

NURBS의 차수 감소 방법을 이용한 근사변환

김 혁 진*

Approximate conversion using the degree reduction of NURBS

Hyeock-Jin Kim*

요 약

시스템이 지원하는 곡선 및 곡면의 최대 차수에 제한이 있을 때, 낮은 차수로의 차수 감소가 필요하다. 본 논문에서는 근사 변환의 한 방법으로써 NURBS 곡선의 차수 감소 방법을 소개한다. 이 방법은 기존 Eck의 Bézier 차수 감소 방법과 자료 감소를 위해 knot 제거 알고리즘이 적용된다. 제시하는 방법은 안정적인 뿐만 아니라 수학적으로도 단순하므로 이해와 구현이 용이하다.

Abstract

Because some systems limit the supported maximal degree, the degree reduction of NURBS is necessary in parametric curves and surfaces of the different geometric modeling systems. Therefore an approximate degree reduction method of NURBS curves was introduced in this research. Also the existing Eck's Bézier degree reduction method and knot removal algorithm were used to reduce data in the degree reduction process. Finally we found that this method was stable, efficient for implementations, and easy to use algorithms.

I. 서론

시스템이 지원하는 최대 차수가 입력 곡선의 차수보다 낮은 경우에는 주어진 허용 오차 범위 내에서 시스템이 지원하는 차수로 근사해야 한다. 최대 차수가 높을수록 점(point)의 계산속도가 낮아지므로 대부분의 기하학적 모델링 시스템들은 허용하는 최대 차수의 제한을 둔다 [1][2]. 일반적으로 NURBS의 차수를 감소시키면 처리하는 자료의 양이 증가하므로 시스템의 공간 활용면에서의 효율성은 줄어들지만, 차수를 감소함으로써 점의 계산 속도는 향상된다. 이 때, knot 제거는 차수 감소하는 과정에서 생성된 knot들 중에 spline을 구성하는데 불필요한 knot을 제거하는 처리과정으로써 knot 제거에 의하여 자료의 양을 줄일 수 있다. 실제 시스템에서는 이론적 방법을 택하기보다는, 충분한 수의 샘플을 주어진 곡선 및 곡면으로부터 취한 후 refit하는 방법이 주로 사용된다[3].

본 논문에서는 knot 제거 방법을 이용하여 n 차 NURBS를 $m(m < n)$ 차로 감소시키는 차수 감소 방법을 소개한다. 이 방법은 H. Kim et al.이 [1]에서 제안한 B-spline의 차수 감소 방법을 수정한 것이다. NURBS 곡선은 가중치와 non-uniform knot을 다룬다. 문제의 단순성을 위하여 곡선이 가질 수 있는 내부 연속성에 대한 제한을 없애고 곡선의 양 끝점만을 고정시키는 C^0 연속성만을 고려한다. 본 연구에서는 NURBS 곡선의 샘플을 취한 후 낮은 차수로 감소시키는 방법으로, knot 제거 방법은 [3]에서 제안한 H. Kim의 방법을, Bézier 곡선 차수 감소 방법은 안정성을 고려하여 Eck의 방법을 적용한다. 이 방법은 수학적으로도 단순하므로 이해와 구현이 용이하고 처리 과정에서 새 조정점들을 빠르게 얻을 수 있다. 또한, 비교적 정확한 최대 오차를 제어하면서 임의의 허용 오차 범위에 대한 모든 근사 곡선을 얻을 수 있다.

II. Knot Removal

Le Mehaute와 Lafranche는 Bézier 근사를 이용하는 방법으로, Lyche와 Morken은 first rank knot에 의해 하나 이상의 knot을 근사적으로 제거하고, global approximation 방법에 의한 작은 가중치로 모든 knot을 제거하는 방법을 제안하였다[4]. 이와 연관된 문제로서, 3차 B-spline에서 하나의 knot만을 제거하는 연구로 1983년 Kjellader, 1987년 Farin 외, 1990년 Sapidis와 Farin 등의 결과가 있다[5]. Tiller는 모든 knot을 제거하는데 컴퓨터의 정확성 내에서 제거되어질 수 있는 알고리즘을 제시하였다[6]. Eck과 Hadenfeld는 Lyche와 Morken의 방법과 약간 다른 방법으로, B-spline에서 하나의 knot만을 제거할 수 있는 가장 간단한 경우로 제한하는 연구를 수행하였다[7]. Eck은 이 방법을 이용하여 연속적인 knot을 제거하는 만족스러운 결과를 얻는 연구도 진행되었다[8]. H. Kim의 방법은 제거하는 knot의 순서에 상관없이 없기 때문에 제거되는 knot의 순서에 영향을 받지 않고 항상 같은 결과를 얻을 수 있는 연구를 수행하였다[3].

Knot 벡터 U 로 정의되는 p 차 B-spline $C(u)$ 는

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i$$

으로 정의하고, knot벡터 U 에서 내부 knot 중 1개를 제거할 경우 새로 정의되는 곡선 $\bar{C}(u)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{C}(u) = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{N}_{i,p}(u) Q_i$$

Knot 삽입은 렌더링과 교차 알고리즘에 구간적 선형 근사를 제공할 수 있어 추가적인 knot들을 가지고 정확히 주어진 곡선이나 곡면을 정교하게 표현할 수 있지만, knot 제거는 몇몇 knot들을 가지고 주어진 곡선이나 곡면을 어떻게 근사화시킬 수 있는가에 대한 방법이다.

III. B-Spline의 Degree Reduction

Forrest에 의해 처음 제시된 Bézier의 차수 감소 방법은 곡선의 양 끝점에서 접선을 유지하는 알고리즘을 제시하였으며, Farin에 의한 차수 감소 방법은 rational Bézier 곡선을 처리하는 방법을 제안하였다. 그리고 Watkin과 Worsey는 Chebyshev 다항식을 사용하여 해결하는 방안을 제시하였다. Lachance는 단항식으로만 변환되는 유사한 방법을 기술하였다[1][2]. M. Eck은 constrained Chebyshev 다항식을 사용하여 Farin의 방법을 일반화하였으며[9], 이 방법에 기반을 둔 Least Square 방법을 적용한 알고리즘을 개발하였다. 이것을 일명 LSE 방법이라고 한다[10]. 그 밖에도, 곡선의 차수 감소에 대한 다양한 연구결과들이 이루어져 있다. L. Piegl과 W. Tiller는 새로운 B-spline의 차수 감소 알고리즘을 제시하였다[11]. H. Kim et al.은 Bézier 방법을 이용한 B-spline 방법을 다루었다[1].

H. Kim et al.의 논문에서 확인된 Bézier 방법들의 결과는 다음과 같다[1].

- 1) Bézier 곡선을 차수 감소 할 때에 최대 오차는 곡선의 모양에 따라 큰 폭의 변화를 보였으나, Eck 방법이나 LSE 방법이 다른 방법들에 비하여 매우 안정적이다.
- 2) B-spline의 차수 감소에서는 Piegl과 Tiller의 Bézier 차수 감소 방법을 적용한 경우에 비교적 가장 적은 수의 조정점을 생성한다.

따라서 위의 결과를 토대로 시스템의 특성에 적합한 방법을 선택하면 된다. 본 논문에서는 다른 방법들에 비하여 안정성이 높은 Eck의 방법을 적용한다.

IV. NURBS의 근사변환

p 차 NURBS 곡선은 knot vector

$$U = \{ a, \dots, a, u_1, \dots, u_1, \dots, u_s, \dots, u_s, b, \dots, b \}$$

에서 a, \dots, a 는 $p+1$, u_1, \dots, u_1 은 m_1 , u_s, \dots, u_s 는 m_s , b, \dots, b 는 $p+1$ 개이라면 NURBS 곡선은 다음과 같이 정의한다.

$$S(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} \quad a \leq u \leq b$$

여기서 $\{P_i\}, i=0, \dots, n$ 은 control polygon을 만드는 조정점, $\{w_i\}, i=0, \dots, n$ 는 가중치, $\{N_{i,p}(u)\}, i=0, \dots, n$ 은 차수 p (order $p+1$)인 B-spline 기저함수이다.

$p-1$ 차로 감소한 NURBS 곡선은 knot vector

\bar{U} 는 U 에서 a, \dots, a 는 p , u_1, \dots, u_1 은 $m_1 - 1$, u_s, \dots, u_s 는 $m_s - 1$, b, \dots, b 는 p 개이라면 NURBS는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\bar{S}(u) = \frac{\sum_{i=0}^{\bar{n}} \bar{N}_{i,p-1}(u) \bar{w}_i \bar{Q}_i}{\sum_{i=0}^{\bar{n}} \bar{N}_{i,p-1}(u) \bar{w}_i} \quad a \leq u \leq b$$

여기서 $\bar{n} = n - s - 1$ 이고, \bar{Q}_i 와 \bar{w}_i 는 차수 감소에 따라 계산된 값이다.

[1]에서 제시한 B-spline의 차수 감소 방법을 NURBS의 차수 감소로 적용한 알고리즘은 다음과 같다.

Algorithm. NURBS의 차수 감소

```

/* Notation
n : degree
TOL : 허용오차
target_degree : 감소하고자하는 최종 차수
reduce_degree : n~target_degree 사이의
               진행 중인 차수
maxErr : 각 segment에서의 최대 오차
    
```

```

SplitTol : reduce_degree에서의 허용오차 */
1. SplitTol=TOL/(degree-target_degree);
2. while(target_degree < reduce_degree)
  1) for i=1 to (number of segments)
    (1) Insert knots up to multiplicity
        reduce_degree;
    (2) Decompose the NURBS curve
        into Bezier curves;
    (3) Reduce degree one and subdivide
        if necessary until maxErr<SplitTol
        for new segments;
  2) Set up a NURBS;
3. Call 'Knot Removal'; //참고문헌 {3} 참조

```

B-spline의 차수 감소는 point sampling에 기반을 둔 일반적인 global approximation 방법이 사용된다. B-spline의 차수를 감소하는 방법은 각 단계마다 다양하게 제시될 수 있다. 이러한 방법을 구현하기 위해서는 curve decomposition, Bézier degree reduction, knot 제거, error formulae 등과 같은 세부적인 구성방법 요소들이 필요하다.

먼저, 주어진 허용 오차 범위(TOL)를 감소하고자 하는 차수의 차이로 나눈 SplitTol을 구한다. 그 다음, NURBS 곡선을 한 개 이상의 Bézier 곡선으로 분해하고 각각의 Bézier 곡선에 대하여 원하는 차수(target_degree)로 감소시키는 과정을 수행한다. 각각의 Bézier 곡선에서 한 차수 감소한 곡선과의 오차를 SplitTol과 비교하여 이를 초과하면 해당되는 Bézier 곡선을 다시 2개의 곡선으로 subdivision을 수행한다. 각각의 Bézier 곡선으로 B-spline을 구성한다. 이때 만일 2개로 나눈 각각의 곡선에서 이 오차를 초과한다면, 계속 반복적으로 subdivision을 수행하여 SplitTol이 최대 오차를 넘지 않을 때까지 진행한다. 1차수 감소와 subdivision이 완료되면 각각의 Bézier 세그먼트들을 하나의 NURBS 곡선으로 구성한다.

이러한 과정이 모두 끝나면, 차수 감소 과정에서 불필요하게 추가된 knot가 존재할 수 있으므로 이를 제거하는 과정이 진행된다. 이 과정은 H. Kim이 제안한 'Knot Removal' 알고리즘을 호출하여 knot을 제거한다(3).

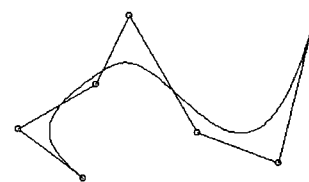
차수 감소에서는 주어진 허용 오차 범위 내에서 원래의 주어진 곡선의 모양과 유사하게 근사한다. Offset의 경우 여러 가지 이론적인 방법들이 많이 제시되지만 실제

시스템에서는 이론적인 방법을 이용하기보다는 충분한 수의 샘플을 취한 후 refit하는 방법이 자주 사용된다. 따라서, 차수 감소의 경우도 실제적으로는 샘플점을 가지고 낮은 차수로 refit하는 방법이 자주 사용되기도 한다. 특수한 경우 이론적 방법들이 실패하는 경우가 많기 때문에 다소 효율성은 떨어지더라도 단순하고 안정적인 방법을 사용한다.

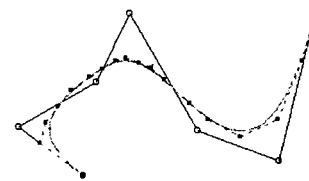
V. 실험 결과

다음의 예는 실험적 결과들을 보여준다. 그림에서 원 모양(○)은 주어진 조정점, 채워진 사각형(■)은 계산되어 만든 새 조정점, 실선은 원래의 곡선 및 polygon이며 점선은 새로 만들어진 곡선 및 polygon이다.

그림 1은 7개의 조정점과 knot vector {0,0,0,0,0,1,2,3,3,3,3,3}, 가중치 {1,1,2,1,2,1,1}로 정의된 4차 NURBS 곡선을 허용 오차 범위(TOL)를 변화시키면서 3차로 감소한 결과이다. 조정점 수는 허용 오차 범위가 각각 0.1일 때 22, 0.01일 때 35, 0.001일 때 63개가 생성된다.



(a) 4차의 NURBS



(b) TOL=0.1

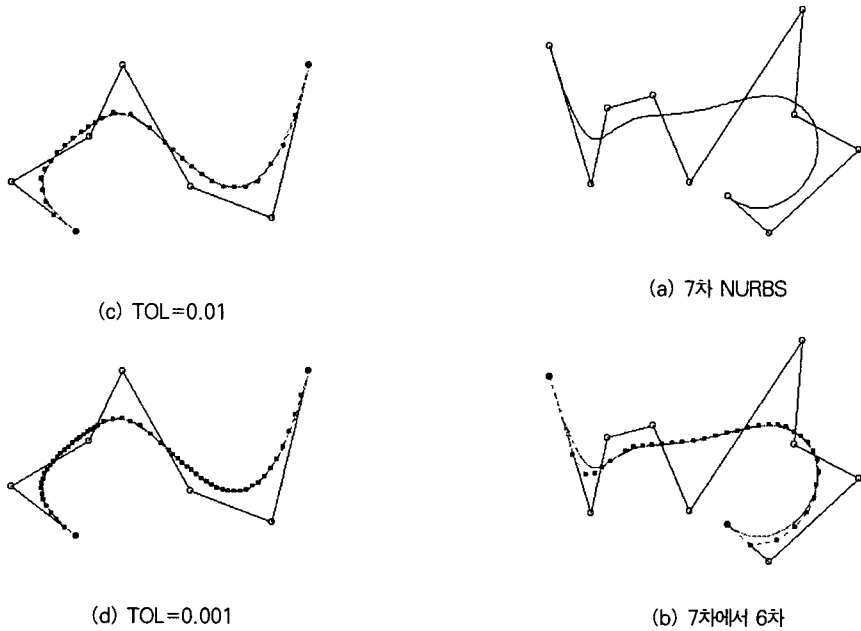


그림 1. 4차 NURBS에서 3차로의 차수 감소

그림 2는 10개의 조정점과 knot vector $\{0,0,0,0,0,0,0,0,1,2,3,3,3,3,3,3,3,3\}$, 가중치 $\{1,1,2,2,2,1,2,2,1,1\}$ 로 정의된 7차 NURBS 곡선을 허용 오차 범위 (TOL)를 0.001로 정하고 차수 감소 범위를 변화시키면서 차수를 감소한 결과이다. 조정점 수는 목표 차수가 각각 6차일 때 43, 5차일 때 59, 4차일 때 77개가 생성되어 같은 조건에서 감소 차수가 클수록 조정점과 knot의 수가 증가하는 결과를 보이고 있다.

일반적으로 곡선 및 곡면의 차수를 감소시키면 자료의 양은 증가하게 된다. 특히 허용 오차 범위가 작으면 작을수록 조정점과 knot의 수는 더욱 증가하게 된다. 또한 감소하는 차수 차이가 크면 클수록 조정점과 knot의 수도 더욱 증가하게 된다. 이것은 공간적인 효율성은 떨어지지만 점의 계산속도는 빨라지므로 차수에 제한을 두는 응용에서는 유용하게 사용된다. 시간적 효율성은 조정점이나 knot의 수보다는 차수에 더욱 의존되어 결정되어지기 때문이다

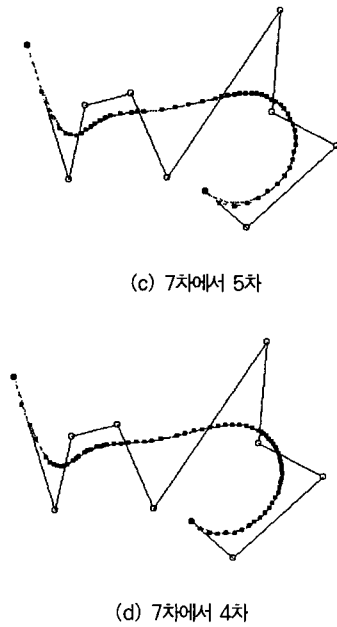


그림 2. 7차 NURBS의 차수 감소

VI. 결론

본 논문에서는 기하 모델링 중에서 knot 제거 방법을 적용한 NURBS의 차수감소 방법을 소개하였다. 이 방법은 샘플점들의 refit에 대한 하나의 대안으로서 제시하는 것으로써 구현이 용이하다. 일반적으로 차수 감소는 한번에 $(n-1)$ 차수씩 감소하지만, 이 방법은 한번에 n 차를 $m(m < n)$ 차로 감소할 수 있고, 오차 제어가 용이하면서 임의의 허용된 오차 범위에 대한 모든 근사 곡선을 얻을 수 있다. 그러나 자료의 양이 증가하는 단점이 있다.

Knot 제거 알고리즘에서 H. Kim의 방법을 적용하기 때문에 rank를 계산할 필요가 없고 제거되는 knot의 순서에 영향을 받지 않아도 항상 같은 결과를 얻을 수 있다. 수학적으로도 단순하므로 이해와 구현이 용이하다.

이러한 결과는 인체와 같은 복잡한 형태의 물체를 자유롭게 표현할 수 있는 능력을 확보할 수 있고, 실시간을 요구하는 기술 등과 결합하여 가상공간을 구축하는 기술 등에도 적용을 할 수 있다.

앞으로, 본 논문에서 제시하는 NURBS 알고리즘을 폭넓게 확대하는 연구가 요구된다.

참고문헌

- [1] Kim, H. et al., The degree reduction of B-splines using Bézier methods, Jour. of the KISS, Vol.26, No.8, pp.875-883, 1999
- [2] Kim, H., Degree reduction and computation of the maximum error of Bézier curves, Jour. of the KIOA, Vol.4, No.4, pp.25-33, 1999
- [3] Kim, H., Knot Removal for the efficient Visualization Implementations, Jour. of

the KIOA, Vol.6, No.1, pp.1-6, 2001

- [4] Lyche, T. and Morken, K., Knot removal for parametric B-spline curves and surfaces, Comput. Aid. Geom. Des., Vol.4, pp.217-230, 1987
- [5] Le Mehaute, A.J.Y. and Lafranche, Y., A knot removal strategy for scattered data in R2, in Mathematical methods in computer aided geometric design, Ed. Lyche, T. and Schumaker, L.L., Boston, Academic Press, pp.419-426, 1989
- [6] Tiller, W., Knot-removal algorithms for NURBS curves and surfaces, CAD, Vol.24, No.8, pp.445-453, 1992
- [7] Eck, M. and Hadenfeld, J., Knot removal for B-spline curves, Comput. Aid. Geom. Des., Vol.12, pp.259-282, 1995
- [8] Piegl, L. and Tiller, W., The NURBS book, 2nd ed., Springer, 1997
- [9] Eck, M., Degree reduction of Bézier curves, Comput. Aid. Geom. Des., Vol. 10, pp. 237-251, 1993
- [10] Eck, M., Least squares degree reduction of Bézier curves, CAD., Vol. 27, No. 11, pp.24-30, 1995
- [11] Piegl, L., and Tiller, W., Algorithm for degree reduction of B-spline curves, CAD, Vol. 27, No. 2, 1995

저자소개



김혁진

아주대학교 대학원
전자계산학과 석사
아주대학교 대학원
컴퓨터공학과 박사
1992-1997년 김천대학
사무자동화과 조교수
1997년-현 청운대학교
컴퓨터과학과 조교수
관심분야 : CG, CAGD,
웹기술 등