

## 유체유동을 갖는 회전 외팔 파이프의 동특성에 미치는 끝단질량의 영향

윤한익<sup>†</sup> · 최창수\* · 손인수\*\*  
(2002년 7월 23일 접수, 2003년 9월 9일 심사완료)

### The Influence of Tip-mass on Dynamic Characteristics of Rotating Cantilever Pipe Conveying Fluid

Han-Ik Yoon, Chang-Soo Choi and In-Soo Son

**Key Words** : Rotating Cantilever Pipe Conveying Fluid(유체이송 회전 외팔 파이프), Dynamic Characteristics(동적 특성), Tip Mass(끝단질량), Follower Force(종동력)

#### Abstract

The vibrational system of this study is consisted of a rotating cantilever pipe conveying fluid and the tip mass. The equation of motion is derived by using the Lagrange equation. The influences of the rotating angular velocity and the velocity of fluid flow in a cantilever pipe have been studied on the dynamic characteristics of a rotating cantilever pipe by the numerical method. The effects of a tip mass on the dynamic response of a cantilever pipe are also studied. The tip-amplitude and maximum tip-deflection of each direction are directly proportional to the tip mass of the cantilever pipe in steady state. It identifies that the influence of the fluid velocity and the rotating angular velocity of the cantilever pipe give much variation the bending tip-displacement of steady state and the bending tip-displacement of non-steady state, respectively. The influence of the rotating angular velocity gives much the deflection of axial direction.

#### 1. 서 론

이송유체를 갖는 회전 외팔 파이프의 형태는 대표적으로 스프링 쿨러, 자동화의 목적으로 사용되는 유연한 로봇 매니플레이터를 들 수 있으며, 추진력을 받는 미사일, 회전 날개, 파이프 배관계의 내부를 흐르는 유체에 의한 진동문제 등 비보존력을 받는 탄성계의 동적 특성 및 안정성의 문제는 많은 공학분야에서 관심의 대상이 되

어져 왔다. 특히, 파이프의 끝단에 집중 종동력으로 작용하는 점성이 매우 작은 유체의 분사력은 탄성계의 동특성과 안정성에 큰 영향을 미친다. 이러한 영향을 고려한 회전하지 않는 유체유동을 가진 외팔 보에 관한 연구에 비해 회전하는 유체유동 외팔 보에 대한 연구는 그리 활발하지 않은 실정이다. 유체의 분사력과 속도가 계의 안정성에 미치는 영향과 함께 회전에 의한 영향도 고려되어진 계의 동적 특성 및 안정성의 명확한 규명이 필요하다.

또, 외팔보가 끝단질량을 갖고 회전운동을 하는 대표적 공학적 예는 우주왕복선이 긴 구조물 끝에 실험장비를 장착하고 각종실험을 수행하거나, 또는 산업용 로봇의 매니플레이터 말단장치(end-effector) 등이 있다. 따라서 이들 끝단질량이 전체계의 동적특성에 미치는 영향을 해석하는 것

---

<sup>†</sup> 책임저자, 회원, 동의대학교 기계산업시스템공학부  
E-mail : hiyoon@dongeui.ac.kr  
TEL : (051)890-1645 FAX : (051)890-2232

\* 부산정보대학 기계자동차계열

\*\* 동의대학교 대학원 기계공학과

---

은 중요한 문제라 할 수 있다.

유체유동에 의한 송수관의 진동과 안정성에 대한 연구는 Ashley와 Haviland<sup>(1)</sup>에 의해 비롯되어 동역학에 대한 이론적 연구와 실험적 연구<sup>(2,3)</sup>를 통해 송수관이 양단 단순지지된 경우는 유동유체의 힘은 보존적이고, 계는 어떤 임계유속 이상에서 발산형 불안정을 일으키지만 유체가 나오는 유출 끝단이 자유인 경우는 유동유체의 힘이 비보존적이며, 계는 어떤 임계유속 이상에서 플러터(flutter) 불안정을 일으킨다는 것을 제시하였다. 또, 회전운동을 하는 외팔보의 진동해석에 관한 연구는 Southwell<sup>(4)</sup>로부터 비롯하여 많은 연구자들에 의해 연구<sup>(5~7)</sup>되어 왔다. 최근들어 회전운동을 하는 외팔보에 대한 연구는 회전하는 유연 매니플레이터의 비선형 자유진동해석,<sup>(8)</sup> 이동질량을 갖는 회전 매니플레이터의 진동수 평가,<sup>(9)</sup> 그리고 끝단질량을 갖는 곡선보의 회전운동의 동특성 해석<sup>(10)</sup> 및 회전 유체튜브의 동특성 해석<sup>(11)</sup> 등 광범위하게 연구되어지고 있다.

이 연구에서는 점성이 매우 작은 이송유체의 분사력에 의하여 회전 외팔 파이프의 끝단에 집중 중동력이 작용하는 계를 고려하였으며, 계의 운동방정식은 가정모드법과 Lagrange 방정식으로 유도하여 수치해석 하였다. 수치해석을 통하여 외팔 파이프 끝단의 축방향 및 횡방향 변위에 미치는 끝단질량의 영향을 고찰하였으며, 이송유체의 속도 및 외팔 파이프의 회전각속도가 각 방향의 변형 및 진폭에 미치는 영향을 연구함으로써 계를 구성하는 설계변수들의 상호 연성관계를 제시하였다.

## 2. 이론해석

Fig. 1은 이 논문에서 해석 예제로 사용한 반경  $r$ 의 회전축에 고정되어 회전운동을 하는 이송유체를 갖는 유연 외팔 파이프를 모델링한 것이다. 중력의 영향과 이송유체를 가진 외팔 파이프 시스템의 내부, 외부 감쇠는 고려하지 않았으며, 외팔 파이프의 단면은 길이에 비해 아주 작고, 따라서 오일러 가정 및 보 이론을 적용하며, 보는 균질하고, 등방성이라 가정한다.

Fig. 1에서  $x$ 는 외팔 파이프의 고정점  $O$ 로부터 변형전 임의 절점  $P_0$ 까지의 거리를,  $s$ 는 변

형전 임의 절점  $P_0$ 에서 변형후의 절점  $P$ 까지 변형할 때 파이프가 인장된 길이를 나타내며,  $\bar{u}$ 는 임의 절점의 탄성변위 벡터를 나타낸다. 또,  $m_i$ 는 스프링 쿨러의 노즐 또는 매니플레이터의 말단장치에 해당하는 외팔 파이프의 끝단질량을 의미하며,  $v_f$ 는 유체의 속도, 그리고  $r$ 은 파이프가 연결된 고정축의 반경을 나타낸다. 외팔 파이프의 회전운동 중에 생기는 파이프의 축방향 및 횡방향의 탄성변형은 가정 모드법(assumed-mode method)을 이용하여 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$s = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \quad (1)$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \quad (2)$$

여기서,  $\phi_{1i}(x)$ ,  $\phi_{2i}(x)$ 는 각각 축방향과 횡방향 가정모드함수,  $q_{1i}(t)$ ,  $q_{2i}(t)$ 는 일반화 좌표들, 그리고  $\mu_1, \mu_2$ 는 일반화 좌표의 수를 의미한다. 가정 모드함수  $\phi_{1i}(x)$ ,  $\phi_{2i}(x)$ 는 한쪽 단이 고정되고 다른 한쪽은 끝단질량이 부착된 외팔보의 방정식으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\phi_{1i}(x) = \sin \frac{\lambda_{ai} x}{l} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \phi_{2i}(x) &= \cos(\lambda_i x) - \cosh(\lambda_i x) \\ &- \alpha_i [\sin(\lambda_i x) - \sinh(\lambda_i x)] \end{aligned} \quad (4)$$

식 (3)에서의  $l$ 은 외팔 파이프의 전체 길이를 의미하며, 식 (4)에서  $\alpha_i$ 는 외팔보의 자유진동의  $i$ 번째 고유치이며 다음 식으로 주어진다.

$$\alpha_i = \frac{\cos(\lambda_i l) + \cosh(\lambda_i l)}{\sin(\lambda_i l) + \sinh(\lambda_i l)} \quad (5)$$

식 (3), (4)에서  $\lambda_{ai}$ ,  $\lambda_i$ 는 다음 식에서 각각 구한다.

$$\cot(\lambda_{ai}) = \frac{m_i}{ml}(\lambda_{ai}) \quad (6)$$

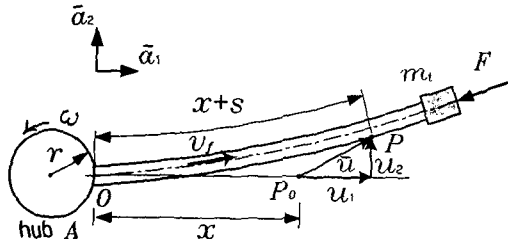


Fig. 1 Schematic diagram of a rotating cantilever pipe conveying fluid

$$\frac{1 + \cos(\lambda_i l) \cosh(\lambda_i l)}{\sin(\lambda_i l) \cos(\lambda_i l) + \cos(\lambda_i l) \sinh(\lambda_i l)} \quad (7)$$

$$= \frac{m_i}{m_l}(\lambda_i l)$$

여기서  $m$ 은 외팔 파이프의 단위 길이당 질량을 나타내며,  $m_i$ 는 외팔 파이프의 끝단질량을 의미한다.

2.1 회전외팔 파이프의 에너지식

변형에 따른 보의 임의 질점  $P$ 점의 속도는 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\bar{v}_p = {}^O\bar{v} + {}^A\bar{v}^P + \omega(\bar{x} + \bar{u}) \quad (8)$$

여기서  ${}^O\bar{v}$ 는  $O$ 점의 속도,  ${}^A\bar{v}^P$ 는  $P$ 점의  $A$ 점에 대한 상대속도, 그리고  $\omega$ 는 축의 회전각 속도를 나타내고 있다. 식 (6)으로부터 각 링크의 임의 질점의 속도를 구할 수 있다. 식 (6)의 각 항들은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} {}^O\bar{v} &= (r \times \omega) \bar{a}_2 \\ {}^A\bar{v}^P &= \dot{u}_1 \bar{a}_1 + \dot{u}_2 \bar{a}_2 \\ \bar{x} &= x \bar{a}_1 \\ \bar{u} &= u_1 \bar{a}_1 + u_2 \bar{a}_2 \end{aligned} \quad (9)$$

따라서 식 (8)의 속도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{v}_p &= (\dot{u}_1 - u_2) \bar{a}_1 \\ &+ (r\omega + \dot{u}_2 + \omega x + \omega u_1) \bar{a}_2 \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $(\cdot)$ 는 시간  $t$ 에 대한 미분을 나타내고,  $u_1$  대신 인장방향 변위  $s$ 를 사용하기 위하여  $u_1$ 과  $s$ 사이의 관계를 다음의 기하학적 제한조건에 의해 결정할 수 있다.

$$s \approx u_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 dx \quad (11)$$

따라서 외팔 파이프의 운동에너지와 포텐셜에너지는 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} T_b &= \frac{1}{2} m \int_0^l (\bar{v}_p) \cdot (\bar{v}_p) dx \\ &+ \frac{1}{2} m_i (\bar{v}_p|_{(x=l)})^2 \\ &+ \frac{1}{2} I_t \left( \omega + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

$$V_p = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ EI \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + EA_b \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx \quad (13)$$

여기서  $E$ 는 영의 계수,  $I$ 는 2차 면적모멘트, 그리고  $A_b$ 는 외팔 파이프의 단면적을 각각 나타내며,  $I_t$ 는 끝단질량의 회전관성모멘트를 표현하고 있다.

2.2 유동 유체의 에너지식

파이프에 대한 유체의 상대속도를  $v_f$ 라고 하면, 유체의 절대속도에는 파이프의 운동이 포함되어야 한다. 따라서 이송유체의 절대속도의 수직성분, 즉 외팔 파이프의 횡방향 성분은  $(r\omega + \dot{u}_2 + \omega x + \omega s) + v_f y'$ 이고, 축방향에 평행한 수평성분은  $v_f(1 - u_1) + \dot{c}$ 이다. 여기서  $\dot{c}$ 는 외팔 파이프의 끝단 축방향 변위의 속도이다. 유속의 합을 구하면

$$\begin{aligned} f_v &= \left[ \left\{ (r\omega + \dot{u}_2 + \omega x + \omega s) + v_f y' \right\}^2 \right. \\ &\left. + \left\{ v_f(1 - u_1) + (\dot{u}_1 - u_2 \omega) \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (14)$$

이 된다. 여기서 미소항의 3차 이상의 고차항은 생략될 것이며,  $(\cdot)$ 은 축방향 좌표  $x$ 에 대한 미

분을 의미한다. 따라서 유동유체의 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$T_f = \frac{1}{2} \int_0^l m_f (f_v \cdot f_v) dx \quad (15)$$

여기서  $m_f$ 는 유동유체의 단위 길이당 질량이다.

### 2.3 유체유동의 분사력에 의한 일량

점성이 매우 작은 이송유체의 분사력에 의하여 파이프에 작용되는 힘은  $x = l$ 인 점에 작용하는 집중 접선 중동력이 된다. 이러한 접선 중동력에 의한 일은 그 보존력성분에 의한 일과 비보존력 성분에 의한 일로 구분된다. 먼저, 집중 접선 중동력의 보존력 성분에 의한 일은

$$W_c = \int_0^l \rho A v_f^2 (u_1')^2 dx \quad (16)$$

이고, 집중 접선 중동력의 비보존력 성분에 의한 일은 유체 분사력과 코리올리력의 조합으로서 다음과 같이 표현되어 질 수 있다.

$$W_n = -[\rho A v_f^2 u_2'(l, t) + \rho A v_f \dot{u}_2(l, t)] u_2(l, t) \quad (17)$$

여기서  $A$ 는 유체가 통과하는 파이프 내부의 단면적을 나타내며,  $\rho$ 는 이송유체의 밀도이다. 코리올리력은 유체를 갖는 외팔파이프에서 항상 감쇠역할로서 작용을 한다.

### 2.5 계의 운동방정식

계의 운동방정식을 유도하기 위하여 앞에서 구한 일과 에너지 식을 다음의 Lagrange 방정식에 대입하여 정리한다.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (18)$$

여기서  $L$ 은 Lagrangian으로서 다음과 같다.

$$L = (T_p + T_f) - (V_p) + W_c + W_n \quad (19)$$

이상의 결과를 종합하면 다음 식과 같이 행렬

방정식 형태의 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$M \ddot{\Phi} + C \dot{\Phi} + K \Phi = P \quad (20)$$

여기서  $\Phi = [q_{1i}(x) \ q_{2i}(x)]^T$ 이다.

## 3. 수치해석 결과 및 고찰

앞 절에서 유도된 운동방정식을 가지고 유체유동 외팔 파이프 끝단의 축방향 변형과 굽힘변위를 끝단질량의 영향을 고려하여 해석을 수행하였다. 식 (12)에서는 회전 관성항을 표기하였으나, 수치해석에서는 이를 고려하지 않았다.

먼저, 각 링크의 회전각속도는 회전운동을 일반화하기 위하여 다음과 같은 형태의 함수(spin up motion)를 사용하였다.

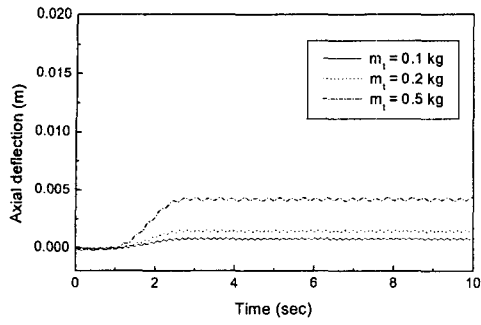
$$\omega_i = \begin{cases} \Omega_s \left[ \frac{t}{T_s} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right) \right] & 0 \leq t \leq T_s \\ \Omega_s & t \geq T_s \end{cases} \quad (21)$$

여기서  $T_s$ 는 Spin-up 운동이 정상상태에 도달하기까지 소요되는 시간이며  $\Omega_s$ 는 그 때의 회전각속도, 그리고  $t$ 는 시간이다. 본 해석 예제에서는  $T_s$ 를 3초로 하였다. Table 1은 해석 예제에 사용된 매개 변수 값을 나타낸다.

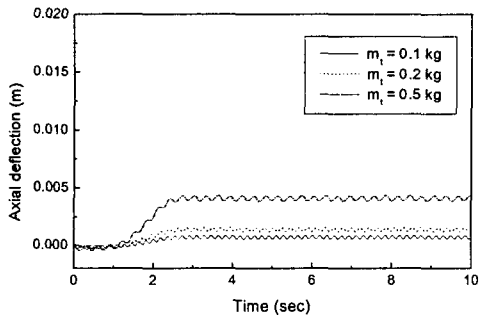
Fig. 2의 (a), (b) 그리고, (c)는 외팔 파이프의 회전각속도가 1 rad/s로 일정하게 회전할 때 이송유체의 속도를 각각 1 m/s, 2 m/s, 그리고 3 m/s로 달리한 경우 끝단질량의 변화에 따른 외팔 파이프의 끝단 축방향 변형을 표현한 것이다.

**Table 1** Specifications of a rotating cantilever pipe conveying fluid system

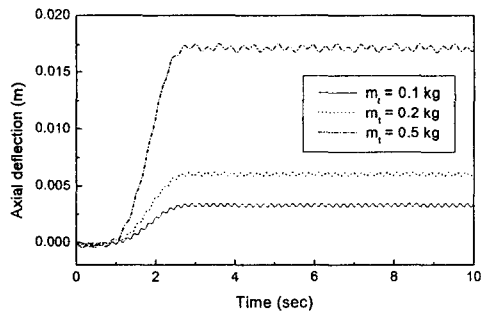
Mass per unit length (pipe) : $m_p$	kg/m	0.20
Mass per unit length (fluid) : $m_f$	kg/m	0.035
Length of pipe : $l$	m	1.00
Bending stiffness : $EI$	Nm <sup>2</sup>	0.21
Outer diameter of pipe	mm	25.00
Inner diameter of pipe	mm	12.00



(a)  $v_f = 1 \text{ m/s}$ ,  $\Omega_s = 1 \text{ rad/s}$



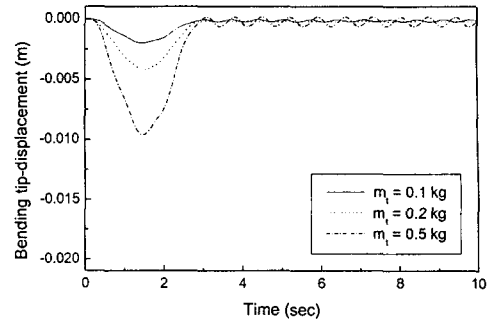
(b)  $v_f = 2 \text{ m/s}$ ,  $\Omega_s = 1 \text{ rad/s}$



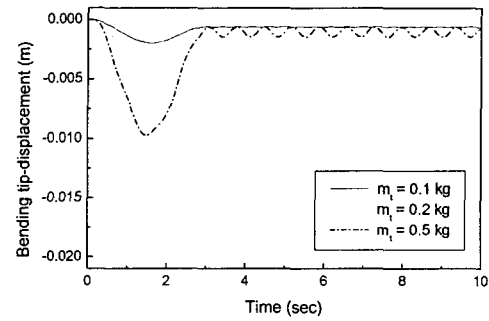
(c)  $v_f = 3 \text{ m/s}$ ,  $\Omega_s = 1 \text{ rad/s}$

Fig. 2 Axial tip-deflection of a cantilever pipe according to variation of the tip mass

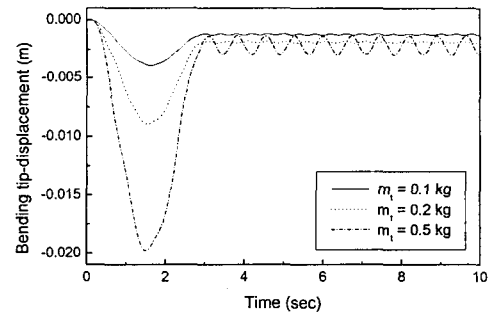
Fig. 2 (a)와 (b)를 살펴보면 전반적으로 끝단질량의 증가는 외팔 파이프 끝단 변형에 큰 영향을 주지 않으며, 정상상태에서의 진폭은 아주 미소량 증가시킴을 알 수 있다. 끝단질량이 0.5 kg인 경우 이송유체의 속도 변화에 따른 파이프의 끝단 거동을 살펴보면, 유속이 1 m/s와 2 m/s 일 때는 축방향의 끝단 변형량은  $5 \times 10^{-3}$  m로 거의 변화가 없고, 2 m/s일 때 진폭만 2배정도 크다. 그렇지만 2 m/s와 3 m/s를 비교하면 3 m/s 일 때는



(a)  $v_f = 1 \text{ m/s}$ ,  $\Omega_s = 1 \text{ rad/s}$



(b)  $v_f = 2 \text{ m/s}$ ,  $\Omega_s = 1 \text{ rad/s}$

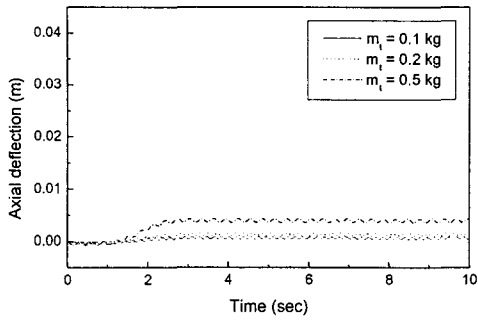


(c)  $v_f = 3 \text{ m/s}$ ,  $\Omega_s = 1 \text{ rad/s}$

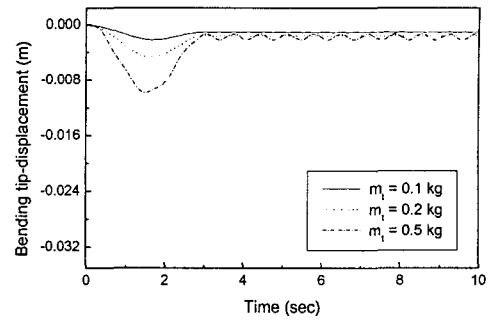
Fig. 3 Bending tip-displacement of a cantilever pipe according to variation of the tip mass

변형량이 약  $17 \times 10^{-3}$  m로 약 3배정도 변형이 커짐을 알 수 있다.

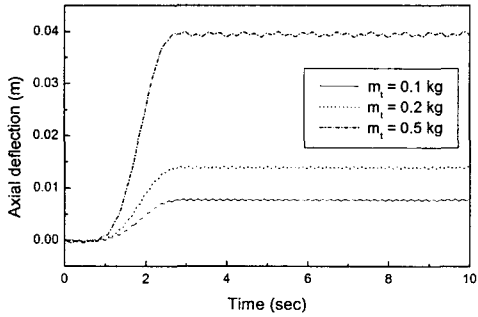
Fig. 3은 외팔 파이프의 회전각속도가 1 rad/s로 일정하게 회전할 때 이송유체의 속도를 각각 1 m/s, 2 m/s 그리고 3 m/s로 달리한 경우 끝단질량의 변화에 따른 외팔 파이프 끝단의 횡방향 변위를 나타낸 것이다. 정상상태에 도달하기 전의 변위는 고정축이 서서히 회전운동을 하기 시작하는 단계로 Spin-up 운동의 영향에 의한 것으로서, 유



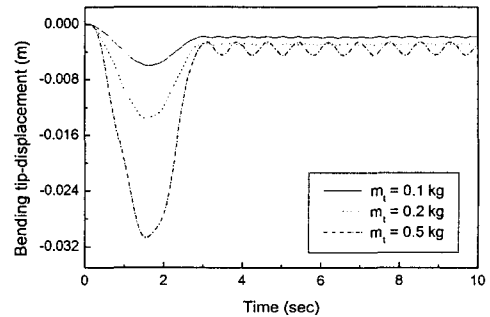
(a)  $v_f = 2 \text{ m/s}$  ,  $\Omega_s = 2 \text{ rad/s}$



(a)  $v_f = 2 \text{ m/s}$  ,  $\Omega_s = 2 \text{ rad/s}$



(b)  $v_f = 2 \text{ m/s}$  ,  $\Omega_s = 3 \text{ rad/s}$



(b)  $v_f = 2 \text{ m/s}$  ,  $\Omega_s = 3 \text{ rad/s}$

Fig. 4 Axial tip-deflection of a cantilever pipe according to variation of the tip mass

Fig. 5 Bending tip-displacement of cantilever pipe according to variation of the tip mass

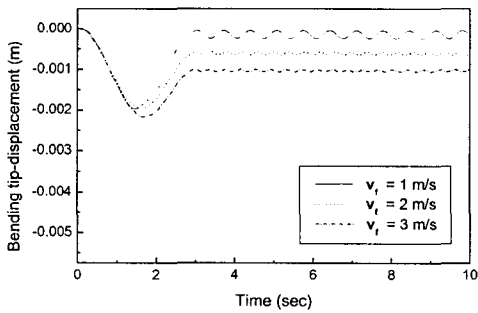


Fig. 6 Bending tip-displacement of a cantilever pipe according to variation of the fluid velocity

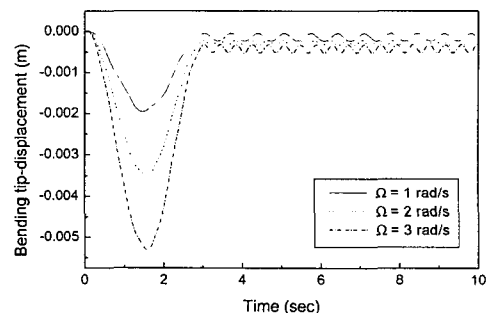


Fig. 7 Bending tip-displacement of a cantilever pipe according to the rotating angular velocity

체의 속도와 끝단의 횡방향 변위는 서로 비례적이다. 또, Fig. 3(b)를 살펴보면 끝단질량의 크기가 0.1 kg일 때에 비하여 0.2 kg 인 경우 최대 진폭의 크기는 약 57.3%, 그리고 0.5 kg 일 때와 비교해서는 약 80.1% 정도 더 증가하였음을 알 수 있다. 정상상태에서도 이송유체의 속도가 빠를수록, 끝단질량의 크기가 클수록 횡방향 변형량은 커지고, 진폭도 증가하는 경향을 보인다.

Fig. 4와 Fig. 5는 이송유체의 속도를 2 m/s로 일정하게 했을 때 외팔 파이프의 회전각속도를 증가시키면서 끝단질량의 변화에 따른 외팔 파이프의 끝단 축방향 변형량과 횡방향 변위를 표현한 것이다. Fig. 2(b)와 Fig. 2(b)의 회전각속도가 1 rad/s인 경우를 참조하여 2 rad/s, 3 rad/s 일 때 각 방향 변위를 살펴보면 축방향 변형량은 전반적으로 회전각속도와 끝단질량의 크기에 비례한

다. 끝단질량이 0.2 kg인 경우 회전각속도가 2 rad/s일 때 축방향 변형량은 약  $2 \times 10^{-3}$  m 이고, 3 rad/s 때는 약  $12 \times 10^{-3}$  m로 6 배 정도 더 큰 변형을 가진다. 끝단의 횡방향에서는 정상상태의 변위와 진폭은 끝단질량의 크기와 회전각속도에 비례적이며, 끝단질량의 크기가 0.2 kg 인 경우 회전각속도가 2 rad/s일 때 횡방향 변형량은 약  $2 \times 10^{-3}$  m이고, 3 rad/s에서는 약  $3 \times 10^{-3}$  m으로 0.5 배 정도의 증가를 보인다. 따라서 회전각속도는 횡방향 변형에 비해 축방향의 변형량에 더 큰 영향을 주고있음을 판단할 수 있다.

Fig. 6은 끝단질량의 크기가 0.1 kg이고, 회전각속도가 1 rad/s일 때 이송유체의 속도 변화에 따른 외팔 파이프 끝단의 횡변위를 도시한 것이고, Fig. 7은 끝단질량의 크기가 0.1 kg 이고, 이송유체의 속도가 1 m/s인 경우 회전각속도 변화에 따른 외팔 파이프 끝단의 횡변위를 표현한 것이다. 이송유체의 속도변화는 회전운동이 정상상태에서의 횡방향 변형량에 그리고, 회전각속도의 변화는 비정상상태의 횡방향 변위에 각각 더 큰 영향을 미친다.

#### 4. 결 론

이 연구에서는 점성이 매우 작은 이송유체의 분사력에 의하여 회전 외팔 파이프의 끝단에 집중 중동력이 작용하는 계를 모델링하였다. 수치 해석을 통하여 외팔 파이프 끝단의 축방향 및 횡방향 변위에 미치는 끝단질량의 영향과 각 변위에 미치는 이송유체의 속도와 외팔 파이프의 회전각속도의 영향을 연구하였다.

정상상태에서 축방향과 횡방향의 외팔 파이프 끝단 변위와 진폭은 끝단질량에 비례적이며, 회전각속도는 횡방향 변형에 비해 축방향의 변형량에 더 큰 영향을 주고 있다. 또, 이송유체의 속도 변화는 정상상태에서의 횡방향 변형량에 더 큰 영향을 미치며, 회전각속도의 변화는 비정상상태의 횡방향 변위에 더 많은 영향을 미친다. 이러한 결과는 유체이송을 갖는 회전하는 외팔 보 형태의 기계적 시스템을 구성하는 설계변수들의 특성과 이들의 특징적 연성관계를 제시하였고, 이를 바탕으로 로봇의 매니플레이터, 그리고 우주항공 구조물 등의 다양한 기계적 장치의 변위를 제어하기 위한 연구에 응용될 수 있을 것이다.

#### 참고문헌

- (1) Ashley, H. and Haviland, G., 1950, "Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 17, pp. 229~232.
- (2) Benjamin, T.B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid(I. Theory)," *Proceedings of the Royal Society (London)*, Series A, Vol. 261, pp. 457~486.
- (3) Benjamin, T.B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid(II. Experiments)," *Proceedings of the Royal Society (London)*, Series A, Vol. 261, pp. 487~499.
- (4) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," *British A.R.C. Reports and Memoranda* No. 766.
- (5) Theodorsen, T., 1935, "Propeller Vibrations and the Effect of Centrifugal Force," *NACA TN* No. 516.
- (6) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *Journal of Applied Mechanics Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, 25, pp. 28~30.
- (7) Yoo, H., Ryan, R., Scott, R., 1995, Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," *Journal of Sound and Vibration*, 181(2), pp. 261~278.
- (8) Hamdan, M.N. and Al-Bedoor, B.O., 2001, "Non-Linear Free Vibrations of a Rotating Flexible Arm," *Journal of Sound and Vibration*, 242(5), pp. 839~853.
- (9) Fung, E.H.K. and Yau, D.T.W., 2001, "Vibration Frequencies of a Rotating Flexible Arm Carrying a Moving Mass," *Journal of Sound and Vibration*, 241(5), pp. 857~878.
- (10) Park, J. H. and Kim, J. H., 1999, "Dynamic Analysis of Rotating Curved Beam with a Tip Mass," *Journal of Sound and Vibration*, 228(5), pp. 1017~1034.
- (11) Panussis, D.A. and Dimarogonas, A.D., 2000, "Linear In-Plane And Out-of-Plane Lateral Vibrations of a Horizontally Rotating Fluid-Tube Cantilever," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 14, pp. 1~24.