

# 지진해일 전파 수치모의를 위한 ADCIRC 유한요소모형의 일차원 분산특성 분석

## Analysis of 1-D Dispersion Property of ADCIRC Finite Element Model for the Simulation of Tsunami Propagation

윤성범\* · 임채호\* · 윤기승\* · 최병호\*\*

Sung Bum Yoon\*, Chae Ho Lim\*, Ki Seung Yoon\*, and Byung Ho Choi\*\*

**요 旨** : 천수방정식에 기초한 ADCIRC 유한요소모형을 이용하여 지진해일 전파를 수치모의할 때 분산효과를 고려하기 위한 두 가지 일차원 분산보정기법을 개발하였다. 첫 번째 방법은 음해법으로, 각 시간단계의 공간미분항에 부여되는 가중치를 조정함으로써 분산보정을 수행한다. 두 번째는 양해법으로, 유한요소의 크기를 조정하여 분산을 고려한다. 새로운 기법을 이용하여 계산한 수치해와 파의 분산효과를 고려한 해석해의 비교를 통해 본 연구에서 제안한 분산보정기법의 타당성을 확인하였다.

**핵심용어** : ADCIRC, 유한요소모형, 지진해일, 분산보정기법

**Abstract** □ Two types of one-dimensional dispersion-correction scheme are developed to take into account the dispersion effects for the simulation of tsunami propagation using ADCIRC finite element model based on shallow-water equations. The first is an implicit scheme, and the dispersion-correction is accomplished by controlling the weighting factor assigned to each spatial derivative term of different time levels. The other scheme is explicit and the dispersion is considered by adjusting the element size. The validity of the dispersion-correction scheme proposed in this study is confirmed through the comparison of numerical solutions calculated using the new schemes with analytical ones considering dispersion effect of waves.

**Keywords** : ADCIRC, finite element model, tsunamis, dispersion-correction

### 1. 서 론

동해에서 발생하는 지진해일파는 조석에 비하여 파장이 매우 짧아 상대적으로 분산성이 강하므로 먼 거리를 전파해 오는 경우에는 파의 분산성을 고려하여 해석하여야 한다. 또한 지진해일파는 비정상 불규칙파이므로 Stokes 계열의 파방정식 보다는 Boussinesq 계열의 방정식이 적합하다. 초기단계의 Boussinesq 방정식은 분산성이 약한 장파의 경우에만 적용 가능한 식으로 개발되었으나, Madsen *et al.*(1991), Nwogu(1993)와 Chen and Liu(1995) 등에 의해 분산성이 상대적으로 강한 경우에도 적용할 수 있

도록 확장되었다. 그러므로 지진해일파 같이 장파와 단파가 동시에 존재하는 경우 확장형 Boussinesq 방정식이 지배방정식으로 가장 적합하다. 이러한 Boussinesq 계열 방정식의 수치모형을 이용하여 파의 전파과정을 수치모의할 경우 지배방정식 자체에 물리적 분산항이 존재하므로 수치적인 분산오차를 최소화해야 한다. 이를 위해서는 매우 작은 격자를 채용하여야 하므로 현재까지의 컴퓨터 능력으로는 이러한 실제적인 문제를 다루는 것이 거의 불가능한 실정이다.

이러한 현실적인 제약 조건으로 인해 지진해일 전파 수치모의는 파의 분산성을 무시한 천수방정식을 기본방정식

\*한양대학교 토목·환경공학과(Corresponding author: Chae Ho Lim, Department of Civil & Environmental Engineering, Hanyang University, 1271, Sa-dong, Ansan, Kyunggi 425-791, Korea. limch@ihanyang.ac.kr)

\*\*성균관대학교 토목·환경공학과 (Department of Civil & Environmental Engineering, Sungkyunkwan University)

으로 하는 조석류 수치모형을 이용하여 이루어져 왔다. Imamura *et al.*(1988)은 leap-frog 유한차분 기법에 대해 일정 수심에서 수치적인 분산오차가 실제적인 분산오차를 대신하기 위한 수심, 격자간격 및 계산시간간격 간의 관계식을 유도하였다. 이 방법은 Boussinesq 계열의 수치모형과 달리 분산효과를 따로 계산하지 않고, 다른 항들을 계산하는 도중 자연적으로 발생하는 수치분산오차를 이용하므로 계산시간이 크게 단축되는 장점이 있다. 그러나 유한차분 모형은 수심이 변하는 실제 지형에 대해서는 이러한 개념의 적용이 곤란하다. Yoon and Liu(1992)는 변화 수심에서도 이러한 개념을 적용할 수 있도록 천수방정식을 지배방정식으로 하고 질량집중 기법을 채택하여 계산시간을 대폭 단축시킨 양해법의 유한요소모형을 개발하고, 수치분산 오차의 특성을 파악하여 이를 이용하기 위한 조건식을 제시하였다. 그러나 일반적으로 천수방정식에 대한 유한요소모형은 leap-frog 유한차분모형에서와 같은 공간교호격자(staggered mesh)를 사용할 수 없으므로  $2\Delta x$  파가 발생할 가능성이 높다. 이는 유한요소모형의 큰 약점으로 지적되기도 한다. 그러므로 요소의 크기를 자유롭게 조절할 수 있는 유한요소 기법의 장점을 살리면서도  $2\Delta x$  파의 발생 가능성이 낮은 유한요소모형의 개발이 필요하다.

한편 조석류 수치모의를 위해 개발된 ADCIRC(ADvanced CIRCulation model for oceanic, coastal and estuarine waters) 유한요소모형(Luetlich *et al.*, 1992)은 천수방정식의 연속방정식과 운동방정식을 합성하여 수면변위에 대해 하나의 식으로 표현한 파동방정식(wave equation)을 지배방정식으로 사용하고 있다. 수치기법으로 원질량행렬(consistent mass matrix)이나 질량집중행렬(lumped mass matrix)을 선택적으로 사용할 수 있고, 공간미분항의 시간 단계에 대해서는 양해법(explicit scheme) 또는 음해법(implicit scheme)을 선택할 수 있다. 특히 ADCIRC 모형은 다른 유한요소모형과 달리 파동방정식을 기본방정식으로 채용함으로써 유한차분모형에서  $2\Delta x$  파의 발생을 억제하기 위해 교호격자(staggered grid)를 사용하는 것과 같은 효과를 얻을 수 있다. 또한 ADCIRC 유한요소모형은 많은 연구원들이 오랜 시간에 걸쳐 주 엔진과 전·후 처리 코드들을 개발하고, 현장 적용을 통해 그 타당성을 검증해왔으며, 최근에는 병렬처리 코드를 개발하여 실제적인 문제를 다룰 수 있는 현실성 있는 수치모형으로 자리잡아 가고 있다. 그러므로 ADCIRC 유한요소모형의 코드를 변경하지 않고서도 파의 분산효과를 고려할 수 있

는 방법을 개발할 수 있다면, 컴퓨터 계산능력이 획기적으로 개선되어 확장형 Boussinesq 방정식을 채용하는 신개념의 수치모형이 보편화될 때까지는 지진해일 전파 수치모의를 현실성 있고 경제적으로 수행하기 위한 한 가지 대안이 될 수 있을 것이다.

본 연구에서는 이러한 필요성을 인식하고 이차원 ADCIRC 유한요소모형의 수치기법에 따른 수치분산오차의 특성을 분석하기 위한 기초연구로 우선 일차원 모형에 대해 수치적인 분산오차가 실제 물리적인 분산효과를 대신해 주기 위한 수심과 요소크기 및 공간미분 가중치 사이의 관계식을 정립하고자 한다. 이를 위해 2장에서는 일차원 지배방정식을 제시하며, 3장에서는 선형보간함수를 이용한 유한요소식을 유도한다. 4장에서는 유도된 유한요소식에 대해 Taylor 급수전개를 통해 변형방정식을 유도하고, 수치분산오차의 특성을 파악한다. 5장에서는 수치분산오차를 이용하여 물리적인 분산효과를 대치하기 위한 방법들을 제안하고, 이를 실제 계산을 통해 그 타당성을 확인하며, 마지막 장에서는 이번 연구에서 얻어진 내용을 정리하고 결론을 맺는다.

## 2. 지배방정식

ADCIRC 유한요소모형은 천수방정식에서 연속방정식과 운동방정식을 합성하여 수면변위에 대한 하나의 식으로 유도된 이차원 비선형 파동방정식(Lynch and Gray, 1979; Kinnmark, 1985)을 지배방정식으로 사용하고 있지만, 분산항을 포함하고 있지 않아 지진해일의 물리적인 분산효과를 고려할 수 없다. 그러나 ADCIRC 유한요소모형에 사용된 수치기법에 따른 분산오차를 이용하면 지진해일의 분산효과를 쉽게 고려할 수 있을 것으로 판단된다. 본 연구에서는 이차원 모형의 분산보정기법 개발을 위한 기초연구로서 지진해일 파의 수면변위가 수심에 비해 매우 미소하고, 등수심상을 일방향으로 전파한다는 가정 하에 다음과 같은 1차원 선형 파동방정식을 대상으로 하였다.

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

여기서  $\zeta$ 는 정수면으로부터의 수면변위(m),  $g$ 는 중력가속도( $m/s^2$ ),  $h$ 는 정수면으로부터 바다까지의 수심(m)이며,  $C_0 = \sqrt{gh}$ 는 전파속도(m/s)를 의미한다.

### 3. 유한요소식의 유도

식 (1)을 Galerkin 가중잔차법을 이용하여 유한요소식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\int_a^b \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \phi^* dx - C_0^2 \int_a^b \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \phi^* dx = 0 \quad (2)$$

여기서  $\phi^* = [(1-x/l)\zeta_a^* + (x/l)\zeta_b^*]$ 는 가중함수(weighting function)로 본 연구에서는 선형함수를 사용하며, 보간함수(interpolation function)는 가중함수와 같은 형태를 사용한다. 또한 하첨자  $a, b(a < b)$ 는 요소 내 양 끝점을 의미하며, 요소의 크기  $\Delta x = b - a$ 이다. 식 (2)의 공간미분항을 부분적분의 원리를 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\int_a^b \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \phi^* dx + C_0^2 \int_a^b \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} dx + C_0^2 \left( \phi_a^* \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_a - \phi_b^* \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_b \right) = 0 \quad (3)$$

수면변위  $\zeta(x, t)$ 를 보간함수  $\phi_\alpha(x)$ 와 절점에서의 수면변위 값  $\zeta_\alpha(t)$ 를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\zeta = \phi_\alpha \zeta_\alpha \quad (\alpha = 1, 2) \quad (4)$$

여기서 첨자  $\alpha$  (또는  $\beta$ )는 요소 내 절점번호를 표시하며, 첨자의 반복은 Einstein의 index notation으로 첨자가 반복된 항들의 총합을 의미한다. 이를 식 (3)에 대입하여 적분을 수행하면 한 요소내에서 다음과 같은 식을 얻는다.

$$M_{\alpha\beta}^c \frac{\partial^2 \zeta_\beta}{\partial t^2} + C_0^2 K_{\alpha\beta} \zeta_\beta = 0 \quad (5)$$

여기서는 영역 내부에 위치하는 내부요소에 대한 식만을 다룰 예정이므로, 경계에서의 기울기 항은 무시되었다. 또한  $M_{\alpha\beta}^c$ 는 질량행렬,  $C_0^2 K_{\alpha\beta}$ 는 강성행렬로 다음과 같다.

$$M_{\alpha\beta}^c = \frac{\Delta x}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

이 질량행렬  $M_{\alpha\beta}^c$ 는 유한요소 정식화 절차를 거쳐 얻어진 원래의 질량행렬이므로 원질량행렬(consistent mass matrix)이라 한다. 한편 요소길이 전체에 걸쳐 분포되어 있는 질량을 요소의 양끝 절점(node)에 집중된 질량으로 나

타내면, 질량행렬은 다음과 같은 주 대각 행렬로 나타나는데 이를 질량집중행렬(lumped mass matrix)이라 하고  $M_{\alpha\beta}^l$ 로 표시한다.

$$M_{\alpha\beta}^l = \frac{\Delta x}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

이 질량집중행렬을 이용한 유한요소식은 다음과 같다.

$$M_{\alpha\beta}^l \frac{\partial^2 \zeta_\beta}{\partial t^2} + C_0^2 K_{\alpha\beta} \zeta_\beta = 0 \quad (9)$$

식 (5)를 조합(assemble)하면 영역 내부의 임의 절점  $i$ 에 대한 계산식을 얻을 수 있으며, 이 식의 시간미분항에 대해 중앙차분을 적용하고, 공간미분항의 시간단계를 3단계로 나누어 각 시간단계에 가중치(weighting factor)를 도입하여 정리하면 식 (10)과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left( \frac{\zeta_{i+1}^{n+1} - 2\zeta_{i+1}^n + \zeta_{i+1}^{n-1}}{\Delta t^2} \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{\zeta_i^{n+1} - 2\zeta_i^n + \zeta_i^{n-1}}{\Delta t^2} \right) \\ & + \frac{1}{6} \left( \frac{\zeta_{i-1}^{n+1} - 2\zeta_{i-1}^n + \zeta_{i-1}^{n-1}}{\Delta t^2} \right) - \frac{\alpha_1 C_0^2}{\Delta x^2} (\zeta_{i+1}^{n+1} - 2\zeta_i^{n+1} + \zeta_{i-1}^{n+1}) \\ & - \frac{\alpha_2 C_0^2}{\Delta x^2} (\zeta_{i+1}^n - 2\zeta_i^n + \zeta_{i-1}^n) - \frac{\alpha_3 C_0^2}{\Delta x^2} (\zeta_{i+1}^{n-1} - 2\zeta_i^{n-1} + \zeta_{i-1}^{n-1}) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $\Delta x$ 는 요소의 크기를 나타내며, 모든 요소의 크기가 동일하다고 가정하였다. 하첨자  $i$ 는 절점번호, 상첨자  $n$ 는 시간단계번호,  $\Delta t$ 는 계산시간간격,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 는 공간미분항의 각 시간단계별 가중치로서  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ 이다. 또한 질량집중행렬을 이용한 유한요소식 (9)를 조합하면 식 (11)과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta_i^{n+1} - 2\zeta_i^n + \zeta_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\alpha_1 C_0^2}{\Delta x^2} (\zeta_{i+1}^{n+1} - 2\zeta_i^{n+1} + \zeta_{i-1}^{n+1}) \\ & - \frac{\alpha_2 C_0^2}{\Delta x^2} (\zeta_{i+1}^n - 2\zeta_i^n + \zeta_{i-1}^n) - \frac{\alpha_3 C_0^2}{\Delta x^2} (\zeta_{i+1}^{n-1} - 2\zeta_i^{n-1} + \zeta_{i-1}^{n-1}) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

식 (10)과 식 (11)을 비교해 보면 질량집중행렬을 이용한 식 (11)의 경우가 유한차분기법과 일치하는 것을 볼 수 있다. 또한 식 (11)에서  $\alpha_1 = \alpha_3 = 0, \alpha_2 = 1$ 이면 순수양해법이 되어 행렬을 풀 필요가 없으므로 계산시간이 크게 단축되어 매우 경제적이다. 반면 원질량행렬을 이용하면 식 (10)에 보인 바와 같이  $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ 인 경우에도 매 시간간격

마다 행렬을 풀어야 하므로 실제적으로는 음해법에 속한다고 할 수 있다.

#### 4. ADCIRC 모형의 수치기법에 따른 분산특성

##### 4.1 변형방정식

1차원 선형 파동방정식의 유한요소식인 식 (10)과 식 (11)은 수치오차로 인하여 지배방정식 (1)에 대한 정확해를 주지 못하고 변형방정식(modified equation)에 대한 정확해를 주게 된다. 그러므로 변형방정식을 구해보면 수치해가 가지는 오차의 특성을 쉽게 파악할 수 있다.

원질량행렬  $M_{\alpha\beta}^c$ 를 사용한 경우의 변형방정식은 식 (10)을  $i$ 번째 절점과  $n$ 번째 시간단계의 변수와 미분치들을 이용하여 Taylor 전개한 다음 고차의 시간미분오차항을 장소미분항으로 대치하여 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_0^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - C_0^2 \Delta t(\alpha_1 - \alpha_3) \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \\ & - \frac{C_0^2}{12} \Delta t^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cdot \\ & [-1 + 6Cr^2(\alpha_1 + \alpha_3) - Cr^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)] \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} \\ & = O(\Delta x^3, \Delta t \Delta x^2, \Delta t^2 \Delta x, \Delta x^3) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $Cr = (C_0 \Delta t / \Delta x)$ 은 Courant number이다. 3번째 항과 같이 시간 또는 장소에 대한 홀수 차수의 미분항은 수치적인 진폭오차(amplitude error)를 주며, 4번째 항과 같이 짝수 차수의 미분항은 수치적인 전파속도오차 즉 분산오차(dispersion error)를 준다. 지배방정식 (1)과 변형방정식 (12)의 비교를 통해 수치오차를 최소화하기 위한 시간단계에 대한 가중치를 정할 수 있다. 우선 식 (12)의 2번째 항은 지배방정식의 공간미분항과 동일해야 하므로 다음과 같이 정한다.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad (13)$$

또한 식 (12)의 3번째 항과 같은 수치적인 진폭오차는 지배방정식에 없는 항이며 안정성을 해치므로 다음과 같이 가중치를 정하여 이 항을 제거한다.

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha, \quad \alpha_2 = 1 - 2\alpha \quad (14)$$

그러나 수치적인 분산오차항은 그대로 남게 되어 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{C_0^2}{12} \Delta x^2 [-1 + Cr^2(12\alpha - 1)] \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^4} \\ & = O(\Delta x^3, \Delta t \Delta x^2, \Delta t^2 \Delta x, \Delta x^3) \end{aligned} \quad (15)$$

질량집중행렬  $M_{\alpha\beta}^l$ 를 사용한 경우에 대해서도 원질량행렬을 사용한 경우와 동일한 과정을 통하여 식 (16)과 같은 변형방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{C_0^2}{12} \Delta x^2 [1 + Cr^2(12\alpha - 1)] \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} \\ & = O(\Delta x^3, \Delta t \Delta x^2, \Delta t^2 \Delta x, \Delta x^3) \end{aligned} \quad (16)$$

##### 4.2 수치기법에 따른 분산특성

1차원 파동방정식의 수치기법에 따른 분산특성을 검토하기 위하여 미지수를 다음과 같은 시간과 공간에 대하여 주기성을 가지는 일방향 진행파로 표현한다.

$$\zeta(x, t) = A_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (17)$$

여기서  $A_0$ 는 진폭,  $k$ 는 파수(wave number),  $\omega$ 는 각주파수(angular frequency)이다. 원질량행렬을 사용한 경우와 질량집중행렬을 사용한 경우에 따른 수치적인 분산특성을 검토하기 위하여 식 (15)와 식 (16)에 식 (17)을 각각 대입하여 정리하면 다음과 같은 분산관계식을 얻을 수 있다.

$$\left(\frac{C_n^c}{C_0}\right)^2 = 1 - \frac{(k\Delta x)^2}{12} \{-1 + Cr^2(12\alpha - 1)\} + O((k\Delta x)^4) \quad (18)$$

$$\left(\frac{C_n^l}{C_0}\right)^2 = 1 - \frac{(k\Delta x)^2}{12} \{1 + Cr^2(12\alpha - 1)\} + O((k\Delta x)^4) \quad (19)$$

여기서  $C_n^c$ 와  $C_n^l$ 은 각각 원질량행렬과 질량집중행렬을 이용한 경우의 수치적인 전파속도를,  $C_0$ 는 물리적인 전파속도를 의미한다. 식(18)은 원질량행렬을 사용한 경우의 분산관계식으로  $k\Delta x$ 가 클수록(즉 파장이 짧을수록) 식의 우변이 1보다 커지게 되어 수치적인 전파속도  $C_n^c$ 가 물리적인 전파속도  $C_0$ 보다 커지는 역분산(negative dispersion)이 발생하게 되고, 질량집중행렬을 사용한 경우에는 식(19)에 제시한 바와 같이  $k\Delta x$ 가 클수록 우변이 1보다 작아지게 되어, 수치적인 전파속도  $C_n^l$ 이 물리적인 전파속도보다 작아지는 일반적인 분산(positive dispersion)이 발생한다. 또한  $\alpha$ 는 그 값이 증가함에 따라 단파가 더욱 천천히 전파되는 일반적인 분산효과를 증진시켜준다.

이러한 수치기법에 따른 분산오차의 특성을 확인하기 위하여 초기 수면이 Gauss 분포를 갖는 1방향 진행파를 대상으로 식 (10)과 식 (11)을 이용하여 두 가지 서로 다른 질량행렬  $M_{\alpha\beta}^c$  와  $M_{\alpha\beta}^l$  에 대한 수치해를 구하였다. 초기 수면변위로 주어진 Gauss 분포는 다음과 같다.

$$\zeta(x,0)=2e^{-(x/a)^2} \tag{20}$$

여기서 Gauss 분포의 상대적인 폭을 나타내는  $a$ 는 7.5 km로 주었다. 계산에 사용된 수심( $h=1000m$ )과 요소크기( $\Delta x=1500m$ ), 시간간격( $\Delta t=6$  sec)은 고정하고, 서로 다른  $\alpha$ 값에 대해 초기로부터 5400s 후의 수면형상을 구해 Fig. 1에 나타내었다. 여기서 정확한 해는 지배방정식이 분산을 포함하지 않는 천수 파동방정식이므로 주어진 초기조건이 높이만 1/2이 되고 전체적인 Gauss 형상은 그대로 유지된 채로 중심이 전파속도로 이동되어 다음과 같다.

$$\zeta(x,t)=e^{-(x-\sqrt{gh}t/a)^2} \tag{21}$$

Fig. 1(a)는 원질량행렬을 사용하고 공간미분항에 대한 가중치  $\alpha$ 를 0.0, 0.2, 0.4인 경우로 구분하여 수치모의를 수행한 결과이다. 이 경우 단파가 장파보다 빨리 전파하는 역분산(negative dispersion)이 발생하고 있다. 또한  $\alpha$ 가 증가함에 따라 분산오차가 감소하는 경향을 나타낸다. Fig. 1(b)는 질량집중행렬을 사용하면서, 공간미분항에 대하여 서로 다른 가중치  $\alpha$ 를 적용하여 수치모의한 결과를 제시한 것이다. 질량집중행렬을 사용한 경우에는 단파가

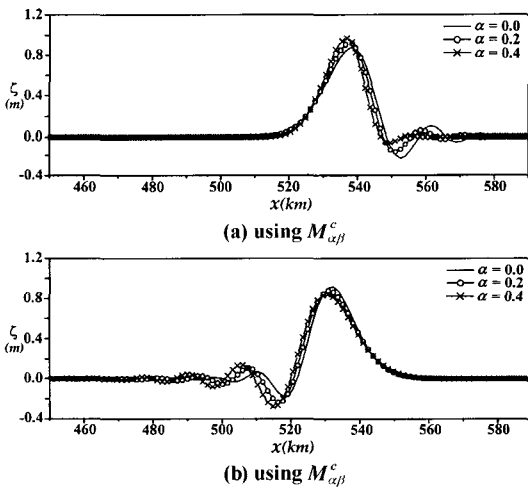


Fig. 1. Free surface profiles at  $t=5400s$  calculated using various  $\alpha$ -values: (a) consistent mass matrix  $M_{\alpha\beta}^c$ , (b) lumped mass matrix  $M_{\alpha\beta}^l$ .

장파보다 천천히 진행되는 일반적인 분산오차의 특성을 나타낸다. 또한 가중치  $\alpha$ 가 증가함에 따라 분산효과가 증가하게 된다. 다시 말해 단파가 천천히 진행하게 되는 수치적인 분산오차가 더 크게 발생하게 된다. 그러므로 가중치  $\alpha$ 는 어느 경우에도나 분산을 증가시키는 경향을 가지고 있으며, 이를 적절히 이용하면 원하는 분산효과를 얻을 수 있을 것이다.

### 5. 지진해일 수치모의를 위한 분산보정

#### 5.1 분산보정을 위한 가중치 $\alpha$ 조정기법

물리적인 분산항을 포함하고 있는 1차원 선형 Boussinesq 방정식은 수심이 상대적으로 작고 일정한 때 연속방정식과 운동방정식을 합성하여 다음과 같이 파동방정식으로 나타낼 수 있다. 여기서 오차항의  $k$ 는 파수(wave number)를 표시한다.

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{gh^3}{3} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = O(k^6 h^6) \tag{22}$$

물리적인 분산항을 포함하고 있지 않은 ADCIRC 모형을 이용하여 분산성이 상대적으로 강한 지진해일의 전파를 수치모의하기 위해서는 수치적인 분산오차를 주는 식 (15) 또는 식 (16)의 3번째 항이 물리적인 분산효과를 고려할 수 있는 선형 Boussinesq 방정식 (22)의 3번째 항과 같아지도록 공간미분항의 시간단계에 대한 가중치  $\alpha$ 를 구하여 사용할 수 있다. 이러한  $\alpha$  값은 원질량행렬을 사용한 경우에는 식 (23)과 같이, 질량집중행렬을 사용한 경우에는 식 (24)와 같이 각각 유도된다.

$$\alpha = \frac{1}{12} \left[ 1 + \left( \frac{4h}{g\Delta t^2} + \frac{1}{Cr^2} \right) \right] \tag{23}$$

$$\alpha = \frac{1}{12} \left[ 1 + \left( \frac{4h}{g\Delta t^2} - \frac{1}{Cr^2} \right) \right] \tag{24}$$

분산보정을 위한 가중치  $\alpha$  조정기법의 타당성을 검토하기 위해 초기의 Gauss 분포 수면형상이 수심이 일정한 지형 위를 전파하는 경우에 대하여 선형 Boussinesq 방정식의 1방향 진행파 공식인 KdV 방정식의 해석해와 가중치  $\alpha$  조정기법에 의한 식 (10)과 식 (11)의 수치해를 비교한다. 양의  $x$ 방향으로 진행하고 있는 Gauss 분포의 초기파형이 Fig. 2와 같이  $N$ 개의 델타함수로 구성되어 있다고 가정하면, 선형 미분방정식의 경우에는 해의 중첩원리가 성립하므로 각각의 델타함수에 대한 해석해(Yeh,

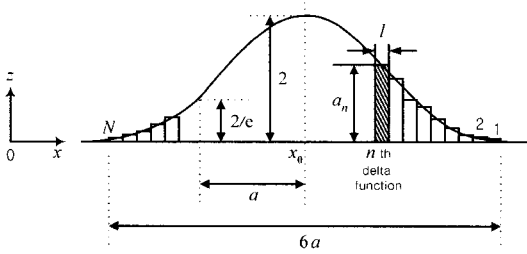


Fig. 2. Initial free surface profile of Gaussian hump.

1991)를 모두 더하여 다음과 같은 해를 얻을 수 있다 (Yoon and Liu, 1992).

$$\zeta(x,t) = \sum_{n=1}^N a_n l S^{1/3} A_i((X_n - \sqrt{ght})S^{1/3}) \quad (25)$$

여기서

$$S = \frac{2}{\sqrt{ghh^2t}} \quad (26)$$

이고,  $A_i$ 는 Airy 함수,  $a_n$ 은  $n$ 번째 델타함수의 높이,  $l$ 은 델타함수의 폭, 그리고  $X_n$ 은 Fig. 3에 제시한 바와 같이 델타함수의 중심으로부터 좌표가  $x$ 인 점까지의 거리로서 다음과 같이 주어진다.

$$X_n = \left(n - \frac{N+1}{2}\right)l + x - x_0 \quad (27)$$

여기서  $n$ 은 파형 선단으로부터  $n$ 번째 델타함수의 번호를 나타내며,  $x_0$ 는 좌표원점으로부터 파형 중심까지의 거리이다.

Gauss 분포의 초기파형은 다음 식으로 주어진다.

$$\zeta(x,t=0) = \begin{cases} 2e^{-(x-x_0)/a)^2} & \text{if } -3a \leq x-x_0 \leq 3a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (28)$$

또한 수치계산에 이용된 각종 상수 및 변수값은 다음

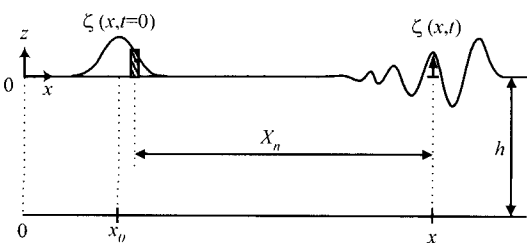


Fig. 3. Schematic sketch to calculate analytical solution.

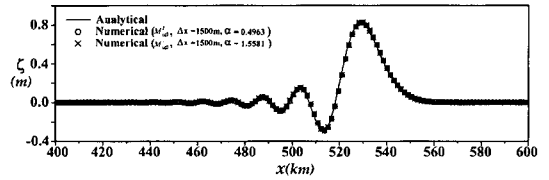


Fig. 4. Comparison of free surface profiles at  $t=5400s$  calculated using different mass matrix and associated  $\alpha$ -value for  $\Delta x=1500m$ .

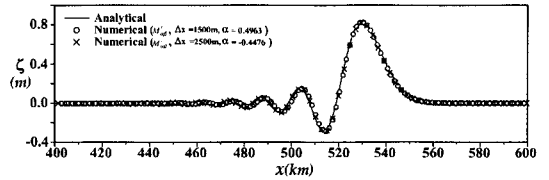


Fig. 5. Comparison of free surface profiles at  $t=5400s$  calculated using lumped mass matrix for different  $\Delta x$  and associated  $\alpha$ -value.

과 같다.

$$g=9.81 \text{ m/s}^2, h=1000m, a=7500m, x_0=0, \\ N=300, l=6a/N=150m \quad (29)$$

여기서  $a$ 는 높이가 2인 Gauss 분포의 중심으로부터  $\zeta=2e^{-1}$ 인 곳까지의 거리이며, Gauss 분포의 상대적인 폭을 나타낸다. Gauss 분포는 중심부에서 최대값  $\zeta=2$ 을 가지며, 중심부에서 멀어질수록 그 값이 감소하여 중심으로부터의 거리가  $3a$ 가 되면 최대값의 0.01%로 감소하므로, 본 연구에서는 초기의 수면변위가 중심으로부터의 거리가  $3a$ 보다 작은 구간에만 존재하는 것으로 보았다. 또한 시간간격  $\Delta t$ 는 6s, 요소크기  $\Delta x$ 는 1500m를 수치해석에 사용하였다.

주어진 수심, 요소크기 그리고 시간간격에 대해 식 (23) 또는 식 (24)로부터 가중치  $\alpha$ 를 구한 결과, 원질량행렬 사용시 1.5581이었으며, 질량집중행렬 사용시 0.4963이었다. 이들  $\alpha$ 값들을 각각 식 (10)과 식 (11)에 대입하여 수치모의하고, 그 결과를 KdV 방정식의 해석해와 비교하였다. 그 결과 Fig. 4에 보인 바와 같이 서로 다른 방법에 의해 계산된 두 가지 수치해의 분산정도가 모두 해석해와 잘 일치하고 있다.

Fig. 5는 질량집중행렬을 사용하면서, 주어진 수심 ( $h=1000m$ )과 시간간격( $\Delta t=6s$ )에 대해 서로 다른 요소크기( $\Delta x=1500m$  or  $\Delta x=2500m$ )를 사용하여 수치모의하고, 수치해를 해석해와 비교한 것으로  $\Delta x$ 가 1500m인 경우에

는 식 (24)에 의해  $\alpha$ 를 0.4963으로 놓고,  $\Delta x$ 가 2500m인 경우에는  $\alpha$ 를 -0.4476으로 놓고 계산하였다. Fig. 5에서 보인 바와 같이 서로 다른  $\Delta x$ 에 대해서도 수치분산오차를 이용한 수치해와 물리적 분산을 고려한 해석해가 잘 일치하고 있다. 이것은 일차원 ADCIRC 유한요소모형의  $\alpha$ 값을 주어진 시간간격  $\Delta t$ , 요소크기  $\Delta x$ , 그리고 수심  $h$ 에 따라 조정하면 임의 크기로 구성된 유한요소망을 그대로 이용하면서도 물리적인 분산효과를 고려할 수 있는 가능성이 있음을 의미한다. 이는 유한요소망 생성에 있어서 어느 정도의 유연성이 부여됨을 의미한다. 그러나 현재 ADCIRC 모형은 일정한  $\alpha$ 만을 사용하도록 제한되어 있다. 그러므로  $\alpha$ 값 조정을 통한 분산보정을 달성하기 위해서는 이차원 분산특성의 파악과 함께 이에 따른 코드의 수정이 불가피하다.

5.2 분산보정을 위한 요소크기 조정기법

수심, 계산시간간격 및 요소크기가 정해졌을 때  $\alpha$  값을 조정하여 분산을 고려하는 방법은 전술한 바와 같이 코드 자체를 수정해야 한다. 그러나 ADCIRC 모형의 수정이 쉽지 않으므로  $\alpha$  값을 고정시키고 요소의 크기를 조정하여 분산을 고려하는 방법을 찾아본다. 동해에서의 지진해일 전파 수치모의와 같이 실질적인 계산을 수행하기 위해서는 동해 해역 전체를 계산영역에 포함시켜야 하며, 막대한 컴퓨터 기억용량과 계산시간을 필요로 하므로 일반적인 컴퓨터 환경에서는 접근 자체가 불가능하다. 이 경우 계산부담을 최소화하기 위해  $\alpha$ 를 0으로 놓고 질량집중행렬을 사용하는 순수 양해법(pure explicit scheme)을 채택하는 것이 유일한 해결책이라 할 수 있다. 이 방법은 행렬을 풀 필요가 없어 기억용량과 계산시간을 대폭 줄일 수 있을 뿐만 아니라 병렬처리가 쉬운 장점도 있어 병렬처리 기능을 장착한 최근의 ADCIRC 모형에 포함되어 있다. 순수 양해법을 위한 유한요소식은 식 (11)에서  $\alpha=0$ (즉,  $\alpha_1=\alpha_3=\alpha=0, \alpha_2=1$ )으로 놓으면 다음과 같이 간단한 수치계산식을 얻는다.

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - 2\zeta_i^n + \zeta_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{C_0^2}{\Delta x^2} (\zeta_{i+1}^n - 2\zeta_i^n + \zeta_{i-1}^n) = 0 \tag{30}$$

순수 양해법 사용시 분산보정을 위한 요소크기  $\Delta x$ 는 식 (24)에서 가중치  $\alpha$ 를 0으로 놓고  $\Delta x$ 에 대해 정리하여 얻을 수 있다.

$$\Delta x = \sqrt{4h^2 + gh\Delta t^2} \tag{31}$$

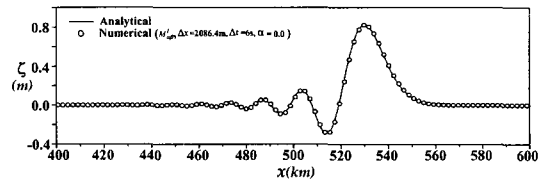


Fig. 6. Comparison of free surface profiles at  $t=5400s$  calculated using pure explicit scheme with  $\Delta x$  determined by Eq. (31).

식 (31)은 Imamura *et al.*(1988)이 leap-frog 유한차분 모형에 대해 제시한 분산보정 조건식과 같다.

Fig. 6은 주어진 수심( $h=1000m$ )과 시간간격( $\Delta t=6s$ )에 대해 요소크기  $\Delta x$ 를 식 (31)에 의해 구한 다음, 식 (30)을 이용하여 구한 수치해와 물리적인 분산효과를 포함하는 해석해를 비교한 것으로, 분산효과가 옹게 고려되고 있음을 보여주고 있다.

6. 결 론

조석을 수치모의하기 위해 개발된 ADCIRC 유한요소 모형의 수치기법에 따른 분산오차의 특성을 파악하기 위해 ADCIRC 모형을 일정수심의 일차원 선형(linear) 유한요소모형으로 간략화하였다. 간략화된 일차원 모형을 이용하여 초기에 Gauss분포 형상으로 주어진 수면변위가 일정한 수심상을 전파하는 경우에 대해 수치모의하여 사용된 질량행렬과 공간미분항의 가중치 선정에 따라 수치분산이 서로 다른 특성을 가짐을 확인하였다. 일반적으로 원 질량행렬은 짧은 파가 빨리 진행하는 역분산오차를 주며, 질량집중행렬은 반대로 짧은 파가 천천히 진행하는 정분산오차를 준다. 공간미분항의 가중치  $\alpha$ 는 그 크기가 증가할수록 정분산오차를 증가시키는 것으로 나타났다. 본 연구에서는 이러한 분산오차의 특성을 이용하여 지진해일 전파시 발생하는 물리적인 분산효과를 복잡한 Boussinesq 방정식 대신 해석이 상대적으로 간편한 천수방정식 모형을 이용하여 고려하기 위한 시도가 이루어진 바, 천수방정식 모형에 사용된 수치기법에 따라 발생하는 수치적인 분산이 물리적인 분산을 대신하도록 음해법에 대해서는 가중치  $\alpha$ 값을 조절하는 기법을, 순수 양해법에 대해서는 요소크기  $\Delta x$ 를 조절하는 기법을 제안하였다. 본 연구에서 제안된 기법의 타당성을 확인하기 위해 초기에 Gauss분포 형상으로 주어진 수면변위가 일정한 수심상을 전파하는 경우에 대해 본 연구의 분산보정 기법을 이용하여 수치계

산하고, 그 결과를 파의 분산효과를 고려한 해석해와 비교하였는 바, 본 연구에서 제안한 분산보정기법은 지배방정식에 분산효과가 포함되어 있지 않음에도 불구하고 실제 지진해일파가 가지는 물리적인 분산효과를 고려할 수 있음을 알 수 있었다. 두가지 제안된 방법 중 가중치  $\alpha$  를 이용하여 분산오차의 정도를 조절하는 방법은 질량집중행렬을 사용하는 경우라도 음해법을 피할 수 없게 되므로 많은 계산시간을 요구하는 단점이 있다. 요소크기  $\Delta x$  를 조절하는 순수 양해법은 컴퓨터 기억용량과 계산시간을 대폭 줄일 수 있을 뿐만 아니라 병렬처리가 쉬운 장점이 있는 반면, 수심이 일정하지 않은 실제 해역에서 요소크기에 대한 주어진 조건을 만족시키는 유한요소망을 생성하기 위해 많은 노력을 필요로 할 것으로 예상된다. 그러므로 궁극적으로는 임의 크기로 구성된 유한요소망을 사용하면서도 순수 양해법을 사용하여 물리적인 분산효과를 적절히 고려할 수 있는 병렬처리용 유한요소모형을 개발하기 위한 적극적인 연구가 필요하다.

## 감사의 글

본 연구는 기상청 기상연구소의 특정사업 ‘지진해일 및 지진해일 예측기술 개발’의 지원으로 수행되었습니다.

## 참고문헌

- Chen, Y. and Liu, P.L.-F., 1995. Modified Boussinesq equations and associated parabolic models for water wave propagation, *J. Fluid Mech.*, **288**, pp. 351-381.
- Imamura, F., Shuto, N. and Goto, C., 1988. Numerical simulation of the transoceanic propagation of tsunamis, *Proc. of 6th Congress Asian and Pacific Regional Division, IAHR, Japan*, pp. 265-271.
- Kinnmark, I.P.E., 1985. The shallow water wave equations: formulation, analysis and application, *Lecture Notes in Engineering*, **15**, 187p.
- Luetlich, R.A., Westerink, J.J. and Scheffner, N.W., 1992. ADCIRC: An advanced three-dimensional circulation model for shelves, coasts, and estuaries, report 1: theory and methodology of ADCIRC-2DDI and ADCIRC-3DL, *Dredging Research Program Technical Report DRP-92-6, U.S. Army Engineers, Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS*, 137p.
- Lynch, D.R. and Gray, W.G., 1979. A wave equation model for finite element tidal computations, *Computers and Fluids*, **7**, pp. 207-228.
- Madsen, P.A., Murray, R. and Sorensen, O.R., 1991. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, *Coastal Engineering*, **15**, pp. 371-388.
- Nwogu, O., 1993. Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, *J. Waterway, Port, Coast. and Ocean. Engineering*, **119**(6), pp. 618-638.
- Yeh, H., 1991. Lecture note, University of Washington, Seattle, WA (private communication).
- Yoon, S.B. and Liu, P.L.-F., 1992. Numerical simulation of a distant small-scale tsunami, *Recent Advances in Marine Science and Technology*, PACON92, Pacific Congress on Marine Science and Technology, Kona, Hawaii, pp. 67-78.

---

Received March 3, 2003

Accepted May 20, 2003