

점소성 구성식의 적분에 미치는 선형화 방법의 영향

윤삼손*·이순복†

(2003년 3월 13일 접수, 2003년 9월 3일 심사완료)

Comparison of Semi-Implicit Integration Schemes for Rate-Dependent Plasticity

Samson Yoon and Soon-Bok Lee

Key Words : Viscoplastic Constitutive Equation(점소성 구성식), Finite Element Method(유한요소해석), Implicit Integration(내연적 적분법), General Midpoint Rule(일반중간점법), General Trapezoidal Rule(일반사다리꼴법), Chaboche Model(샤보시 모델)

Abstract

During decades, there has been much progress in understanding of the inelastic behavior of the materials and numerous inelastic constitutive equations have been developed. The complexity of these constitutive equations generally requires a stable and accurate numerical method. To obtain the increment of state variable, its evolution laws are linearized by several approximation methods, such as general midpoint rule(GMR) or general trapezoidal rule(GTR). In this investigation, semi-implicit integration schemes using GTR and GMR were developed and implemented into ABAQUS by means of UMAT subroutine. The comparison of integration schemes was conducted on the simple tension case, and simple shear case and nonproportional loading case. The fully implicit integration(FI) was the most stable but amplified the truncation error when the nonlinearity of state variable is strong. The semi-implicit integration using GTR gave the most accurate results at tension and shear problem. The numerical solutions with refined time increment were always placed between results of GTR and those of FI. GTR integration with adjusting midpoint parameter can be recommended as the best integration method for viscoplastic equation considering nonlinear kinematic hardening.

1. 서론

공학적 구조물의 작동 온도가 높아지면서 금속 재료의 다양한 변형기구가 활성화되고 변형기구의 상호작용이 발생하여 변형거동이 매우 복잡해진다. 고온 비탄성 변형 거동을 모사하기 위하여 역응력(Back stress)나 저지응력(Drag stress)와 같은 내부 상태변수를 도입한 구성식들이 개발되었다.^(1,2) 비탄성 구성식을 구조해석에 적용하기 위한 연구가 Ortiz,⁽³⁾ Hornberger,⁽⁴⁾ Chaboche,⁽⁵⁾ 윤삼손⁽⁶⁾에 의해 수행되었다. 재료의 비탄성 거동을 고려한 구조해

석을 수행하기 위해서는 안정적이고 정확한 적분법이 요구된다. 적분법의 정확성은 일차 상미분방정식 형태인 상태변수의 발전식을 선형화하는 과정에서 결정된다. 선형화 방법은 General midpoint rule(이하 GMR)과 General trapezoidal rule(이하 GTR)로 나눌 수 있다.

본 연구에서는 점소성 구성식의 내연적 적분에 사용되는 선형화 방법을 비교하였다. Armstrong-Fredrick 형태의 이동경화모델의 경우 회복 항(Recovery Term)으로 인해 이동경화응력과 소성 변형률이 비선형의 관계를 갖게 되어 선형화 방법에 따라 다른 결과가 도출된다.⁽⁶⁾ 비선형 이동경화를 고려한 점소성 구성식을 GMR 과 GTR 에 의해 선형화하여 적분을 수행하였고 시간 증분과 중간점 분율의 영향을 분석하였다. 본 연구에서 다루는

† 한국과학기술원 기계공학과
E-mail: samsonyoon@hotmail.com
TEL : (042)869-3029 FAX : (042)869-3095
* 회원, 한국과학기술원 기계공학과

구성식과 시간 적분법은 상용 유한요소코드인 ABAQUS에 사용자 재료(User material, UMAT)서브루틴을 통해 결합되었다.

단축 인장변형과 단순 전단변형 그리고 비례하중이 아닌 하중(nonproportional loading)에 대한 해석을 수행하여 소성 변형률의 방향이 급격히 변하는 조건에서 선형화 방법에 따른 적분 결과를 비교하였다.

2. Chaboche model 의 시간 적분

2.1 Chaboche model

Chaboche model⁽⁷⁾은 등방성 재료에 대해 개발되었으며 속도 의존성 변형기구와 소성 변형, 반복 변형의 변형기구를 포함하는 대표적 통합형 점소성 구성식이다.

변형률 속도는 식 (1)과 같이 탄성 변형률 속도($\dot{\epsilon}_{ij}^e$), 소성 변형률 속도($\dot{\epsilon}_{ij}^p$)로 분리할 수 있다.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (1)$$

탄성 변형률 속도는 식 (2)와 같이 Hooke's law에 의해 응력 속도와 관련된다.

$$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{kk} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \quad (2)$$

여기서 λ 와 μ 는 Lamé 상수이다. 소성변형의 비압축성에 의해 편차응력속도는 식 (3)과 같이 표현된다.

$$\dot{s}_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}^e \quad (3)$$

여기서 $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ 는 편차 탄성변형률 속도이다.

등가 소성 변형률 속도는 식 (4)의 유동법칙에 의해 정의된다.

$$\dot{p} = \left\langle \frac{J(\mathbf{s} - \mathbf{X}) - R - k}{K} \right\rangle^n \quad (4)$$

여기서 $J(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{x}_{ij} : \mathbf{x}_{ij}}$ 이고 \mathbf{s} 는 편차응력이다. k, n, K 는 온도 의존성 재료 상수이다. 소성 변형률은 식 (4)의 유동 법칙과 소성 변형률 방향(\mathbf{n})으로 정의된다.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2} \dot{p} \mathbf{n} \quad (5)$$

$$\mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{s}_{ij} - \mathbf{X}_{ij}}{J(\mathbf{s} - \mathbf{X})} \quad (6)$$

이력현상을 모사하기 위해 도입된 역응력(back

stress)의 발전식은 식 (7)과 같다.

$$\dot{X}_{ij} = \frac{2}{3} C \dot{\epsilon}_{ij}^p - \gamma(p) \dot{p} X_{ij} \quad (7)$$

여기서 $\gamma(p) = \gamma [a_0 + (1 - a_0)e^{-bp}]$ 이고 C, γ, a_0 는 재료 상수이다.

반복 경화 혹은 반복 연화를 고려하기 위한 저지 응력(drag stress)의 발전식은 식 (8)과 같다.

$$\dot{R} = \beta(Q - R)\dot{p} \quad (8)$$

여기서 β 와 Q 는 재료상수이다.

식 (7)과 (8)은 모두 경화 항과 회복 항을 가지고 있으며 Bailey-Orowan law의 형태와 일치하며 고온에서 발생하는 경화와 회복의 결합 작용을 모사하기 위한 것이다.

2.2 구성식의 선형화

비탄성 구성식은 여러 상태 변수들이 복잡하게 얽혀있는 다원 일차 미분방정식의 형태이다. 기존에 개발된 다양한 적분법(e.g. Runge-Kutta method, Bulirsch-Stoer method)을 이용하여 구성식을 적분할 수 있으나 유한 요소법을 이용한 구조해석 코드에서는 적분법의 선정에 주의를 기해야 한다. 평형 방정식을 계산하는 과정에서 내연적 방법을 사용하는 유한요소 해석코드의 경우 접선 강성 행렬이 필요하게 되는데 이 행렬은 적분 계산과정과 일관되게 구해야 한다.⁽⁸⁾ 이러한 제한 조건으로 비탄성 구성식의 적분은 오일러 법과 같은 선형화 방법이 주로 사용된다.

식 (2)~(8)의 점소성 구성식을 간략히 표현하면 식 (9)과 같은 다원 일차 미분방정식 형태로 나타낼 수 있다.

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \quad (9)$$

식 (9)을 t_n 에서 t_{n+1} 까지 적분하면 식 (10)와 같다.

$$\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) dt \quad (10)$$

여기서 t_n 은 변형률 증분의 시작점이고, t_{n+1} 은 변형률 증분이 끝나는 점이다. 식 (10)의 함수 \mathbf{f} 는 각 인자들이 복잡하게 얽혀있어 해석 해를 구하기가 어렵기 때문에 선형화하여 적분을 근사한다. 먼저 GMR로 식 (10)을 선형화하면 식 (11)와 같이 중간점의 변화율을 이용하여 변수의 증분을 계산할 수 있다.

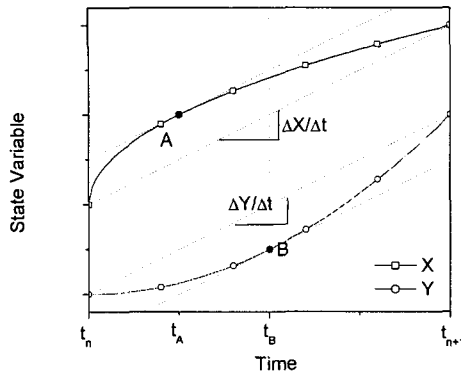


Fig. 1 Linearization with generalized midpoint rule

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) dt = \mathbf{f}(t_\theta, \mathbf{y}_\theta) \Delta t \quad (11)$$

선형화의 정확도는 t_θ 와 \mathbf{y}_θ 의 선정에 의해 결정된다. 함수 f 가 스칼라 함수인 경우 식 (11)을 만족하는 중간점이 항상 존재하지만 함수 f 는 벡터 함수이면 식 (11)을 만족하는 중간점이 존재하지 않을 수 있다.

상태변수 X, Y 로 이루어진 구성식을 가정해보자. t_n 에서 t_{n+1} 까지 상태변수 X 와 Y 의 거동이 Fig. 1 과 같을 때 X 와 Y 의 평균기울기와 같은 기울기가 갖은 점 A 와 B 를 찾을 수 있다. A 와 B 점의 기울기를 이용하여 변수 X 와 Y 의 증분을 계산하면 식 (12)와 식 (13)와 같다.

$$X_{n+1} - X_n = h(t_A, X_A, Y_A) \Delta t \quad (12)$$

$$Y_{n+1} - Y_n = g(t_B, X_B, Y_B) \Delta t \quad (13)$$

여기서 h 와 g 는 변수 X 와 Y 의 발전식을 나타내는 함수이다. Fig. 1 에서 알 수 있듯이 t_A 와 t_B 는 서로 같지 않다. 두 변수의 발전 양상의 차이로 인하여 X 와 Y 의 중간점이 서로 일치하지 않는다. 만약 어느 한점의 기울기를 평균 기울기로 사용할 경우 X, Y 두 변수의 거동을 정확히 근사할 수 없기 때문에 오차가 발생한다.

식 (11)을 만족시키는 중간점의 상태변수는 식 (14)와 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{y}_\theta = (1-\theta)\mathbf{y}_n + \theta\mathbf{y}_{n+1} \quad (14)$$

θ 가 0 인 경우 외연적 오일러법, θ 이 1 인 경우 내연적 오일러법이 된다. 식 (11)의 해는 $0.5 \leq \theta \leq 1$ 인 경우 무조건 안정하다.⁽⁴⁾

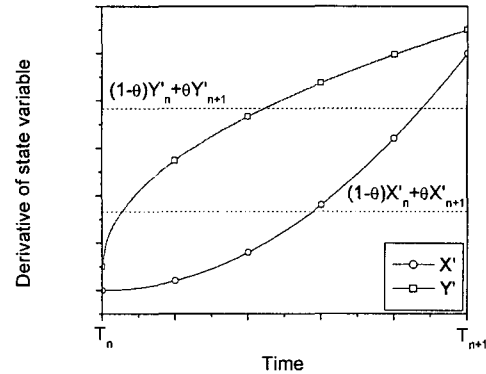


Fig. 2 Linearization with generalized trapezoidal rule

일반적으로 중간점의 시간 t_θ 는 식 (14)와 같은 분율(θ)에 의해 표현되지 않는다. 시간과 상태변수의 불일치는 구성식에 시간(t)가 포함된 경우에는 상당한 오차를 발생시킬 수 있다. 중간점의 상태변수를 식 (15)로 표현하면

$$\mathbf{y}_\theta = \mathbf{y}_n + \theta \mathbf{f}(t_\theta, \mathbf{y}_\theta) \Delta t \quad (15)$$

이고 식 (15)의 양변에는 중간점의 상태변수 \mathbf{y}_θ 가 포함되어 있다. 결과적으로 구성식의 적분은 식 (15)를 만족시키는 미지수 \mathbf{y}_θ 를 결정하는 문제로 변환된다.

증분이 충분히 작거나 상태변수의 거동이 선형에 가까운 경우 GMR 은 유효한 근사법으로 사용될 수 있다. 일반적으로 비탄성 구성식은 상태변수의 비선형성이 커서 GMR 에 의한 근사가 유효하기 위해서는 시간증분이 충분히 작게 하거나 중간점의 분율을 적절히 조절해야 한다. 전자의 경우 전체 시스템의 시간 증분이 변형률 또는 응력의 변화가 큰 취약요소의 거동에 전적으로 의존하게 되기 때문에 시간 증분이 지나치게 작아지게 되어 계산시간이 매우 길어질 수 있다는 단점이 있다. 시간증분은 그대로 두고 분율(θ)을 적절히 변화시키기 위해서는 상태변수의 정확한 거동을 알아야 하고 중간점이 오차에 미치는 영향을 계산해야 한다. 일반적인 경우 상태변수의 정확한 거동은 알 수 없고 해석해를 알고 있는 경우에도 각 변수의 중간점이 서로 다르기 때문에 중간점의 최적화 역시 오차를 수반한다.

GTR 은 평균 기울기를 초기 기울기와 최종 기울기의 분율로 나타내는 방법으로 식 (11)의 적분은 식 (16)와 같이 표현된다.

$$\int_n^{n+1} \mathbf{f}(\mathbf{y}) dt = [(1-\theta)\mathbf{f}(\mathbf{y}_n) + \theta\mathbf{f}(\mathbf{y}_{n+1})] \Delta t \quad (16)$$

최종 상태변수는 식 (17)과 같이 표현된다.

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + [(1-\theta)\mathbf{f}(\mathbf{y}_n) + \theta\mathbf{f}(\mathbf{y}_{n+1})] \Delta t \quad (17)$$

구성식의 적분은 식 (17)를 만족시키는 미지수 \mathbf{y}_{n+1} 를 결정하는 문제로 변환된다.

상태변수 \mathbf{X} , \mathbf{Y} 의 기울기가 Fig. 2와 같을 때 \mathbf{X} 와 \mathbf{Y} 의 평균 기울기를 초기 기울기와 최종기울기의 분율로 나타낼 수 있다. 주목해야 할 점은 두 변수의 중간점 분율(θ)이 서로 일치할 필요가 없다는 점이다.

평균 기울기가 초기와 최종점의 기울기로 표현되기 때문에 GMR에서 나타나는 중간점의 상태변수를 결정해야 하는 번거로움이 없다. 구성식의 해석해를 알고 있는 경우 GMR 방법은 정확한 근사가 불가능한 반면 GTR은 각 상태변수에 따라 다른 중간점을 선정함으로써 정확하게 근사할 수 있다.

GMR을 적용한 구성식의 적분은 중간점의 상태변수가 항복조건 혹은 유동법칙을 만족시키고 최종 상태변수는 항복조건이나 유동법칙을 만족시키지 않는다. 따라서 최종 상태변수는 정밀해와 큰 차이를 보일 수 있다. GTR은 최종 상태변수가 항복조건 혹은 유동법칙을 만족하기 때문에 정밀해와 큰 차이를 보이지는 않는다. 주목해야 할 점은 중간점 분율(θ)이 1이면 GTR과 GMR 모두 완전 내역적 방법이 되어 동일한 결과를 도출한다는 것이다.

2.3 Chaboche model의 적분

상태변수의 증분을 적분 형태로 표현하면 식 (18)~(20)과 같다.

$$\Delta \mathbf{s}_{ij} = 2\mu\Delta \mathbf{e}_{ij} - 3\mu \int_n^{n+1} \mathbf{n}_{ij} \Delta p dt \quad (18)$$

$$\Delta \mathbf{X} = C \int_n^{n+1} \mathbf{n} p dt - \gamma(p) \int_n^{n+1} \mathbf{X} p dt \quad (19)$$

$$\Delta R = bQ \int_n^{n+1} p dt - b \int_n^{n+1} R p dt \quad (20)$$

식 (18)~(20)에는 네종류의 적분항이 포함되어 있다.

GMR을 적용한 Chaboche 구성식의 적분은 윤삼손⁽⁶⁾에 의해 수행되었으며 자세한 유도 과정과 해석결과는 참고문헌에 수록되어 있다.

4개의 적분항을 GTR에 의해 근사하면 식 (21)~(24)와 같이 표현된다.

$$\int_n^{n+1} \mathbf{n} p dt = [(1-\theta)(\mathbf{n} p)_n + \theta(\mathbf{n} p)_{n+1}] \Delta t \quad (21)$$

$$\int_n^{n+1} \mathbf{X} p dt = [(1-\zeta)(\mathbf{X} p)_n + \zeta(\mathbf{X} p)_{n+1}] \Delta t \quad (22)$$

$$\int_n^{n+1} p dt = [(1-\xi)\dot{p}_n + \xi\dot{p}_{n+1}] \Delta t \quad (23)$$

$$\int_n^{n+1} R p dt = [(1-\eta)(R p)_n + \eta(R p)_{n+1}] \Delta t \quad (24)$$

여기서 θ, ξ, ζ, η 는 중간점 분율을 의미한다.

식 (21)을 이용하여 식 (18)를 전개하면 최종점에서의 편차 응력을 식 (25)와 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{s}_{n+1} = \tilde{\mathbf{s}}_{n+1} - 3\mu\theta(\mathbf{n} p)_{n+1} \Delta t \quad (25)$$

여기서 $\tilde{\mathbf{s}}_{n+1} = \mathbf{s}_n + 2\mu\Delta \mathbf{e}_{ij} - 3\mu(1-\theta)\mathbf{n}_n \dot{p}_n \Delta t$ 이다.

식 (21)과 식 (22)를 이용하여 식 (19)를 전개하면 최종점에서 역응력을 식 (26)과 같이 유도할 수 있다.

$$\mathbf{X}_{n+1} = \frac{\Psi}{\Phi} \mathbf{X}_n + \frac{C\Delta t}{\Phi} [(1-\theta)(\mathbf{n} p)_n + \theta(\mathbf{n} p)_{n+1}] \quad (26)$$

여기서 $\Phi = 1 + \gamma\zeta\dot{p}_{n+1}\Delta t$, $\Psi = 1 - \gamma(1-\zeta)\dot{p}_n\Delta t$ 이다. 유사한 방식으로 최종점의 저지 응력은 식 (27)과 같이 유도할 수 있다.

$$R_{n+1} = \frac{\Theta}{\Omega} R_n + \frac{bQ}{\Omega} [(1-\eta)\dot{p}_n + \eta\dot{p}_{n+1}] \Delta t \quad (27)$$

여기서 $\Omega = 1 + b\eta\dot{p}_{n+1}\Delta t$, $\Theta = 1 - (1-\eta)\dot{p}_n\Delta t$ 이다.

식 (25)에서 식 (26)을 뺀 후 양변을 정리하면 식 (28)를 얻을 수 있다.

$$(\mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{X}_{n+1}) \left[1 + \theta \left(3\mu + \frac{C}{\Phi} \right) \frac{\dot{p}_{n+1}\Delta t}{J_{n+1}} \right] = \tilde{\mathbf{s}}_{n+1} - \tilde{\mathbf{X}}_{n+1} \quad (28)$$

여기서 $\tilde{\mathbf{X}}_{n+1} = \frac{\Psi}{\Phi} \mathbf{X}_n + \frac{C}{\Phi} (1-\theta)\mathbf{n}_n \dot{p}_n \Delta t$ 이다.

$\mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{X}_{n+1}$ 는 소성변형률 방향을 의미하는데 식 (28)에 의해 $\tilde{\mathbf{s}}_{n+1} - \tilde{\mathbf{X}}_{n+1}$ 와 평행하다. 선형 이동경화모델의 경우 $\tilde{\mathbf{s}}_{n+1} - \tilde{\mathbf{X}}_{n+1}$ 는 초기상태에서 이미 계산되기 때문에 소성 보정과정에서 항상 일정하다. 하지만 비선형 이동 경화모델의 경우 $\tilde{\mathbf{s}}_{n+1} - \tilde{\mathbf{X}}_{n+1}$ 은 최종점의 소성변형률 속도(\dot{p}_{n+1})의 함수가 되고 소성 보정과정에서 계속 수정된다.

식 (28)의 양변에 내적을 취하면 식 (29)로 정리

Table 1 Material Parameter of Chaboche Model

Material	T(C°)	n	K	k	C	r	Q	β	a ₀	E
316L stainless steel	20	24	151	82	162400	2800	60	8	1	196000
316L stainless steel	600	12	150	6	24800	300	80	10	1	149760

된다.

$$J(\mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{X}_{n+1}) + \theta \left(3\mu + \frac{C}{\Phi} \right) \dot{p}_{n+1} \Delta t = J(\tilde{\mathbf{s}}_{n+1} - \tilde{\mathbf{X}}_{n+1}) \quad (29)$$

식 (4)의 유동법칙을 변형하면 식 (27)와 같은 동적항복조건(Dynamic yield condition)을 구할 수 있다.

$$J(\mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{X}_{n+1}) - Y_{n+1} = 0 \quad (30)$$

여기서 $Y_{n+1} = R_{n+1} - k - K(\dot{p}_{n+1})^{1/n}$ 이다.

식 (29)과 식 (30)을 정리하면 식 (31)와 같이 등가 소성변형률 속도(\dot{p}_{n+1})이 미지수인 비선형 방정식을 유도할 수 있다.

$$G(\dot{p}_{n+1}) = \tilde{\sigma} - \theta \left(3\mu + \frac{C}{\Phi} \right) \dot{p}_{n+1} \Delta t - Y_{n+1} \quad (31)$$

여기서 $\tilde{\sigma} = J(\tilde{\mathbf{s}}_{n+1} - \tilde{\mathbf{X}}_{n+1})$ 이다.

Newton 방법을 사용하여 $G(\dot{p}_{n+1}) = 0$ 를 만족시키는 등가 소성변형률 속도(\dot{p}_{n+1})를 결정한다.

$$\dot{p}_{n+1}^{(i+1)} = \dot{p}_{n+1}^{(i)} - \frac{G(\dot{p}_{n+1}^{(i)})}{\partial G^{(i)} / \partial \dot{p}_{n+1}} \quad (32)$$

식 (31)에서 회복항과 속도 의존성을 고려하지 않으면 \dot{p}_{n+1} 를 식 (33)와 같이 계산할 수 있으며 이 값을 Newton iteration의 초기값으로 사용하였다.

$$\dot{p}_{n+1}^{(0)} = \frac{J(\mathbf{s}^{pr} - \mathbf{X}_t) - (k + R_t)}{\theta(3\mu + C + bQ)\Delta t} \quad (33)$$

여기서 $\mathbf{s}^{pr} = \mathbf{s}_n + 2\mu\Delta\mathbf{e}_{ij}$ 이다.

접선 강성 행렬은 응력 증분과 변형률 증분의 관계를 나타내는 행렬로 평형 방정식의 해를 구할 때 2 차 수렴도를 유지하기 위하여 필요한 성분이 다.⁽⁸⁾

식 (22), 식 (25), 식 (28)의 양변에 변분을 취한 뒤 연립하면 접선강성 행렬을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \partial\Delta\sigma_{ij} = & \left[\kappa - \frac{2}{3}\mu \left(1 - \frac{3\theta\mu\dot{p}_{n+1}\Delta t}{\tilde{\sigma}} \right) \right] \delta_{ij} \partial\Delta\varepsilon_{kk} \\ & + 2\mu \left(1 - \frac{3\theta\mu\dot{p}_{n+1}\Delta t}{\tilde{\sigma}} \right) \partial\Delta\varepsilon_{ij} \\ & + \left[\frac{9\mu^2\theta\Delta t}{\tilde{\sigma}G'} \left\{ \left(\tilde{\sigma}_{n+1} - \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \dot{p}_{n+1}} \dot{p}_{n+1} \right) + \theta C \Delta t (\dot{p}_{n+1})^2 \frac{\Phi'}{\Phi^2} \right\} \right] n_{ij} n_{kl} \partial\Delta\varepsilon_{kl} \\ & + \frac{9\mu^2\theta\dot{p}_{n+1}\Delta t}{\tilde{\sigma}G'} \frac{\Phi'}{\Phi^2} \tilde{X}'_{ij} n_{kl} \partial\Delta\varepsilon_{kl} \end{aligned} \quad (34)$$

여기서 $\tilde{\sigma}_{n+1} = J(\mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{X}_{n+1})$ 이고 κ 는 bulk modulus이다. 변수의 ‘ ’ 기호는 \dot{p}_{n+1} 에 대한 미분을 의미한다. 식 (34)에서 주목할 점은 우변의 마지막 항에 역응력($\tilde{\mathbf{X}}_{n+1}$)이 포함되어 있다는 점이다.

2.4 적분법의 비교

초기 상대변수만을 사용하는 외연적 방법으로 Chaboche 구성식을 적분할 경우 해가 불안정하여 시간증분이 일정이상 커지면 곧바로 발산한다. 또한 정확한 계산을 위해서는 시간증분이 매우 작아야 하기 때문에 비효율적이다.⁽⁶⁾ 따라서 본 연구에서는 외연적 적분을 제외한 3 가지 적분법을 사용하여 Chaboche 모델을 적분하여 그 결과를 비교하였다. 첫번째 조건은 GTR을 사용한 적분 방법으로 중간점 분율(θ)이 0.5인 경우이다. 식 (21)~(24)에서 4 종류의 중간점 분율이 사용되는데 비교의 편의를 위하여 모두 같은 값으로 고정하였다. 두번째 경우는 중간점 분율이 1인 경우로 완전 내연적 적분법(fully implicit integration, 이하 FI)이다. 그리고 마지막 경우는 GMR을 사용하고 중간점 분율(θ)이 0.5인 경우이다. 중간점 분율(θ)이 1이면 GTR과 GMR 모두 완전 내역적 방법이 되어 동일한 결과를 도출한다. 따라서 GMR과 FI의 비교를 통해서 GMR에서의 중간점의 영향을, GTR과 FI의 비교를 통해서 GTR에서의 중간점의 영향을 알 수 있다. 편의상 첫번째 방법을 GTR 적분, 두번째 방법을 FI 적분, 그리고 마지막 방법을 GMR 적분으로 지칭하기로 한다.

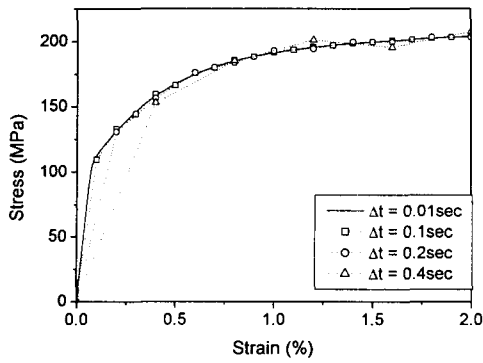


Fig. 3 Tension curve (GTR, $\theta=0.5$)

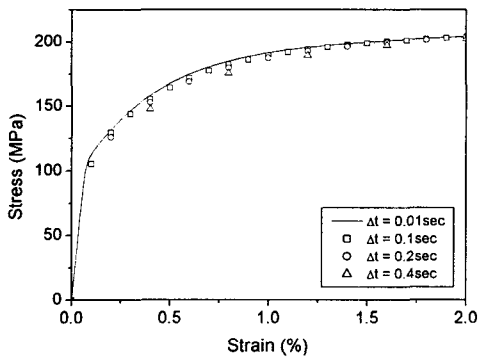


Fig. 4 Tension curve (Fully implicit)

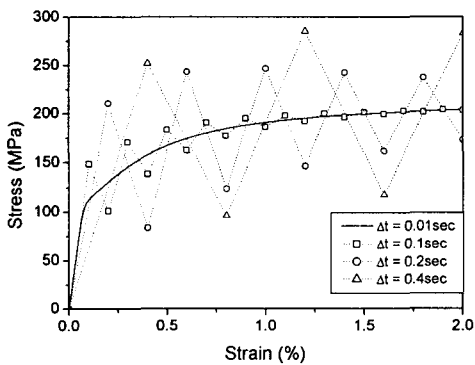


Fig. 5 Tension curve (GMR, $\theta=0.5$)

2.5 ABAQUS 와의 연결

본 연구에서 다루는 구성식과 시간 적분법은 상용 유한요소코드인 ABAQUS 에 사용자 재료 (User material, UMAT)서브루틴을 통해 결합되었다. 이 서브루틴은 전체 시스템의 평행방정식을 구

성하는 과정에서 호출되며 각 적분점에서의 강성 행렬과 응력 증분을 계산한다. 시간 적분법은 증분 초기의 응력 및 상태변수, 그리고 변형률 증분 ($\Delta\epsilon$)과 시간 증분(Δt)로부터 최종 상태의 응력 및 상태 변수를 계산하는 과정에 사용되며 적분과정과 일관된 강성행렬을 계산하여 전체 시스템의 강성행렬을 구성하게 된다.

대변형을 고려하기 위하여 변형경사행렬 (deformation gradient tensor)과 평균회전행렬 (Averaged rotation tensor)이 제공되는데 본 연구에서는 평균회전행렬을 사용하여 재료의 강제 회전 (Rigid Body Rotation)을 고려하였다.⁽⁹⁾

3. Numerical Application

3.1 단순인장 해석

세가지 적분법을 사용하여 단순 인장 해석을 수행하였다. 해석에 사용된 재료 상수는 316 스테인리스 강의 600°C 재료 상수로 Table 1 에 수록되어 있다. 일정한 변형률 속도(1%/sec)로 2%의 변형률까지 인장하였다. 시간 증분은 0.1sec, 0.2sec, 0.4sec 의 세가지 조건에서 해석을 수행하고 결과를 비교하였다. 해석해가 존재하지 않기 때문에 시간증분을 0.01sec 로 계산한 결과를 수치해로 사용하였다. 시간증분이 0.01sec 정도로 충분히 작은 경우 세가지 방법 모두 동일한 결과가 도출된다.

Fig. 3 은 GTR 적분의 인장곡선을 나타낸 그림이다. 모든 시간 증분에서 수치해에 근접한 결과를 보이고 있으며 세조건중에서 오차가 가장 작다. Fig. 4 는 FI 적분의 결과인데 해석 결과가 수치해보다 항상 작다. 시간증분이 커질수록 오차가 증가하는 경향을 보인다. Fig. 5 는 GMR 적분의 결과로 수치해를 중심으로 진동하는 형상을 보인다. 시간증분에 비례하여 진폭이 증가한다. 해가 발산하지는 않지만 진동의 폭이 매우 크고 오차가 최대 60%에 이른다.

Fig. 6 은 세 가지 적분법을 통해 구한 소성 변형률 속도의 이력을 나타내고 있다. GMR 적분과 FI 적분의 경우 선형화 과정에 의해 소성 변형률 속도가 증분내에서 일정하다.

GMR 적분의 경우 매 증분마다 큰 변화를 보이지만 FI 적분의 경우 수치해에 곧 수렴하는 경향을 보인다. GTR 적분은 소성 변형률은 초기 소성 변형률 속도와 최종 소성 변형률속도의 평균값으로 계산된다. GTR 적분 역시 GMR 적분과 마찬가지로 수치해를 중심으로 진동하는 형태를 보이지만 그

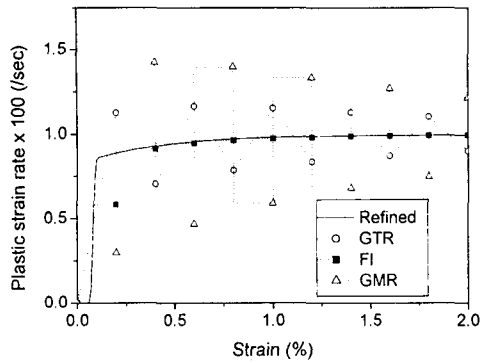


Fig. 6 Change of plastic strain rate (Δt : 0.2sec)

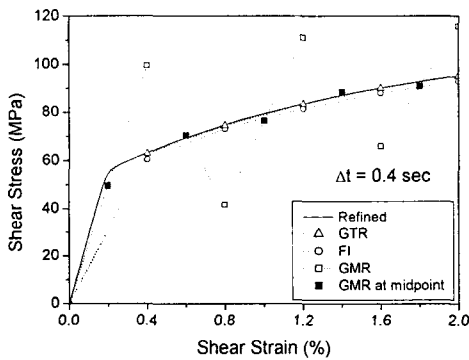


Fig. 7 shear stress-strain curve (Δt : 0.4sec)

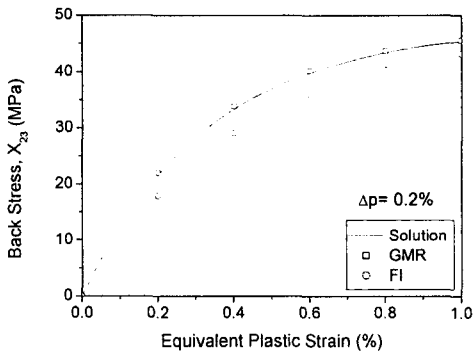


Fig. 8 Back stress evolution curve

폭이 훨씬 작다.

3.2 단순 전단 변형해석

인장 해석과 함께 적분법의 검증에 많이 사용 되는 단순전단 변형해석을 수행하였다. 단순전단

변형(ϵ_{23})이 작용할 경우 σ_{23} , X_{23} 를 제외한 모든 텐서 성분은 다 0 이 되기 때문에 적분법을 분석하는 데 유용하다. 316 스테인리스강의 600°C 에서의 재료상수(Table 1)를 사용하였으며 변형률 속도는 인장 해석과 동일하게 1%/sec 로 고정하였다. 해석 해가 존재하지 않기 때문에 시간증분은 0.01sec 인 경우를 수치해로 사용하였다.

Fig. 7 은 시간증분은 0.4sec 로 고정한 경우의 전단 응력-변형률 곡선을 나타낸 것이다. GTR 이 수치해에 가장 근접한 결과를 보이고 FI 적분이 그 다음이다. GMR 적분은 매우 큰 폭으로 진동하고 있으나 Fig. 7 에서 속이 찬 기호(●,▲)로 나타난 중간점의 응력을 보면 수치해와의 차이가 그리 크지 않다.

Fig. 7 에서 FI 적분의 결과에서 오차가 0 으로 수렴하지 않고 일정한 값이 유지되는 것이 관찰되는데 이것은 역응력을 계산하는 과정에서 생기는 오차이다. 단순 전단 변형의 경우 식 (7)을 적분하여 역응력의 해석 해를 식 (35)와 같이 구할 수 있다.

$$X = \frac{C}{\gamma\sqrt{3}}(1 - \exp(-\gamma p)) \tag{35}$$

여기서 p 는 등가 소성변형률로써 $p = \int \dot{p} dt$ 이다. 식 (7)을 GMR 에 의해 선형화하여 역응력을 계산하면 식 (36)과 같다.

$$X_{t+\Delta t} = \frac{\theta - 1}{\theta} X_t + \frac{1}{\theta} \frac{X_t + \theta C / \sqrt{3} \Delta p}{1 + \theta \gamma \Delta p} \tag{36}$$

중간점의 분율이 1 과 0.5 인 경우의 역응력과 해석해를 비교하면 Fig. 8 과 같다. 등가 소성변형률이 0.2%씩 증가되는 경우 GMR 적분은 거의 차이를 보이지 않지만 FI 적분은 해석해와 상당한 차이를 보인다. 이것은 FI 적분은 식 (7)의 비선형성을 충분히 고려하지 못해서 발생하는 절삭오차로 증분의 크기에 비례하여 증가한다. FI 적분은 안정적이지만 상태변수의 비선형성이 큰 경우에는 상당한 절삭오차가 발생할 수 있다.

3.3 Nonproportional loading 의 해석

인장 변형과 전단 변형은 주응력의 방향이 변하지 않는 비례하중(proportional loading)이기 때문에 소성 변형률 방향이 변하지 않으며 계산의 정확도는 주로 등가 소성변형률 증분(Δp)의 계산에 의존한다. 하지만 비례하중이 아닌 경우 주응력과 소성변형률의 방향이 회전하는 경우에는 소성변형률 방향(n)의 변화 역시 계산의 정확도에 큰 영향을

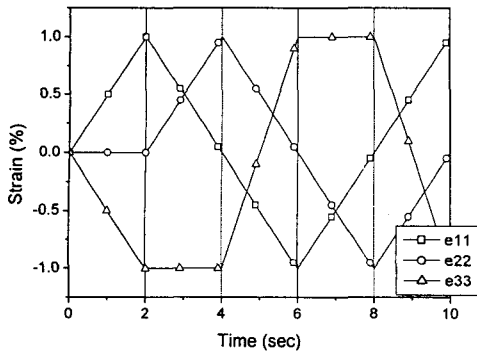


Fig. 9 Strain history of nonproportional loading

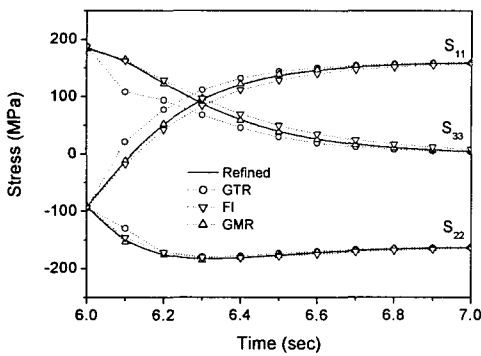


Fig. 10 Stress history of nonproportional loading (Δt: 0.1sec)

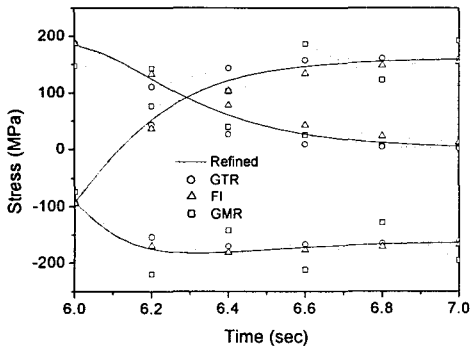


Fig. 11 Stress history of nonproportional loading (Δt: 0.2sec)

미친다. 해석에 사용된 재료 상수는 316 스테인리스 강의 20°C 재료 상수로 Table 1에 수록되어 있다.

Fig. 9은 해석에 사용된 nonproportional loading의 변형률 이력이다. 변형률의 합이 항상 0이기

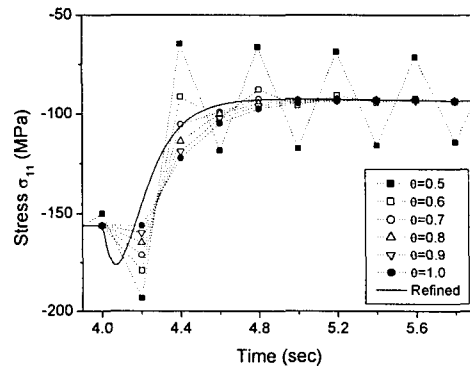


Fig. 12 Stress history with different midpoint parameters (General Midpoint Rule)

때문에 변형률은 편차변형률과 동일하며 매 2 초마다 변형률 방향의 급격하게 변한다. 시간 증분이 0.1sec 과 0.2sec 인 경우에 대해 해석을 수행하였다. 해석 해가 존재하지 않기 때문에 시간증분이 0.01sec 인 경우를 수치해로 사용하였다. Fig. 10은 해석결과와 수치해의 차이가 가장 크게 나타나는 6 초에서 7 초까지의 응력 이력으로 시간증분은 0.1sec 이다. GMR 적분이 가장 정확하고 GTR 적분은 수치해보다 응력변화가 더 크고 FI 적분은 수치해보다 응력변화가 더 작다. 수치 해는 GTR 적분과 FI의 중간에 위치하는데 이것으로 GTR 적분의 최적의 분율은 1과 1/2 사이에 존재함을 알 수 있다. 시간 증분이 0.1sec 인 경우 GMR 적분이 가장 정확한 결과를 도출하지만 시간 증분이 증가하면 오차가 급격히 증가한다. Fig. 11은 시간 증분이 0.2sec 일때의 계산 결과인데 GMR 방법은 수치해 주변을 큰 폭으로 진동하기 때문에 오차가 매우 큰 반면 나머지 GTR 적분과 FI 적분은 앞서의 식과 유사한 경향을 보인다.

Fig. 12는 GMR 방법과 여러 중간점 분율을 사용하여 구한 응력 이력으로 시간증분은 모두 0.2sec로 고정하였다. 모든 중간점 분율의 결과에서 오차가 발생하고 있으며 GMR 방법을 사용하는 경우 중간점 분율을 적절히 조절하더라도 수치해와 유사한 결과를 얻을 수 없음을 알 수 없다. Fig. 13은 GTR 방법을 사용한 해석 결과인데 중간점이 0.5인 결과와 중간점이 1.0인 결과 사이에 수치해가 존재하고 있다. 이런 경우 중간점 분율을 적절히 조절함으로써 수치해와 유사한 결과를 얻을 수 있다.

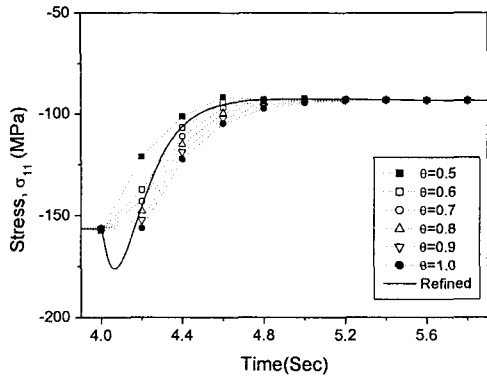


Fig. 13 Stress history with different midpoint parameters (General Trapezoidal Rule)

Table 2 Error of different integration schemes

	θ	0~2sec	2~4sec	4~6sec	6~8sec	8~10sec
G	0.5	102.7	43.8	218.4	146.9	318.3
	0.6	44.7	22.4	76.6	33.3	98.6
M	0.7	34.5	20.0	50.1	28.3	62.1
	0.8	21.1	21.1	35.6	32.2	46.2
R	0.9	8.6	25.4	35.2	40.9	49.8
	1.0	8.6	32.1	46.4	52.2	66.0
G	0.9	7.8	24.4	34.5	33.0	48.8
	0.8	6.9	35.8	22.5	44.3	31.5
T	0.7	6.0	56.6	11.8	77.7	15.8
R	0.6	5.0	80.5	11.3	118.7	15.5
	0.5	5.3	130.0	39.2	172.5	55.6

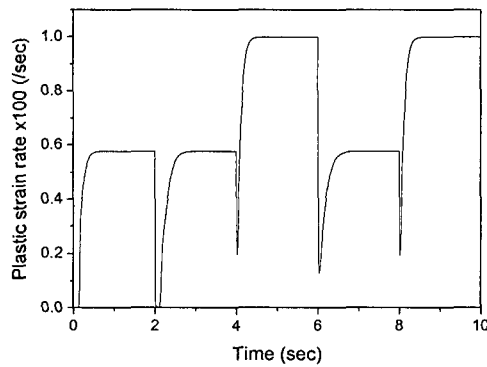


Fig. 14 Equivalent Plastic strain rate ($\Delta t = 0.01\text{sec}$)

적분 방법의 정확도를 비교하기 위하여 Fig. 9의 변형률 이력을 2초간격의 5개의 구간으로 구분하고 각 구간에서 발생하는 오차를 식 (37)과 같이

정의하였다.

$$E = \sqrt{\sum_{i=1}^N \|\check{\sigma}(t_i) - \sigma(t_i)\|^2} \quad (37)$$

여기서 $\check{\sigma}(t_i)$ 는 시간 t_i 에서의 정밀수치해를, $\|\mathbf{a}\|$ 는 벡터 \mathbf{a} 의 내적을 의미한다. Fig. 10과 Fig. 11에서 알 수 있듯이 각 구간의 최종점에서는 모든 조건의 해석결과가 수치해에 수렴하고 있기 때문에 각 구간의 오차는 이전 구간에서 발생하는 오차에 크게 영향을 받지 않는다. 적분 방법과 중간점에 따라 각 구간에서 발생하는 오차가 큰 차이를 보이며 이 결과를 Table 2에 정리하였다. 짧게 표시된 최소 오차는 구간에 따라 다른 조건에서 구한 것이기 때문에 최적의 조건을 선정하기는 쉽지 않다. Fig. 14는 등가소성변형률속도($\dot{\epsilon}$)의 이력을 나타내는 것이다. 4~6sec 구간과 8~10sec 구간은 다른 구간보다 등가소성변형률의 변화가 더 큰데 이 구간에서는 GTR 적분 방법이 더 좋은 결과를, 나머지 구간에서는 GMR 적분이 더 정확한 결과를 도출한다. 일반적으로 많이 사용되는 FI 적분법은 비교적 안정적인 경향을 보이지만 최적의 결과를 얻기는 힘들며 변형 양상에 따라 중간값을 적절히 조정하는 것이 바람직하다.

4. 결론

점소성 구성식의 적분 결과에 사용되는 선형화 방법을 비교하였다. 비선형 이동경화를 고려한 점소성 구성식을 선형화하여 적분을 근사할 경우 적분 결과는 선형화 방법과 중간점의 분율에 의존한다. 대표적 점소성 구성식인 Chaboche model을 GTR과 GMR로 선형화하여 적분을 수행하였다. 내연적 적분 방법을 3가지로 분류하고 단순 인장 변형과 단순 전단 변형 그리고 nonproportional 하중에 대해 해석을 수행하였다.

GMR을 적용한 적분은 시간 증분이 충분히 작은 경우 정확한 적분 결과를 도출하지만 일정 이상보다 커지면 오차의 진동이 발생하고 시간증분에 비례하여 커진다.

Fully implicit 적분은 상태변수는 물론 상태변수의 속도까지 안정적인 결과를 도출하지만 비선형성이 큰 상태변수의 경우 선형화 과정에서 큰 절삭오차를 발생시킬 수 있다.

GTR을 적용한 적분은 인장 변형이나 전단변형에서는 가장 정확한 결과를 도출한다. 중간점 분율이 1보다 작은 경우에도 GMR 적분에서 관찰되는 오차의 진동이 관찰되지 않는다.

Nonproportional 하중의 경우 소성변형률 속도의 변화가 큰 영역에서는 GTR 적분이, 변화가 작은 영역에서는 GMR 적분이 더 정확한 결과를 도출한다. FI 적분으로는 최적의 결과를 얻기는 힘들며 변형 양상에 따라 중간값을 적절히 조정하는 것이 바람직하다.

후 기

본 연구는 국가지정 연구실 CARE Lab.의 지원 하에 수행되었으며 이에 감사를 드립니다.

참고문헌

- (1) Miller, A. K., 1987, *Unified Constitutive Equations for Creep and Plasticity*, Elsevier Applied Science, London.
- (2) Krausz, A. S. and Krausz, K., 1996, *Unified Constitutive Laws of Plastic Deformation*, Academic Press.
- (3) Orits, M., and Simo, J. C., 1986, "An Analysis of a New Class of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Equations," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 23, p. 353.
- (4) Honberger, K., and Stamm, H., 1989, "An Implicit Integration Algorithms with a Projection Method for Viscoplastic Constitutive Equation," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 28, p. 2397.
- (5) Chaboche, J. L. and Cailletaud, G., 1996, "Integration Methods for Complex Plastic Constitutive Equations," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, p.125
- (6) Yoon, S., Lee, S.-B., "A Semi-Implicit Integration for Rate-Dependent Plasticity with Nonlinear Kinematic Hardening," *Transaction of the KSME, A*, to be published.
- (7) Lemaitre, J., and Chaboche, J.-L., 1990, *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, Cambridge.
- (8) ABAQUS, *User's manual*, Version 6.1, 2000, HKS, USA.
- (9) Martin, E.B. and McDowell, D.L., 1997, "A Semi-Implicit Integration Scheme for Rate Dependent and Rate-Independent Plasticity," *Computer & Structures*, Vol. 63, No. 3, pp. 579~600.