gear-branches systems, it is very important for system designers to obtain critical speeds accurately and easily. The author has studied the transfer stiffness coefficient method (TSCM) as a structural analysis algorithm. In this paper, the TSCM is applied to the computation of critical speeds for torsional shafting with gear-branches systems. The accuracy of the present method is confirmed by comparing with the results of the finite element method.

Key words : critical speed(위험속도), gear-branches system(치차-분지계), torsional vibration(비틀림 진동), machine design(기계설계), transfer stiffness coefficient method(전달강성계수법)

서 론

선박, 자동차, 항공기 등과 같은 운송용 기계 시스템을 설계할 때 반드시 고려해야 할 사항 중 하나가 시스템의 안정성과 효율성을 확보하는 일이다.

선박의 추진축계는 크게 주기관과 프로펠러 그리고 이를 연결하는 축으로 구성되는데, 주기관 자체는 그 제작사에 의해 최적의 상태로 제작되었다 하더라도 주기관에 비해 상대적으로 큰 관성모멘트를 갖는 프로펠러와 상대적으로 적은 비틀림 강성을 갖는 중간 축 및 프로펠러축으로 인해 전체 시스템의 동특성은 주기관의 동특성과 많은 차이가 발생한다. 그리고 어선과 같은 소형 선박에서는 선내의 발전기를 비롯한 각종 보조기계를 주기관에 의하여 구동하는 PTO

(Power Take Off) 시스템을 구축한 경우가 많다. 이러한 시스템에서는 선박 전체의 에너지 사용을 줄일 수 있으므로 경제적인 면에서 효과적이지만, 동력 전달장치가 복잡해지므로 전체 시스템에 대한 구조해석이 난이해지는 어려움이 있다. 따라서 복잡한 치차-분지계(gear-branches system)로 구성된 동력전달 축계의 설계시에 설계 초기단계에서부터 시스템의 안정성을 확보할 필요가 있으며, 이를 위해서는 설계자들이 쉽게 이용할 수 있는 정적·동적 구조해석기법이 필요하다.

현재 산업체에서 추진축계의 설계시에 널리 이용되는 해석기법으로는 전달행렬법(transfer matrix method)¹⁾ 과 유한요소법(finite element method)²⁾ 이 있다. 그러나 전달행렬법은 복잡한 치차-분지계를 해

* 이 논문은 2003년도 두뇌한국21사업에 의하여 일부 지원되었음.

†Corresponding author : vibsound@hanmail.net

석하기에는 해석기법의 구조상 곤란한 점이 많고³⁾, 유한요소법은 구조적으로 연속계⁴⁾ 모델링을 채용할 수 없는 취약점이 있다. 저자는 설계자들이 쉽게 이용할 수 있는 새로운 구조해석기법의 개발에 관한 연구를 수행한 바 있고, 그 결과 전달강성계수법(transfer stiffness coefficient method)을 개발하여 제안한 바 있다⁵⁻⁷⁾. 이 방법은 절점강성계수(nodal stiffness coefficient)의 축차 전달에 기본개념을 두고 있으며, 특히 대형 컴퓨터에 비해 계산 시간이나 계산 메모리가 적은 퍼스널 컴퓨터 상에서도 우수한 계산 결과를 얻을 수 있는 장점을 가지고 있다.

본 논문에서는 선박, 차량 등의 동력전달장치에서 쉽게 접할 수 있고 공학적으로도 중요한 차차-분지계를 갖는 축계를 설계할 때 중요한 사항인 비틀림진동으로 인한 축계의 위험속도를 구하는 알고리즘을 전달강성계수법으로 정식화한다. 그리고 수치계산 결과를 통하여 본 해석기법의 유용성을 확인한다.

모델링 및 계산 방법

1. 분지계의 모델링

치차(gear)로 연결된 다양한 형태의 분지계(branch system)를 하나의 주계(main system)와 주계에 연결되는 부분계(subsystem)로 고려한다. 부분계는 그 하위에 또 다른 분지계를 가질 수 있다. 주계와 부분계를 연결하는 치차는 강체로 모델링하고 백래쉬(backlash)가 없이 원활하게 동력을 전달한다고 가정한다. 본 논문에서는 Fig. 1과 같은 분지계를 대상으로 전달강성계수법으로 위험속도를 구하기 위한 비틀림진동해석 알고리즘을 정식화한다.

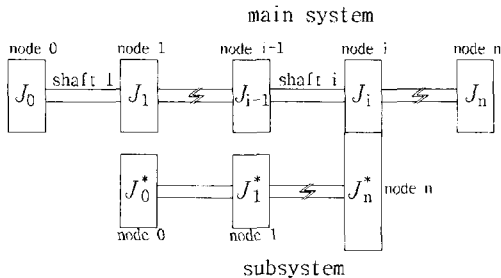


Fig. 1. Analytical model.

주계와 부분계는 이산계(discrete system) 또는 연속계(continuous system)로 모델링된 축요소(shaft element)와 회전하는 집중 원판으로 구성된다. 본 연구에서 절점(node)이란 계의 좌단과 우단 그리고 집중원판이 존재하는 주계 및 분지계의 해석상 분할점을 뜻하고, 좌단에서 우단까지 각 절점을 순차적으로 절점 0, 절점 1, ..., 절점 n 이라 부른다.

2. 절점강성계수의 정의 및 전달

본 해석 알고리즘의 특징인 전달과정을 쉽게 설명하기 위하여, 하나의 절점을 절점 좌측과 절점 우측의 두 개의 점으로 나누어 생각한다. i 번째 집중원판의 좌측을 절점 i 의 좌측이라 하고, i 번째 집중원판의 우측을 절점 i 의 우측이라 한다.

절점 i 의 좌측 및 우측에서 각변위(θ)와 토크(T) 사이의 관계를 다음 식과 같이 정의한다.

$$\overline{T}_i = \overline{S}_i \theta_i \dots \dots \dots (1)$$

$$T_i = S_i \theta_i \dots \dots \dots (2)$$

여기서 \overline{S}_i 와 S_i 를 각각 절점 i 의 좌측과 우측의 절점강성계수(nodal stiffness coefficient)라 정의한다. 본 연구에서 하첨자 i 는 절점 i 또는 i 번째 축에 관한 물리량을 뜻하고, 상태변수 T 와 S 위에 $-$ 를 붙인 것은 절점 좌측의 상태량을, T 와 S 위에 아무 것도 없는 것은 절점 우측의 상태량을 뜻한다. 그리고 T, S, θ 등에 $*$ 를 붙인 것은 부분계에 관한 상태량을 나타낸다.

Fig. 2와 같은 i 번째 축요소의 좌우측, 즉, 절점 $i-1$ 의 우측과 절점 i 의 좌측사이의 토크와 각변위 사이의 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있고,

$$\begin{bmatrix} T_{i-1} \\ \overline{T}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{i-1} \\ \theta_i \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3)$$

강성계수 A_i, B_i, C_i, D_i 는 축요소를 연속계로 모델링할 경우,

$$D_i = -A_i = B_i \cos \beta_i,$$

$$B_i = -C_i = \frac{GI_p \beta_i}{l \sin \beta_i}, \dots \dots \dots (4)$$

$$\beta_i = l\omega \sqrt{\frac{\rho}{G}}$$

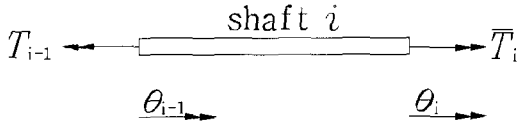


Fig. 2. Shaft element.

이고, 여기서 ω 는 축계의 고유진동수, l 은 축요소의 길이, ρ 는 밀도, I_p 는 축 단면의 극관성모멘트, G 는 횡탄성계수이다. 축요소를 이산계로 모델링할 경우 또는 복잡한 축계를 등가 비틀림 스프링으로 모델링 할 경우에는 강성계수는

$$A_i = C_i = -K_i, \quad B_i = D_i = K_i \quad \dots \dots (5)$$

이고, 여기서 K_i 는 축의 비틀림 스프링상수이다.

절점 $i-1$ 우측의 절점강성계수 S_{i-1} 을 알고 있다면, 식(1)과 식(3) 그리고 식(2)의 i 대신에 $i-1$ 을 대입한 식으로부터, 절점 i 좌측의 절점강성계수 \bar{S}_i 를 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\bar{S}_i = D_i + C_i V_i \quad \dots \dots (6)$$

여기서

$$V_i = (S_{i-1} - A_i)^{-1} B_i \quad \dots \dots (7)$$

이다.

절점 i 에 질량극관성모멘트가 J_i 인 집중원판이 있으면 절점 i 좌우측의 토크는 달라지고, 이들의 관계는

$$T_i = \bar{T}_i - \omega^2 J_i \theta_i \quad \dots \dots (8)$$

로 나타낼 수 있다.

식(1)과 식(2)를 식(8)에 대입하여 정리하면, 절점 i 좌측의 절점강성계수 \bar{S}_i 로부터 절점 i 우측의 절점강성계수 S_i 를 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$S_i = \bar{S}_i - \omega^2 J_i \quad \dots \dots (9)$$

회전축계는 구조적으로 양단의 경계조건이 자유이므로, 시작단인 절점 0 좌측의 토크 \bar{T}_0 는 0이 된다.

따라서 식(8)로부터 절점 0 우측의 토크는

$$T_0 = -\omega^2 J_0 \theta_0 \quad \dots \dots (10)$$

가 되고, 상기 식과 식(2)의 i 에 0을 대입한 식으로부터 절점 0 우측의 절점강성계수 S_0 를 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$S_0 = -\omega^2 J_0 \quad \dots \dots (11)$$

따라서 집중원판과 축요소로 구성된 축계에서는 식(11)을 시작으로 식(6)과 식(9)의 i 에 1, 2, ..., n 을 연속적으로 대입하면 모든 절점의 절점강성계수를 순차적으로 전달하면서 구할 수 있다.

Fig. 1과 같이 주계의 절점 i 에 부분계가 치차로 연결된 경우에 절점강성계수의 전달식은 다음과 같이 정식화할 수 있다. 주계와 부분계를 연결하는 Fig. 3의 치차요소에서 주계축 잇수가 Z_j , 분지계축 잇수가 Z_i^* 일 때, 치차의 속력비(r)는

$$r = Z_j / Z_i^* \quad \dots \dots (12)$$

이고, 주계와 부분계의 연결점에서 토크와 각변위 사이의 관계는 다음과 같다.

$$T_n^* = -\frac{1}{r} \bar{T}_i^* \quad \dots \dots (13)$$

$$\theta_n^* = -r \theta_i \quad \dots \dots (14)$$

주계의 절점 i 에서 토크의 평형식으로부터

$$T_i = \bar{T}_i + \hat{T}_i^* - \omega^2 J_i \theta_i \quad \dots \dots (15)$$

가 되고, 상기 식에 식(1), (2), (13), (14) 그리고 부분계의 끝점인 절점 n 에서 정의식인 $T_n^* = S_n^* \theta_n^*$ 를 이용하면, 주계의 절점 i 우측의 절점강성계수 S_i 를 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$S_i = \bar{S}_i - \omega^2 J_i + r^2 S_n^* \quad \dots \dots (16)$$

따라서 주계의 절점 i 에 부분계가 치차로 연결된 경우에는 먼저 부분계에 식(11), (6), (9)를 순차적으로 적용하여 부분계의 마지막 절점까지 절점강성계수를 전달한 후, 식(16)을 이용하여 주계의 절점 좌우측의 절점강성계수를 전달할 수 있다. 부분계가 없을 경우, 집중원판의 전달식인 식(9)와 부분계가 존재할 경우의 전달식인 식(16)을 비교하면 결국 분지계도 하나의 추가 강성($r^2 S_n^*$)으로 쉽게 처리할 수

있다는 것을 알 수 있다. 한편, 절점 i 에 연결된 부분계가 다수개이고 각각의 부분계가 동일한 경우에는 각각의 부분계마다 전달식을 구할 필요없이 하나의 부분계에 대한 추가 강성을 구한 후, 부분계의 개수만큼 주계의 결합점에 강성을 추가하면 되므로 무척 편리하다.

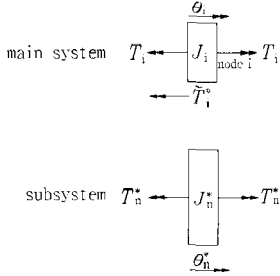


Fig. 3. Gear element.

3. 진동수방정식과 고유모드의 계산

회전축계는 구조적으로 주계 우단의 경계조건이 자유이므로 절점 n 에서 $T_n = 0$, $\theta_n \neq 0$ 가 되므로, 식 (2)로부터 진동수 방정식을 다음식과 같이 유도할 수 있다.

$$S_n(\omega) = 0 \dots\dots\dots(17)$$

따라서 식(17)에 이분법(bisection method)이나 선형보간법(linear interpolation method)을 적용하면 차차-분지계를 갖는 축계의 고유진동수를 계산할 수 있다.

식(2)의 i 대신에 $i-1$ 을 대입한 식을 식(3)과 식 (7)로부터, i 번째 축요소 좌우측 절점에서의 각변위 사이의 관계식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\theta_{i-1} = V_i \theta_i \dots\dots\dots(18)$$

고유모드는 비값이므로, 우선 주계의 끝단인 절점 n 의 각변위 θ_n 을 1로 정한다. 그리고 식(18)로부터 주계의 끝단인 절점 n 에서 주계의 시작단인 절점 0까지 순차적으로 각 절점의 각변위를 연속적으로 계산한다. 분지계 끝단의 각변위는 식 (14)로부터 구할 수 있으므로, 분지계 역시 식 (18)을 이용하여 분지계의 시작단인 절점 0까지 순차적으로 분지계 각 절점의 각변위를 계산한다. 주계와 분지계의 모든 절점

에서 각변위를 계산한 후, 끝으로 각변위 중 가장 큰 값이 1이 되도록 정규화 한다.

4. 위험속도의 계산

왕복동기관의 크랭크축에서 관성력과 가스압력에 의한 주기적인 변동토크가 작용하므로, 2행정 기관에서는 회전속도에 대해 1차, 2차, 3차 이상의 고차 진동 토크가 축계에 가해진다. 4행정 기관에서는 회전속도에 대해 0.5차, 1차, 1.5차 등의 진동 토크가 축계에 작용한다. 진동 토크의 진동수 중 하나가 고유진동수와 일치하면 공진현상이 발생하고, 이때의 속도를 축계의 위험속도라고 한다. 축계의 위험속도(Ω_j)를 계산하는 식은 2행정기관에서는

$$\Omega_j = \frac{\omega}{j} \quad (j=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots(19)$$

이고, 4행정기관에서는

$$\Omega_j = \frac{\omega}{j} \quad (j=0.5, 1, 1.5, \dots) \dots\dots\dots(20)$$

이다.

계산 결과 및 고찰

1. 차차 연결된 박용 추진축계의 위험속도

길이 26m, 최대 폭 5.6m, 배수톤수가 64톤인 소형 고속 선박의 추진축계를 모델링한 것이 Fig. 4이다. 부분계의 절점 0에서 절점 5까지가 18기통 4행정 디젤기관을 모델링한 것이고, K_6^* 은 진동 댐퍼의 비틀림 강성을 나타낸다. 부분계의 절점 7부터 주계의 절점 1까지가 기어 박스에 해당되고, K_2 와 K_3 는 중간축, K_4 는 프로펠러축의 비틀림 강성이다.

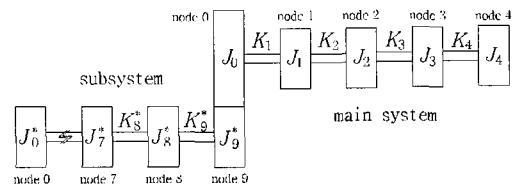


Fig. 4. Computation model I.

J_4 는 부가수 효과를 고려한 프로펠러의 질량극관성모멘트이고, 기어박스 내의 치차의 속력비는 70/39이다. 구체적인 질량극관성모멘트와 비틀림 스프링 상수는 Table 1과 Table 2에 나타내었다.

Table 1. Mass moment of inertia for computation model I [unit : $kg \cdot m^2$]

Node	Subsystem	Main system
0	0.30	1.50
1	0.30	0.40
2	0.30	0.70
3	0.30	2.70
4	0.30	7.20
5	0.45	-
6	0.40	-
7	0.15	-
8	1.00	-
9	0.20	-

Table 2. Torsional stiffness for computation model I [unit : $N \cdot m / rad$]

Node	Subsystem	Main system
1	3.0×10^6	6.0×10^6
2	3.0×10^6	2.5×10^6
3	3.0×10^6	8.5×10^5
4	3.0×10^6	9.5×10^5
5	3.0×10^6	-
6	4.0×10^6	-
7	2.5×10^6	-
8	1.0×10^6	-
9	1.5×10^8	-

전달강성계수법(TSCM)과 유한요소법(FEM)으로 계산 모델 I에 대한 1차부터 5차까지의 고유진동수

를 계산한 결과를 Table 3에 나타내었다. 양 방법의 계산 결과가 잘 일치하였다.

Table 3. Natural frequencies of computation model I [unit : Hz]

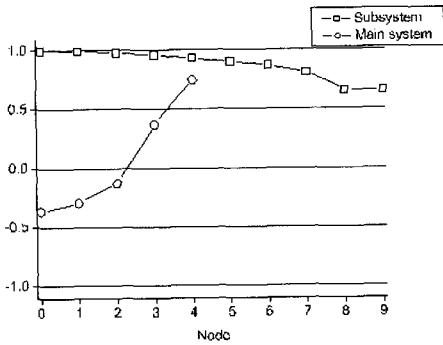
Order	TSCM	FEM
1	41.07	41.07
2	108.06	108.06
3	135.68	135.68
4	235.11	235.11
5	317.49	317.49

Table 4는 계산모델 I에 대한 자유진동해석 결과인 1차 고유진동수와 2차 고유진동수로부터 축계의 위험속도를 계산한 결과이다. 축계의 주기관이 18기동 4행정 기관이므로 9차 위험속도인 274rpm과 720rpm이 주위험속도(major critical speed)가 된다.

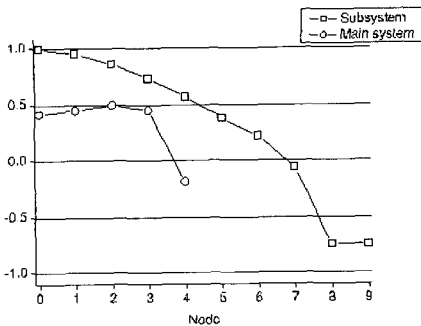
Table 4. Critical speeds of computation model I [unit : rpm]

Order	1st frequency	2nd frequency
0.5	4929	12968
1.0	2464	6484
1.5	1643	4323
2.0	1232	3242
2.5	986	2593
3.0	821	2161
3.5	704	1852
4.0	616	1621
4.5	548	1441
5.0	493	1297
5.5	448	1179
6.0	411	1081
6.5	379	998
7.0	352	926
7.5	329	865
8.0	308	810
8.5	290	763
9.0	274	720

Fig. 5는 전달강성계수법으로 1차와 2차 고유모드를 계산한 결과이다. 1차 고유모드는 주계의 절점 2와 절점 3 사이인 중간축에서 절이 나타났다. 2차 고유모드는 2개의 절이 나타났는데, 하나는 주계의 절점 3과 절점 4 사이인 프로펠러축이고, 다른 하나는 분지계의 절점 6과 절점 7 사이의 진동멤버에서 절이 나타났다.



(a) 1st mode shape



(b) 2nd mode shape

Fig. 5. Natural modes of computation model I.

2. PTO시스템을 갖는 박용 추진축계의 위험속도

Fig. 6은 부경대학교 실습선 가야호의 추진축계를 모델링한 것이다. 주기관의 동력으로 2개의 펌프를 동시 구동할 수 있는 PTO시스템을 장착하고 있다. 펌프와 차차로 구성된 부분계 1, 2는 동일한 사양이

며, 주계와 부분계 차차의 속력비는 5.823이다. 주계의 절점 4에서 절점 9까지가 6기통 2행정 디젤기관의 실린더 위치에 해당되고, 주계의 절점 11이 플라이휠, 그리고 절점 17이 프로펠러에 해당된다. K_{13} 과 K_{14} 는 중간축, K_{17} 은 프로펠러축의 비틀림 강성이다. 주계와 부분계의 구체적인 질량극관성모멘트와 비틀림 스프링상수는 Table 5와 Table 6에 나타내었다.

Table 5. Mass moment of inertia for computation model II [unit : $kg \cdot m^2$]

Node	Subsystem	Main system	Node	Main system
0	0.007	33.724	9	188.000
1	0.312	28.000	10	42.000
2	-	56.010	11	151.500
3	-	74.000	12	5.370
4	-	188.000	13	10.740
5	-	188.000	14	5.370
6	-	188.000	15	14.350
7	-	188.000	16	11.600
8	-	188.000	17	1322.000

전달강성계수법과 유한요소법으로 계산 모델II에 대한 1차부터 5차까지의 고유진동수를 계산한 결과를 Table 7에 나타내었다. 양방법의 계산 결과가 잘 일치하였다. 따라서 전달강성계수법의 신뢰성을 확인할 수 있었다.

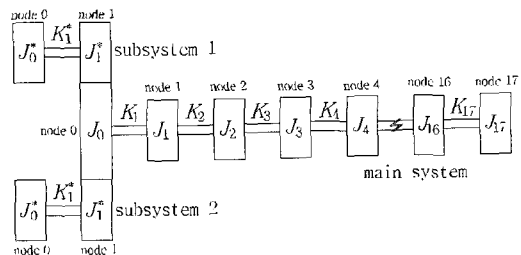


Fig. 6. Computation model II.

Table 6. Torsional stiffness for computation model II [unit : $N \cdot m/rad$]

Node	Subsystem	Main system	Node	Main system
1	15.500×10^6	2.720×10^7	10	1.427×10^8
2	-	1.000×10^5	11	1.855×10^8
3	-	3.399×10^7	12	1.000×10^9
4	-	1.409×10^8	13	2.779×10^6
5	-	1.025×10^8	14	2.779×10^6
6	-	1.025×10^8	15	1.000×10^9
7	-	1.025×10^8	16	5.103×10^7
8	-	1.025×10^8	17	4.838×10^6
9	-	1.025×10^8		

Table 7. Natural frequencies of computation model II [unit : Hz]

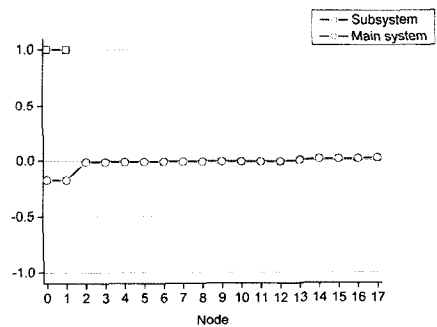
Order	TSCM	FEM
1	5.3315	5.3315
2	6.4827	6.4827
3	49.237	49.237
4	66.712	66.712
5	92.936	92.936

Table 8은 계산모델 II에 대한 자유진동해석 결과인 1차 고유진동수와 2차 고유진동수로부터 축계의 위험속도를 계산한 결과이다. 축계의 주기관이 6기동 2행정 기관이므로 6차 및 12차 위험속도인 27rpm, 32rpm, 53rpm, 65rpm이 주위험속도가 된다.

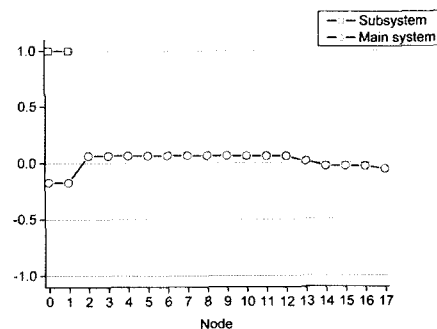
Fig. 7은 전달강성계수범으로 1차와 2차 고유모드를 계산한 결과이다. 1차 고유모드는 주계의 절점 12와 절점 13 사이인 중간축에서 절이 나타났다. 2차 고유모드에서는 주계의 절점 1과 절점 2를 연결하는 축에서 그리고 절점 13과 절점 14 사이의 중간축에서 절이 나타났다.

Table 8. Critical speeds of computation model II [unit : rpm]

Order	1st frequency	2nd frequency
1	320	389
2	160	194
3	107	130
4	80	97
5	64	78
6	53	65
7	46	56
8	40	49
9	36	43
10	32	39
11	29	35
12	27	32
13	25	30
14	23	28
15	21	26
16	20	24



(a) 1st mode shape



(b) 2nd mode shape

Fig. 7. Natural modes of mathematical model II.

결 론

선박, 자동차, 항공기 등의 수송기계에서 동력전달 장치는 가장 핵심적인 기계 시스템으로써 시스템 전체의 안정성과 효율성에 큰 영향을 미친다. 본 논문에서는 동력전달장치에서 쉽게 볼 수 있고 공학적으로도 중요한 차차-분지계를 갖는 축계를 대상으로 비틀림진동으로 인한 축계의 위험속도를 구하는 알고리즘을 전달강성계수법으로 정식화하였다.

전달강성계수법으로 차차-분지계를 갖는 비틀림축계의 자유진동해석을 수행할 수 있는 프로그램을 작성한 후, 4행정기관과 차차로 연결된 고속 박용 추진축계와 2행정기관과 PTO시스템을 갖는 저속 박용 추진축계를 대상으로 고유진동수와 고유모드 그리고 위험속도를 계산하였다. 동일 모델에 대하여 기존의 유한요소법을 이용한 계산 결과와의 비교를 통해 본 연구에서 개발된 해석기법의 신뢰성을 확인하였다.

참 고 문 헌

1) Rao, J. S.(1996) : Rotor Dynamics, New Age International Publishers, 9-24.

2) Inman, Daniel J.(2001) : Engineering Vibration, Prentice Hall, 533-570.

3) Hsueh, W. J.(1999) : On the Vibration Analysis of Multi-Branch Torsional Systems, Journal of Sound and Vibration, Vol. 224, No. 2, 209-220.

4) Thomson, William T. and Dahleh, Marie Dillon(1993) : Theory of Vibration with Applications, Prentice Hall, 258-286.

5) Choi, Myung-Soo(2003) : Free Vibration Analysis of Plate Structures Using Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method, KSME International Journal, Vol. 17, No. 6, 805-815.

6) Moon, D. H. and Choi, M. S.(2000) : Vibration Analysis for Frame Structures Using Transfer of Dynamic Stiffness Coefficient, Journal of Sound and Vibration, Vol. 234, No. 5, 725-736.

7) 최명수 · 문덕홍 · 정하용(2003) : 강성계수의 전달을 이용한 골조구조물의 정적해석, 한국전산구조공학회논문집, 16(1), 9-18.

2003년 7월 23일 접수
2003년 8월 11일 수리