종속 지수 성분을 가지는 병렬시스템의 신뢰도 추정

(Estimation of Reliability for a Parallel System with Dependent Exponential Components)

안정향*, 윤상철**
(Jeong Hyang An, Sang Chul Yoon)

요 약 본 논문에서는 k개 성분들이 지수분포를 따르는 병렬시스템에서 하나의 성분이 고장났을 때 나머지 성분들의 수명분포에 영향을 줄 때 주어진 시각 t 에서 시스템의 신뢰도, 위험함수, 평균잔여수명, 신뢰도에 대한 최우추정량과 최소분산불편추정량을 제시하고 그리고 모의실험을 통하여 추정량들의 효율성을 연구한다.

Abstract In this paper, we study the estimation of reliability function for a parallel system with k dependent exponential components. We assume that the failure of one of the k components changes the life distribution of the remaining components. Also, we compare with Cramer-Roa lower bound for variances of the minimum variance unbiased estimator, and the mean square errors of the maximum likelihood estimator of reliability system with the through the Monte Carlo simulation.

1. 서 론

일반적으로 2개 이상의 동일한 성분이나, 거의 같은 성분으로 구성된 시스템의 신뢰성 연구에서 우리는 종종 한 성분의 고장이 전체 시스템의 작동에 아무런 영향을 끼치지 않는다고 가정한다. 그러나 병렬시스템에서 어느 한 성분이 고장나면 나머지 성분들의 수명에 영향을 미치고 그 시스템의 수명에도 영향을 미치는 점은 현실적으로 흔히 있을 수 있다. 예를 들면 양쪽 날개에 각각 동일한 엔진을 장착한 비행기, 발동기가 이중으로 구성되어 있는 발전소의 발동기, 자동차의 바퀴, 사람의 몸에서 신장이나 폐와 같이 짝을 이룬 생식기관 등을 생각할 수 있다. 이런 각각의 경우에서 한 성분이 고장나면 남아있는 나머지 성분은 정상적인 작업을 수행하는데 있어 첫 번째 고장난 성분의 영향을 다른 성분이 부하 받는다는 것을 알 수 있다. 따라서 이러한 시스템에서 첫 번째 고장이 나머지 성분의 신뢰도에 영향을 끼치지 않는다면 수명 연구는 성분들이독립적으로 이루어 질 것이다. 그러나 이러한 경우가 아니라면 종속구조를 갖게 될 것이며 수명 연구는 다변량 모형을 사용하게 되는 것이 타당하다.

따라서 k개의 성분으로 구성된 시스템의 주어진 시각 t에서 시스템의 신뢰도를 추론하는 것은 중요한 문제이다.

먼저, 시스템의 신뢰도 추정에서 성분들의 수명이 서로 독립인 경우의 연구는 많이 되어 왔다. Bai (1992)등은 동일한 위치모수와 서로 다른 척도모수를 가질 때의 최소분산불편추정량과 근사적인 최우추정량을 유도했다. Gupta와 Gupta (1988)는 같은 척도모수와 서로 다른 위치모수를 가질 때에 신뢰도 R을 $P(Y_p > \max(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{p-1}))$ 개념으로 접근했고, 독립인 지수분포를 따르는 성분을 가진 시스템의 경우에서 Bhattacharya와 Johnson (1974)이 그 시스템에서 k중 s개의 성분이 작동하는 경우에 대해 시스템에서의 신뢰도에 대한 최소분산불편추정량과 최우추정량을 찾고 두 추정량의 효율을 비교했다. 그러나 k개의 성분들로 구성되어진 병렬시스템에서 하나의 성분이 고장났을 때 나머지 성분들의 수명에 영향을 주는 경우에 또한 많은 연구가 되어왔다. Freund (1961)는 지수분포를 따르는 두 개의 성분을 가진 병렬시스템에서 하나의 성분이 고장났을 때 나머지 하나의 성분에 대한 수명분포의

* 대구한의대 전산정보학과
** 경북대학교 외래교수

위치모수가 변한다고 했었다. Kunchur와 Munoli (1994)은 Freund (1961)모형에 대한 최우추정량과 최소분산불편추정량을 제안하였고, Hanagal (1996)은 두 개의 성분이 Freund (1961)의 모형을 따르는 병렬시스템의 신뢰도를 추론하였다. k개의 성분들로 구성되어진 병렬시스템인 경우는 Kunchur와 Munoli (1993)가 k개 성분으로 구성되어진 병렬시스템에서 스트레스-강도모형의 모수 R_k를 제시하여, 최우추정량과 최소분산불편추정량을 유도하고 $k=2$인 경우에 두 추정량에 대한 효율성을 비교하였다. 그리고 Gupta, Gupta 와 H-Akman (1995)는 각 성분들이 하나씩 고장날 때 남은 성분들로 이루어진 시스템의 수명은 짧아질 것이라고 가정하고 수명시간을 순서화하여 신뢰도의 최우추정량을 비교하였다. Park (1999)등은 한 개의 성분이 고장났을 때 다른 하나의 성분이 부하가 가중된다는 가정에서 두 성분의 수명이 이변량 와이블 모형을 따르는 병렬시스템의 신뢰도와 고장률의 최우추정량을 제시하고 그 효율성을 비교하였다.

본 논문에서는 k개 성분들이 지수분포를 따르는 병렬시스템에서 하나의 성분이 고장났을 때 나머지 성분들의 수명분포에 영향을 줄 때 주어진 시각 t에서 시스템의 신뢰도에 대한 최우추정량과 최소분산불편추정량을 제시하고, 그리고 모의실험을 통하여 추정량들의 효율성을 비교한다.

제 2절에서는 k개의 성분을 가진 병렬시스템을 모형을 제안하고 그 성질들을 살펴보고, 제 3절에서는 모수들과 신뢰도에 대한 최우추정량과 최소분산불편추정량을 제안하며 $k=2$인 경우에 신뢰도 추정량의 Cramer-Rao 하한 (lower bound)을 유도하고, 제 4절에서는 $k=2$와 $k=3$인 경우에 대해 모의실험을 통하여 먼저 고장난 성분이 다음 성분에 미치는 영향력에 따라 변화하는 정도를 비교한다.

2. 병렬시스템의 신뢰도함수

k개 성분으로 이루어진 병렬시스템을 따른다고 할 때 처음에는 k개 성분들은 서로 독립이고 그 각각의 수명은 평균이 $\mu>0$인 지수분포이라 하자. k개 성분 중에서 하나가 먼저 고장나면 나머지 $k-1$개 성분의 수명분포에 영향을 미치게 되어 그 각각의 수명분포는 평균이 μ/ϕ_1, $\phi_1>0$인 지수분포라 하자. 그 다음 $k-1$개의 성분 중에서 한 개의 분이 고장나면 나머지 $k-2$개 성분의 수명분포에 영향을 주게 되고, 그 때 나머지 $k-3$개 성분의 수명분포는 평균이 μ/ϕ_2, $\phi_2>0$인 지수분포를 따른다. 같은 방법으로, 마지막으로 남은 두 개의 성분 중에서 한 개의 성분이 고장나면 나머지 한 개의 성분의 수명분포는 평균이 μ/ϕ_{k-1}, $\phi_{k-1}>0$ 인 지수분포라 하자. 이 때 시스템에서 관찰된 순서화 수명시간을 $X_1<X_2<\cdots<X_k$라 하고 i번째와 $i-1$번째 수명시간에 대한 간격을 $G_i=X_i-X_{i-1}$, $i=1,2,\cdots,k$, $X_0=1$, $\phi_0=1$ 라 하자. 이때 G_i는 평균이 $\mu/(k-i+1)\phi_{i-1}$인 독립인 지수분포가 된다. 여기서 $\mu>0$ 이고 $\phi_i>1$ 이다.

k개 성분을 가진 병렬시스템에서는 어떤 하나의 성분이라도 작동하면 시스템이 작동하게 되므로 가장 큰 수명시간 X_k가 주어진 시각 t보다 클 확률 $\Pr(X_k>t)$ 이 시스템의 신뢰도가 된다. 따라서 신뢰도 $R(t)$는

$$R(t)=\Pr(X_k>t)=\Pr\left(\sum_{i=1}^{k}G_i>t\right)$$

이다.

G_i을 $\mu/\delta_i Y_i$로 치환하면 $\Sigma_{i=1}^{k}G_i$는 $\Sigma_{i=1}^{k}\mu/\delta_i Y_i$가 되고 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$는 서로 독립이고 평균이 1인 지수분포를 따른다. 따라서 $Z(=\Sigma_{i=1}^{k}\mu/\delta_i Y_i)$의 확률밀도함수 $f(z)$는

$$f(z)=\sum_{j=1}^{k}\left\{\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{k}\left(\frac{\mu}{\delta_j}-\frac{\mu}{\delta_i}\right)^{-1}\right\}\left(\frac{\mu}{\delta_j}\right)^{k-2}\times\exp\left[-\frac{\delta_j}{\mu}z\right]$$

로 표현되고, 여기서 δ_i는 $(k-i+1)\phi_{i-1}$이다. 따라서 신뢰도함수는

$$R(t)=\Pr(Z>t)=\sum_{j=1}^{k}\left\{\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{k}\left(\frac{1}{\delta_j}-\frac{1}{\delta_i}\right)^{-1}\right\}\times\left(\frac{1}{\delta_j}\right)^{k-1}\exp\left[-\frac{\delta_j}{\mu}t\right]$$

이다.

3. 신뢰도 함수의 추정

제안된 병렬시스템에서 j번째 관찰된 순서화 수명시간을 $X_{1j} < X_{2j} < \cdots < X_{kj}$, $j=1,2,\cdots,n$ 라 할 때 $G_{ij}=X_{ij}-X_{i-1,j}$, $i=1,2,\cdots,k; j=1,2,\cdots,n$ 의 결합확률밀도함수 $f(\underline{g})$는

$$f(\underline{g}) = \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n} f(g_{ij}) = \frac{(k!)^n\left(\prod_{i=1}^{k}\phi_{i-1}\right)^n}{\mu^{kn}} \times e^{-\frac{1}{\mu}(kg_{1\cdot}+(k-1)\phi_1 g_{2\cdot}+\cdots+\phi_{k-1}g_{k\cdot})} \tag{3.1}$$

이고 $\phi_0=1$, $g_{i\cdot}=\Sigma_{j=1}^{n} g_{ij}$, $i=1,2,\cdots,k$이다. 따라서 우도함수 L은

$$L = \frac{(k!)^n(\prod_{i=1}^{k}\phi_{i-1})^n}{\mu^{kn}} \times e^{-\frac{1}{\mu}(kg_{1\cdot}+(k-1)\phi_1 g_{2\cdot}+\cdots+\phi_{k-1}g_{k\cdot})} \tag{3.2}$$

로 표현되며 μ와 ϕ_i에 대해 로그 편미분하여 정리하면 μ와 ϕ_i들에 대한 최우추정량은

$$\hat{\mu} = \frac{k}{n} g_{1\cdot} \qquad \hat{\phi}_i = \frac{kg_{1\cdot}}{(k-i)g_{i+1}},\quad i=1,2,\cdots,k-1 \tag{3.3}$$

가 된다. 따라서 신뢰도 $R(t)$ 에 대한 최우추정량은

$$\begin{aligned}\hat{R}(t) &= \sum_{j=1}^{k}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{k}\left[\frac{\hat{\mu}}{(k-j+1)\hat{\phi}_{j-1}} - \frac{\hat{\mu}}{(k-i+1)\hat{\phi}_{i-1}}\right]^{-1} \\ &\quad\times\left(\frac{\hat{\mu}}{(k-j+1)\hat{\phi}_{j-1}}\right)^{k-1} \times \exp\left[-\frac{(k-j+1)\widehat{\phi_{j-1}}}{\hat{\mu}}t\right] \\ &= \sum_{j=1}^{k}\left\{\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{k}\left(\frac{g_{j\cdot}}{n}-\frac{g_{i\cdot}}{n}\right)^{-1}\right\} \times\left(\frac{g_{j\cdot}}{n}\right)^{k-1}\exp\left[-\frac{n}{g_{j\cdot}}t\right] \\ &= \sum_{j=1}^{k}\left\{\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{k}(\overline{g}_j-\overline{g}_i)^{-1}\right\} \times(\overline{g}_j)^{k-1}\exp\left[-\frac{t}{\overline{g}_j}\right]\end{aligned} \tag{3.4}$$

로 표현된다.

다음으로 최소분산불편추정량을 구해 보면 G_{ij}, $i=1,2,\cdots,k$, $j=1,2,\cdots,n$의 결합 확률밀도함수인 식 (3.1)은 $(g_{1\cdot},g_{2\cdot},\cdots,g_{k\cdot})$의 결합완비충분통계량이다. 그리고 $(g_{1\cdot},g_{2\cdot},\cdots,g_{k\cdot})$ 의 자명한 불편추정량은

$$\phi(g_{1\cdot},g_{2\cdot},\cdots,g_{k\cdot}) = \begin{cases}1, & \sum_{i=1}^{k} g_{i1} > t \text{ 인 경우}\\ 0, & \text{기타}\end{cases} \tag{3.5}$$

이므로 Rao-Blackwell 정리에 의해 최소분산불편추정량은

$$\begin{aligned}\hat{R}(t) &= \int_0^{g_{1\cdot}}\cdots\int_0^{g_{k\cdot}} I_{(\sum_{i=1}^{k} g_{i1}>t)} \times \prod_{i=1}^{k} f(g_{i1}|g_{i\cdot})dg_{i1} \\ &= 1-\int\cdots\int_A \prod_{i=1}^{k}(n-1)(1-v_i)^{n-2}dv_i\end{aligned} \tag{3.6}$$

으로 구해진다.

여기서 $A = \{(v_i, i=1,2,\cdots,k) \mid 0<v_i<1$, $i=1,2,\cdots,k$, $\sum_{i=1}^{k} g_{i\cdot}v_i < t\}$이다.

마지막으로, 제안된 신뢰도 함수 식 (3.6)의 계산이 다소 어려우므로 분산에 대한 추정값으로 분산의 최소값인 Cramer-Rao 하한을 사용하여 평균제곱오차를 고려하고자 한다. 따라서 제안된 모형의 가장 간단한 $k=2$인 병렬시스템에서 $\delta_1=\mu$와 $\delta_2=\phi_1$으로 구성되어진 신뢰도 $R(t)$ 의 불편추정량의 분산에 대한 Cramer-Rao 하한을 찾아보자.

우선 Cramer-Rao 하한을 찾기 위하여 Fisher 정보행렬을 찾아보면, 식 (3.2)에서 $k=2$일 때의 우도함수는

$$L = \frac{2^n\phi_1^n}{\mu^{2n}} e^{-\frac{1}{\mu}(2g_{1\cdot}+\phi_1 g_{2\cdot})} \tag{3.7}$$

로 나타나고 μ와 ϕ_1에 대해서 로그 편미분을 한 후에 기대값을 찾으면

$$E\left(\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ln L\right)=-\frac{4n}{\mu^2},$$

$$E\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi_1^2}\ln L\right)=-\frac{n}{\phi_1^2},$$

$$E\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi_1\partial\mu}\ln L\right)=\frac{n}{\mu\phi_1}$$

이 된다. Fisher 정보행렬 $I(\mu,\phi_1)$은

$$I(\mu,\phi_1) = -E\begin{bmatrix}\frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\mu}\ln L & \frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\phi_1}\ln L \\ \frac{\partial^2}{\partial\phi_1\partial\mu}\ln L & \frac{\partial^2}{\partial\phi_1\partial\phi_1}\ln L\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{4n}{\mu^2} & -\frac{n}{\mu\phi_1} \\ -\frac{n}{\mu\phi_1} & \frac{n}{\phi_1^2}\end{bmatrix} \tag{3.8}$$

이므로

$$I^{-1}(\mu,\phi_1)=\begin{bmatrix}\frac{\mu^2}{3n} & -\frac{\mu\phi_1}{3n} \\ -\frac{\mu\phi_1}{3n} & \frac{4\phi_1^2}{3n}\end{bmatrix} \tag{3.9}$$

이다. 따라서 모수 μ와 ϕ_1에 대한 신뢰도함수의 불편추정량의 분산에 대한 Cramer-Rao 하한(CRB)은

$$\begin{aligned} CRB &= \frac{4\phi_1^2}{3n\mu^2(\phi_1-2)^4} \\ &\times\{t^2(\phi_1-2)^2+2\mu t(\phi_1-2)-4\mu^2\}e^{-\frac{4t}{\mu}} \\ &-4\{t^2(\phi_1-2)^2-(2\mu+1)t(\phi_1-2)-2\mu\} \\ &\times e^{-\frac{t}{\mu}(\phi_1+2)} \\ &+\{7t^2(\phi_1-2)^2-10\mu t(\phi_1-2)+4\mu^2\} \\ &\times e^{-\frac{2\phi_1 t}{\mu}} \end{aligned}$$

로 표현된다.

4. 모 의 실 험

이 절에서는 먼저 고장난 성분이 다음 성분에 미치는 영향력에 따라 변화하는 정도를 알아보려고 한다. $k=2$와 $k=3$인 경우에 최우추정량과 최소분산불편추정량을 비교하기 위해 모의실험을 하였다. 두 추정량을 비교하기 위해 편의와 평균제곱오차를 사용하였고, 시스템의 수인 n의 크기가 25일 때, 그 때 각각의 자료의 수를 2000개를 생성시켰다. $k=2$인 경우에는 모수가 $\mu=11$, $\phi_1=11/10$값을 가지는 병렬시스템, 다시 말해서 처음에는 두 성분의 수명이 11이였다가 성분하나의 고장에 따라 나머지 한 개 성분의 수명이 10으로 줄어드는 경우와 $k=3$인 경우에는 모수가 $\mu=11$, $\phi_1=11/10$, $\phi_2=10/9$ 값을 가지는 병렬시스템, 즉 처음에는 세 성분의 수명이 11이였다가 성분하나의 고장에 따라 나머지 두 개 성분의 수명이 10으로 줄어들고, 다시 수명이 9로 줄어드는 경우에 대해서 신뢰도 $R(t)$가 0.05에서 0.95까지 변화할 때, 그 때의 각각의 신뢰도에 대한 최우추정량과 최소분산불편추정량의 편의와 평균제곱오차를 찾아보았다. 그리고 $n=25$일 때의 최우추정량과 최소분산불편추정량에 대한 평균제곱오차를 그림으로 나타내었다.

<표 4.1>과 <표 4.2>은 $k=2$와 $k=3$일 때 $n=25$인 경우에 대해 생성된 2000개의 자료를 이용하여 그 때의 신뢰도가 0.05에서 0.95까지 바뀌는 경우에 대해 최우추정량과 최소분산불편추정량에 대한 편의와 평균제곱오차를 찾았다.

<표 4.3>는 $k=2$인 경우의 성분의 수명이 11에서 10으로 짧아질 경우, 8로 짧아질 경우와 6으로 짧아질 경우에 대해 최우추정량의 편의와 평균제곱오차를 나타내었고, <표 4.4>는 $k=2$인 경우의 성분의 수명이 11에서 10으로 짧아질 경우, 8로 짧아질 경우와 6으로 짧아질 경우에 대해 최소분산불편추정량의 편의와 평균제곱오차를 나타내었다.

<표 4.5>는 $k=3$인 경우의 성분의 수명이 11에서 10으로 다시 9로 짧아질 경우, 수명이 11에서 8으로 다시 5로 짧아질 경우와 수명이 11에서 6으로 다시 1로 짧아질 경우에 대해 최우추정량의 편의와 평균제곱오차를 나타내었고, <표 4.6>은 $k=3$인 경우의 성분 수명이 11에서 10으로 다시 9로 짧아질 경우, 수명이 11에서 8으로 다시 5로 짧아질 경우와 수명이 11에서 6으로 다시 1로 짧아질 경우에 대해 최소분산불편추정량의 편의와 평균제곱오차를 나타내었다.

< 표 4.1> $\hat{R}(t)$와 $\tilde{R}(t)$의 편의와 평균제곱오차 : $k=2,\ n=25$

$R(t)$	최우추정량		최소분산 추정량	
	편의	평균제곱오차	편의	평균제곱오차
0.05	-0.002890	0.000812	0.000888	0.000820
0.10	-0.001650	0.001822	0.001371	0.001935
0.20	0.002062	0.003649	0.001894	0.003929
0.30	0.005705	0.004898	0.002113	0.005208
0.40	0.008677	0.005452	0.002143	0.005673
0.50	0.010726	0.005318	0.002036	0.005391
0.60	0.011683	0.004579	0.001816	0.004506
0.70	0.011392	0.003386	0.001499	0.003223
0.80	0.009655	0.001967	0.001094	0.001802
0.90	0.006152	0.000656	0.000600	0.000572
0.95	0.003538	0.000195	0.000316	0.000165

<표 4.2> $\hat{R}(t)$와 $\tilde{R}(t)$의 편의와 평균제곱오차 : $k=3,\ n=25$

$R(t)$	최우추정량		최소분산 추정량	
	편의	평균제곱오차	편의	평균제곱오차
0.05	-0.003610	0.000751	0.000334	0.000744
0.10	-0.003033	0.001719	0.000404	0.001804
0.20	-0.000153	0.003516	0.000442	0.003779
0.30	0.003176	0.004800	0.000530	0.005131
0.40	0.006229	0.005440	0.000530	0.005721
0.50	0.008661	0.005418	0.000571	0.005572
0.60	0.010221	0.004786	0.000592	0.004787
0.70	0.010658	0.003657	0.000506	0.003536
0.80	0.009652	0.002222	0.000506	0.002060
0.90	0.006664	0.000796	0.000346	0.000696
0.95	0.004067	0.000253	0.000211	0.000211

<표 4.3> 최우추정량의 편의와 평균제곱오차 : $k=2,\ n=25$ (단위 : $\times 10^{-3}$)

$R(t)$	$\mu=11,\ \phi_1=\frac{11}{10}$		$\mu=11,\ \phi_1=\frac{11}{8}$		$\mu=11,\ \phi_1=\frac{11}{6}$	
	편의	평균제곱오차	편의	평균제곱오차	편의	평균제곱오차
0.05	-0.2890	0.0812	-0.3184	0.0789	-0.3430	0.0770
0.10	-0.1650	0.1822	-0.1969	0.1792	-0.2221	0.1770
0.20	0.2062	0.3649	0.1848	0.3634	0.1682	0.3630
0.30	0.5705	0.4898	0.5631	0.4915	0.5566	0.4937
0.40	0.8677	0.5452	0.8720	0.5499	0.8735	0.5540
0.50	1.0726	0.5318	1.0846	0.5381	1.0914	0.5431
0.60	1.1683	0.4579	1.1838	0.4641	1.1931	0.4688
0.70	1.1392	0.3386	1.1542	0.3434	1.1634	0.3469
0.80	0.9655	0.1967	0.9767	0.1993	0.9836	0.2012
0.90	0.6152	0.0656	0.6205	0.0663	0.6237	0.0668
0.95	0.3538	0.0195	0.3560	0.0197	03573	0.0198

<표 4.4> 최소분산불편추정량의 편의와 평균제곱오차 : $k=2,\ n=25$ (단위 : $\times 10^{-3}$)

$R(t)$	$\mu=11,\ \phi_1=\frac{11}{10}$		$\mu=11,\ \phi_1=\frac{11}{8}$		$\mu=11,\ \phi_1=\frac{11}{6}$	
	편의	평균제곱오차	편의	평균제곱오차	편의	평균제곱오차
0.05	0.888	0.820	0.883	0.0789	0.843	0.762
0.10	1.371	1.935	1.354	0.1895	1.300	1.867
0.20	1.894	3.929	1.878	0.3918	1.830	3.918
0.30	2.113	5.208	2.105	0.5238	2.071	5.270
0.40	2.143	5.673	2.143	0.5734	2.123	5.785
0.50	2.036	5.391	2.041	0.5462	2.031	5.517
0.60	1.816	4.506	1.823	0.4570	1.821	4.617
0.70	1.499	3.223	1.507	0.3268	1.509	3.300
0.80	1.094	1.802	1.099	0.1824	1.102	1.840
0.90	0.600	0.572	0.602	0.0578	0.604	0.582
0.95	0.316	0.165	0.317	0.0166	0.318	0.167

<표 4.5> 최우추정량의 편의와 평균제곱오차 : $k=3$, $n=25$ (단위 : $\times 10^{-3}$)

$R(t)$	$\mu=11$, $\phi_1=\frac{11}{10}$, $\phi_2=\frac{10}{9}$		$\mu=11$, $\phi_1=\frac{11}{8}$, $\phi_2=\frac{8}{5}$		$\mu=11$, $\phi_1=\frac{11}{8}$, $\phi_2=\frac{6}{1}$	
	편의	평균제곱오차	편의	평균제곱오차	편의	평균제곱오차
0.05	-0.3610	0.0751	-0.4060	0.0737	-0.4329	0.0807
0.10	-0.3033	0.1719	-0.3555	0.1706	-0.3621	0.1849
0.20	-0.0153	0.3516	-0.0535	0.3534	-0.0223	0.3789
0.30	0.3176	0.4800	0.3031	0.4867	0.3586	0.5182
0.40	0.6229	0.5440	0.6309	0.5552	0.6982	0.5873
0.50	0.8661	0.5418	0.8912	0.5556	0.9599	0.5842
0.60	0.0221	0.4786	1.0572	0.4923	1.1190	0.5145
0.70	0.0658	0.3657	1.1026	0.3769	1.1520	0.3913
0.80	0.9652	0.2222	0.9959	0.2290	1.0287	0.2361
0.90	0.6664	0.0796	0.6836	0.0819	0.6982	0.0837
0.95	0.4067	0.0253	0.4151	0.0259	0.4212	0.0263

<표 4.6> 최소불편추정량 편의와 평균제곱오차 : $k=3$, $n=25$ (단위 : $\times 10^{-3}$)

$R(t)$	$\mu=11$, $\phi_1=\frac{11}{10}$, $\phi_2=\frac{10}{9}$		$\mu=11$, $\phi_1=\frac{11}{8}$, $\phi_2=\frac{8}{5}$		$\mu=11$, $\phi_1=\frac{11}{8}$, $\phi_2=\frac{6}{1}$	
	편의	평균제곱오차	편의	평균제곱오차	편의	평균제곱오차
0.05	0.0334	0.0744	0.0341	0.0719	-0.0190	0.0778
0.10	0.0404	0.1804	0.0440	0.1777	0.0379	0.1923
0.20	0.0442	0.3779	0.0541	0.3800	0.0894	0.4081
0.30	0.0482	0.5131	0.0621	0.5218	0.1184	0.5560
0.40	0.0530	0.5721	0.0684	0.5858	0.1338	0.6196
0.50	0.0571	0.5572	0.0724	0.5728	0.1377	0.6016
0.60	0.0592	0.4787	0.0729	0.4931	0.1313	0.5143
0.70	0.0577	0.3536	0.0686	0.3644	0.1150	0.3775
0.80	0.0506	0.2060	0.0579	0.2120	0.0888	0.2180
0.90	0.0346	0.0696	0.0379	0.0714	0.0519	0.0728
0.95	0.0211	0.0211	0.0226	0.0216	0.0286	0.0219

5. 결 론

<표 4.1>은 $k=2$일 때는 신뢰도가 0.35를 기준으로 신뢰도가 작은 경우에는 최우추정량이 더 효율적이고 그 반대로 신뢰도가 큰 경우에는 평균분산불편추정량이 더 효율적이다. 하지만 신뢰도가 아주 작은 값으로 내려가거나 0.95이상이 되면 최우추정량의 평균제곱오차와 평균분산불편추정량의 평균제곱오차는 비슷하게 된다. 그리고 <표 4.2>은 $k=3$의 경우에서도 신뢰도 0.6정도를 기준으로 신뢰도가 작은 경우에는 최우추정량이 더 효율적이고 그 반대로 신뢰도가 큰 경우에는 평균분산불편추정량이 더 효율적이다. $k=2$인 경우와 마찬가지로 신뢰도가 아주 작은 값으로 내려가거나 아주 큰 값일 때는 두 추정량의 평균제곱오차의 차이는 거의 없고, 오히려 신뢰도가 아주 낮은 쪽으로 가면 다시 평균분산불편추정량이 더 효율적이 되는 경향이 있다.

<표 4.3> - <표 4.6>에서 보면 평균수명이 더 많이 짧아지면 질수록 최우추정량과 최소분산불편추정량의 평균제곱오차가 더 크게 나타남을 알 수 있겠다.

참 고 문 헌

[1] Bai, D. S. and Hong, Y. W., "Estimation of in the Exponential Case with common location parameter", *Communication in Statistics-Theory and Method*, 21, pp 269-282, 1992.

[2] Bhattacharya, G. K. and Johnson, R. A., "Estimation of Reliability in a Multicomponent Stress-Strength Model", *Journal of the American Statistical Association*, 69, pp 966-970, 1974.

[3] Freund, J. E., "Bivariate Extension of The Exponential Distribution", *Journal of the American Statistical Association*, 56, pp 971-977, 1961.

[4] Gupta, R. D. and Gupta, R. C., "Estimation of in the Exponential Case", *Communication in Statistics-Theory and Method*, 17, pp 911-924, 1988.

[5] Gupta, R. D., Gupta, R. C. and Olcay H-Akman, "Estimation of Reliability under ordered restriction on the parameters", *Communication in Statistics-Theory and Method*, 24(7), pp 1799-1812, 1995.

[6] Hanagal, David D., "Estimation of System Reliability from Stress-Strength Relationship", *Communication*

in *Statistics-Theory and Method*, 25, pp 1783-1797, 1996.
[7] Kunchur, S. H. and Munoli, S. B., "Estimation of Reliability in Freund Model, for Two Component System", *Communication in Statistics-Theory and Method*, 23, pp 3273-3283 1994.
[8] Park B. G., Yoon S. C. and Kim M. Y, "Estimation for System Reliability under a Bivariate Weibull Distribution", *Journal of the Korea Industrial Information Systems Society*, Vol. 4, No. 2, pp 51-56, 1999

안 정 향 (Jeong Hyang An)

대구대학교 대학원 수학과
(이학석사)
대구대학교대학원 수학과
(이학박사)
대구한의대학교 정보학부 부교수
(관심분야 : 해석학(미분시스템의 안정성 이론) 수치해석)

윤 상 철 (Sang Chul Yoon)

대구대학교 통계학과 (이학사)
경북대학교 대학원 통계학과
(이학석사)
경북대학교 대학원 통계학과
(이학박사)
1994-현재 경북대학교 외래교수
(관심분야 : 신뢰성이론 및 가속수명시험, 수명시험의 통계적추론, 통계적품질관리, 수치해석등)