KJHM Vol. 16, No. 4, 2003, 79-90

# 무리수 개념의 역사적 발생과 역사발생적 원리에 따른 무리수 지도

한국수학사학회 **장혜원**

## Abstract

This paper aims to consider the genesis of irrational numbers and to suggest a method for teaching the concept of irrational numbers. It is the notion of "incommensurability" in geometrical sense that makes Pythagoreans discover irrational numbers. According to the historica-genetic principle, the teaching method suggested in this paper is based on the very concept, incommensurability which the school mathematics lacks. The basic ideas are induced from Clairaut's and Arcavi's.

## 0. 머리말

학교 수학에서 수의 학습 순서는 자연수, 정수, 유리수, 실수, 복소수로의 수의 집합적 확장을 따른다. 이것은 수의 발생 순서와 일치하지는 않지만 기지의 수 세계에서 지켜지는 산술 규칙이 새로운 범주의 수에서도 유지된다는 의미에서 학생들에게 자연스럽다. 특히 무리수의 도입에 있어서는, 제곱근을 먼저 지도한 후 $\sqrt{2}$와 같은 특정 제곱근 또는 그 소수 표현인 순환하지 않는 무한 소수에 의해 유리수가 아닌 수의 존재를 확인함으로써 유리수가 아닌 수라고 정의한다. 따라서 무리수는 소수와 관련해서는 순환하지 않는 무한 소수이고, 분수와 관련해서는 분자・분모가 정수인 분수로 나타낼 수 없는 수가 된다. 그 결과 학생들이 가질 것이라고 기대되는 무리수 관념은 (소수, 분수 표현에 대한 약간의 지식과 함께) '유리수가 아닌 수'이다. 이 개념 정의를 지닌 학생들은 연산에 적용되는 규칙 등의 조작적 절차와 관련된 사항을 무리 없이 학습할 수 있지만, 유리수와 구별되는 무리수 발생의 아이디어를 갖지 못함으로써 무리수의 중요한 개념적 측면을 파악하지 못한다는 문제점이 지적되어 왔다[1].

물론 무리수는 유리수가 아닌 수, 다시 말해 두 정수의 비로 표현될 수 있는 유리수와 달

리 두 정수의 비로 표현될 수 없는 또 다른 범주의 수이며, 통약 불가능성(incommensurabilty)이라 일컫는 그러한 특성은 무리수 발생의 중심 아이디어인 것이 사실이다. 그러나 학교 수학에서는 공통 척도와 관련한 무리수 발생상의 본질을 찾아볼 수 없고 단지 두 정수의 비라는 결과적인 형태에만 초점을 두는 것이 문제이다.1) 더욱이 학교 수학에서 기존의 무리수 지도와 무리수 발견에 대한 수학사적 자료를 삽입한 교수의 비교 연구[2]에서조차 공통 척도와 통약 불가능성에 대한 언급을 찾아볼 수 없다.

본고에서는 무리수 개념의 초기 발생 과정을 고찰하고, 역사상 개념의 발생 과정을 따르는 것이 학습자에게 가장 자연스러운 학습법이라고 주장하는 역사발생적 원리에 근거하여, 무리수 개념 발생의 핵심 아이디어인 통약 불가능성에 기초한 무리수 지도 방안을 제안하고자 한다.

## 1. 무리수의 발견2)

수학사에서 무리수는 기원전 5세기 피타고라스 학파에 의해 발견된 것으로 전해진다. 세는 활동의 산물이자 그 활동을 가능하게 하는 자연수, 그리고 측정을 위해 필연적인 단위 길이의 비로서의 유리수만이 기껏 수 전체라고 생각했던 이들에게 그 발견은 학파의 비밀로 지켜져야 했을 만큼 큰 충격이었다. 오늘날 $\sqrt{2}$라고 표기하는 새로운 수의 출현을 수용할 수 없었던 것은, 그로 인해 만사가 자연수에 근거한다는 자신들의 기본 가정이 흔들렸기 때문이다. 그 결과로 피타고라스 학파가 겪었을 혼란과 장애는 실로 큰 것이었을 것이다.

수학사적으로 무리수의 발견 맥락은 산술과 기하의 통합이라는 측면에서 조명된다. Struik[6]에 의하면 무리수의 발견은 수학적 성향의 귀족 철학파인 피타고라스 학파가 당시 귀족사회의 상징이었던 기하 평균 $a:b=b:c$를 다루는 데서 비롯된다. 구체적으로 수의 기본인 1과 2의 기하 평균, 즉 $1:x=x:2$인 $x$를 구하려고 고민하다가, 정사각형의 한 변과

1) 9단계에서 무리수 도입시 분자, 분모가 정수인 분수로 나타낼 수 없음이 언급되지만, 그것은 통약 불가능성의 맥락에서가 아니라 단지 유리가 아닌 수이기 때문에 유리수의 정의를 만족하지 않는다는 의미에서이다. 또한 10단계에서도 $\sqrt{2}$가 유리수가 아님을 보이는 귀류법 증명에서 두 정수비로 나타내는 가정을 표현하지만 부가적인 설명 없이 그것만으로 공통 척도에 의한 통약 불가능성을 의식하기란 불가능하다. 본고의 사례 1의 증명 및 각주를 참조하시오.

2) 무리수 개념의 역사발생 과정 중, 피타고라스 학파에 의한 초기 발견에만 초점을 맞춘다. 이후 유클리드의 원론에서도 유비적, 무비적(rational, irrational)이라는 개념을 공통 척도에 기초한 통약 가능 여부와 관련하여 다루고 있지만, 거기서의 관념이 오늘날과 차이가 있기 때문이다. 구체적으로, 주어진 선분을 유비적이라 할 때, 어떤 선분이 유비적인 것은 두 선분의 제곱이 통약 가능한 경우에 한해서이다. 예를 들어 단위 길이 1이 주어진 선분일 때 $\sqrt{2}$의 제곱 2는 1의 제곱과 통약 가능하므로 $\sqrt{2}$도 유비적이 될 수 있다. 이와 같이 당시 유비적이라는 개념은 오늘날과 같이 수를 분류하는 절대적 관념이 아니라 주어진 선분에 대한 상대적인 관념인 것이다[3]. 나아가 데데킨트(Dedekind)의 단절에 의한 새로운 정의가 있기까지 무리수의 역사는 주로 무리수를 수로 인정하는 문제와 근사값을 구하는 방법에 관한 것이다.

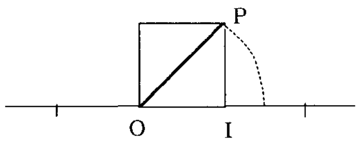
대각선의 비가 수(물론 당시로는 유리수)로 표현될 수 없음을 발견하였다. 그에 대한 아리스토텔레스의 증명은 다음과 같다.

> 이 비를 서로 소인 두 수 $p$와 $q$에 대하여 $p:q$라 하자. 그러면 $p^2=2q^2$이므로 $p^2$은 짝수이고, 따라서 $p$도 짝수이다. 이때 $p=2r$이라 하자. 그러면 $q$는 홀수이어야 한다. 그러나 $q^2=2r^2$이므로 $q$는 짝수가 되기 때문에 모순이다. 이 모순은 오리엔트나 르네상스 유럽에서와 같이 수 개념의 확장으로 해결되지 않았으며, 오히려 이런 경우에 수론을 부정하고 기하학에서의 통합을 찾으려 하였다[6, p. 52].

결국 산술 맥락에서 해결되지 못한 수 관계의 모순이 기하학적 해석에 의해 수 개념의 확장으로 유도된다. Eves[5]에 따르면, 무리수가 발견될 무렵의 사람들은 그들이 생각할 수 있는 수 개념인 유리수에 대해 다음과 같은 기하적인 해석을 내리고 있었다.

직선 위에 서로 다른 두 점 O와 I가 있어 OI가 길이 단위이도록 각각 0과 1을 나타낸다면 그 길이 단위의 이동으로 모든 정수는 이 직선 위의 한 점으로 나타내어진다. 원점 O의 오른쪽에 양의 정수를, 왼쪽에 음의 정수를 위치시킨다. 한편 분모가 $q$인 분수는 단위 구간을 $q$등분할 때의 각 분점으로 표현되므로 모든 유리수 역시 이 직선 위의 한 점에 대응하게 된다. 초기 수학에서는 직선 위의 모든 점이 이런 식으로 완전히 덮일 수 있다고 생각하였다.

그런데, 어떤 유리수에도 대응하지 않는 점이 존재한다는 사실을 발견하게 된다. 다시 말해, <그림 1>에서 OP가 단위 길이를 한 변으로 하는 정사각형의 대각선일 때 직선 위에 점 P에 대응하는 어떤 유리수도 없음을 보인다.

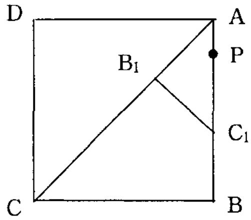



<그림 1>

이전까지의 수(유리수)는 단위 길이를 $q$개의 같은 부분으로 나누면 $1/q$ 부분 몇 개를 이용하여 모두 나타낼 수 있는데, 이제 새로운 수는 단위 길이를 *아무리 작게 잘라도* 나타낼 수가 없는 것이다. 예를 들어 한 변을 5개로 나눈 부분으로 대각선을 측정하면 7개가 포함되고 나머지가 있다. 다시 한 변을 12개로 나눈 부분으로 측정하면 5개로 나누었을 때보다는 더 정확하지만 17개가 포함되고 역시 나머지가 있다.[3] 몇 번의 시도를 통해, 변을 어떻

게 등분하여도 그 부분으로 대각선을 정확하게 측정할 수는 없고 다만 근사값만을 얻게 됨을 알게 된다.

물론 이에 대한 엄밀한 기하학적 증명을 생각할 수 있다. <그림 2>에서 정사각형 ABCD의 한 변 AB와 대각선 AC가 공통 척도로 측정 가능하다고 하자. 즉, 아주 작은 길이의 선분 AP를 잡으면 두 선분을 측정할 수 있어, 각각을 AP의 정수배로 표현할 수 있다고 가정하자. 이제 $CB_1=AB$인 $B_1$을 AC에서 잡고, $CA \perp B_1C_1$이도록 $C_1$을 AB 위에 잡는다. 그러면 $C_1B=C_1B_1=AB_1$ 임을 보일 수 있다. 따라서 $AB_1$과 $AC_1=AB-AB_1$은 AP로 측정 가능하다. 그러나 $AB_1$과 $AC_1$은 주어진 정사각형의 반도 안 되는 정사각형의 변과 대각선이다. 이런 식으로 임의의 $n$번을 시행하면 변 $AB_n$과 대각선 $AC_n$이 AP로 측정 가능하고, 한편 $AC_n <$ AP 인 정사각형을 얻게 되므로 모순이다[5].



<그림 2>

이것이 바로 두 선분의 통약 불가능성의 아이디어이다. 두 수가 통약 불가능하다는 것은, 그 수에 해당하는 길이의 두 선분이, 아주 작은 길이의 선분을 택하면 그 선분의 정수배로 표현 가능할 것이라는 우리의 직관과는 달리 아무리 작게 잡더라도 두 선분을 공통으로 측정할 수 있는 척도가 없다는 것을 의미한다. 예를 들어, 두 수 $a$와 $b$에 대응하는 두 길이를 작은 길이 $e$인 선분의 정수 배로 표현할 수 있다면, 즉 $a=pe$, $b=qe$인 정수 $p$와 $q$가 있다면 두 선분 $a$와 $b$는 통약 가능하다고 하며 이때 $\frac{a}{b}=\frac{pe}{qe}=\frac{p}{q}$이므로 두 수의 통약 가능성은 두 수의 비를 두 정수의 비로 나타낼 수 있다는 것과 동치이다. 같은 말로 두 수가 통약 불가능하다는 것은 두 정수의 비로 나타낼 수 없다는 것이다. 요컨대 정사각형의 한 변과 대각선은 공통 척도로 측정될 수 없고 그 비를 두 정수의 비로 표현할 수 없다.

이와 같이, 한 변이 1인 정사각형의 대각선에 대응하는 점을 나타내는 유리수는 없고, 이제 수직선에는 유리수 외의 수가 존재함이 분명하다. 이 새로운 수가 바로 무리수이며, 무리수의 출현 맥락은 본질적으로 정사각형의 한 변과 대각선이 공통 척도로 측정될 수 없다는 기하학적인 성격의 것이었음을 확인할 수 있다.

3) Toeplitz[7]가 정사각형의 변과 대각선의 통약 불가능성을 설명하면서 사용한 예이다.

## 2. 역사발생적 원리에 따른 무리수 지도

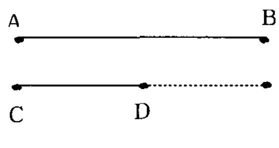
역사상 피타고라스 학파가 경험한 인식론적 장애를 참조하건대 오늘날 학교 수학에서 무리수 지도 방안에 대한 숙고를 요구하게 된다. 다시 말해, 피타고라스 학파가 경험한 혼란과 장애에 비해 오늘날 무리수 도입이 학생들에게 별 어려움을 요구하지 않는다는 것은 무리수의 본질이 제대로 지도되고 있는가에 대한 재고의 필요성을 시사한다. 역사발생상 무리수의 본질이 같은 척도로 측정 불가능하다는 의미의 통약 불가능성에 기인한다면, 역사발생적 원리에 근거하여 무리수를 지도할 때 역시 두 수 또는 그것을 길이로 갖는 두 선분의 통약 불가능성과 관련하여 지도하는 것이 의미 있을 것이다.

학교 수학에서 무리수 개념을 지도하는 한 방법은 공통 척도로의 측정 가능성 여부와 관련된 기하학적인 접근이다. 무리수 개념의 본질인 통약 불가능성을 공통 척도와 관련하여 엄밀하게 증명할 수 있으려면 고등학교 이후로 미루어야 한다는 입장도 있지만[1], 학교 수학에서 무리수를 도입하는 것은 실제로 중학교 시기이므로 도입하는 당시 개념의 본질을 놓치는 교수법이 문제가 된다. 통약 불가능성에 대한 기하학적이고 직관적인 이해를 통해 접근할 수 있는 방안을 모색할 필요가 있고 이제 Clairaut와 Arcavi의 아이디어에 착안하여 그 구체화 방안을 제시하고자 한다. Clairaut[4]의 아이디어는 <기하학 원론>에서 닮은 도형의 대응변이 서로 통약 불가능할지라도 비례 관계가 성립함을 보이기 위해 통약 불가능성을 직관적으로 소개하고 있는 것으로부터, Arcavi[3]의 아이디어는 교사를 위해 마련한 수학사에 기초한 활동지로부터 파악할 수 있다.

### 1단계: 통약 가능성의 의미를 파악하기 위한 활동

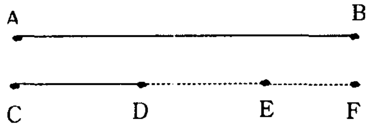
두 선분 AB와 CD를 동시에 측정할 수 있는 공통 척도를 찾아보자. 최대공약수를 구할 때 두 수를 서로 빼어 나가는 유클리드의 호제법과 동일한 원리를 두 선분에 적용하여 다음과 같이 공통 척도를 찾을 수 있다.

1) AB=2CD 라면 CD가 곧 두 선분 AB와 CD의 공통 척도이다.

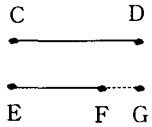



2) AB가 CD의 2배가 아니라면 CD는 공통 척도가 아니다. 공통 척도를 찾을 때까지 긴 선분에서 짧은 선분을 빼나가는 과정을 반복한다.

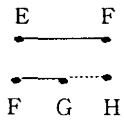
AB에서 CD보다 작은 부분 EF가 남을 때까지 CD를 뺀다.




CD와 EF에서, EF는 CD를 잴 수 없으므로 공통 척도가 아니다.




EF와 FG에서, EF=2FG이므로 EF와 FG의 공통 척도 FG를 찾는다.




여기서 CD=3FG, AB=8FG가 되어 FG가 바로 AB와 CD의 구하는 공통 척도이다. 1), 2)에서 AB, CD와 같이 두 선분이 공통 척도로 측정 가능할 때, 두 선분은 통약 가능하다고 한다.

> 두 선분이 공통 척도를 갖는다. ⇔ 두 선분은 통약 가능하다.

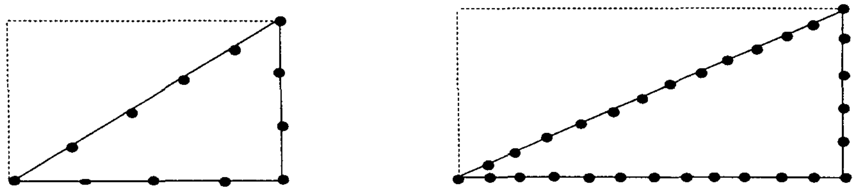
한편 1)에서 $\frac{AB}{CD}=\frac{2}{1}$이고 2)에서 $\frac{AB}{CD}=\frac{8FG}{3FG}=\frac{8}{3}$임을 주목하면, 두 선분이 통약 가능하다는 것은 두 선분의 비가 정수비로 표현될 수 있다는 것과 같은 의미이다.

> 두 선분이 통약 가능하다. ⇔ 두 선분의 비를 정수비로 나타낼 수 있다.

예를 들어, 피타고라스 학과 사람들에게 너무도 친숙한 직각삼각형의 성질을 이용하면 <그림 3>의 직사각형에서 변과 대각선도 역시 통약 가능하다. 각각의 경우에 대각선과 밑변의 비가 5/4, 13/12의 정수비로 표현되기 때문이다.[4]

---

4) 이 교수 단계를 따르면 우리의 교육과정과는 달리, 무리수를 배우기에 앞서 피타고라스의 정리가 먼저 지도되는 것이 자연스럽다. 역사발생적으로도 그 순서가 타당하다. 실제로 프랑스의 중학교 교육과정에 따르면 무리수에 앞서 피타고라스의 정리가 먼저 지도된다. 무리수가 지도되기 전까지는 수 자체에 대한 개념적 접근 없이 제곱근 기호를 이용하여 표기하며 때로는 계산기를 이용하여



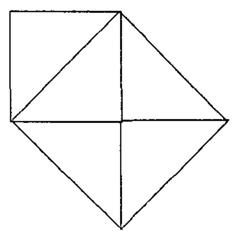
<그림 3>

## 2단계: 통약 불가능한 선분의 사례를 통한 무리수의 도입

그러면, 모든 두 선분에 대해 공통 척도를 찾는 것이 가능한가? 피타고라스 학파는 그렇다고 생각했지만 통약 불가능한 두 선분의 발견으로 그들 고유의 주장이 위기에 처했고 이것이 무리수 발생의 시작이다.

수학사가들이 피타고라스 학파가 무리수를 발견하게 된 상황이라고 가정하고 있는 두 가지 사례를 통해 통약 불가능성을 예시할 수 있다. 정사각형의 한 변과 대각선, 그리고 정오각형의 한 변과 대각선이다. 전자는 관련된 수 자체가 간단하며 대수적 증명을 수반하고, 후자는 관련된 수를 구하는 것이 심화 단계의 활동으로 활용될 만큼 수 자체는 복잡하지만 증명이 기하적이고 직관적이라 이해하기에 용이하다.

**사례 1)** 정사각형의 한 변과 대각선은 통약 불가능하다.



<그림 4>

우선 주어진 정사각형의 대각선을 이용하면 넓이가 2배가 되는 정사각형을 그릴 수 있음을 확인한다.(이 작도가능성은 2의 제곱근의 존재를 확인시켜준다.) 이 외에 또 다른 방법은 없을까? 수치적으로 접근해 보자.

주어진 정사각형의 한 변을 100등분하면 그 넓이는 10000이고 구하는 정사각형의 넓이는 20000이다. 그러나 이 값을 안다고 해서 도형을 그리는 것을 보장하지는 못한다. 둘은 별개의 문제이므로 한 변의 길이, 즉 제곱하여 20000이 되는 수를 찾아야 구하는 도형을 그릴 수 있다.

값을 구하기도 한다.

그럼, 제곱하여 20000이 되는 수는 무엇인가? $141^2=19881$, $142^2=20164$이고 20000은 둘 사이에 있으므로, 제곱하여 20000이 되는 수는 주어진 변의 1/100 척도로는 표시될 수 없다. 여기서 한 변을 더 잘게 잘라보려는 시도는 자연스럽다. 1000등분해보자. 주어진 정사각형의 넓이는 1000000, 구하는 정사각형의 넓이는 2000000이므로 제곱하여 2000000이 되는 수를 찾아야 한다. 그런데 $1414^2=1999396$, $1415^2=2002225$이므로 역시 1/1000 척도로도 부족하다. 몇 번의 시행을 통해 더 잘게 잘라도 그 길이를 찾을 수 없음을 알게된다.(이것이 바로 정사각형의 한 변과 대각선의 공통 척도를 찾기 위해 한 변을 잘게 나누어보는 역사상의 시도였을 것이다.) 따라서 어떤 정사각형의 한 변을 아무리 작게 등분해도 넓이가 2배인 정사각형의 한 변, 즉 원래 정사각형의 대각선은 변의 나뉜 부분을 정확한 개수만큼 가질 수 없다.

이와 같이 정사각형의 한 변과 대각선은 공통 척도로 측정할 수 없고, 단계 1에서 정한대로 두 선분은 통약 불가능하며, 따라서 두 정수의 비로 나타낼 수 없다.

이제 정사각형의 한 변과 대각선이 통약 불가임을 대수적으로 증명할 수 있다. <그림 5>에서 $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{p}{q}$인 자연수 $p$와 $q$가 존재하지 않음을 증명하면 된다.

**(증명)** $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{p}{q}$인 서로소인 $p$와 $q$가 존재한다고 가정하자.[5)]

피타고라스의 정리에 의해 $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{AC}^2$

$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}$이므로 $2\mathrm{AB}^2=\mathrm{AC}^2$

따라서 $\frac{\mathrm{AC}^2}{\mathrm{AB}^2}=2$

$\frac{p^2}{q^2}=2$

$p^2=2q^2$ ……①

$p^2$은 짝수이고 따라서 $p$도 짝수이다.

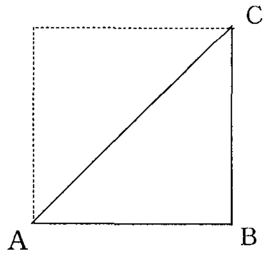
$p=2r$이라 하자. 제곱하면 $p^2=4r^2$ ……②

①, ②에서 $2q^2=4r^2$

$q^2=2r^2$

따라서 $q^2$은 짝수이고 $q$도 짝수이다.

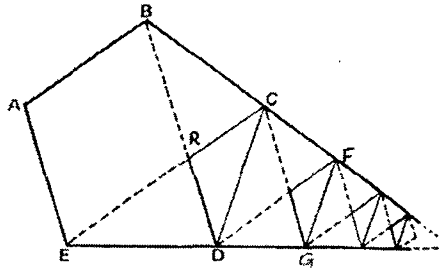
이것은 $p$와 $q$가 서로소라는 가정에 모순이다.




<그림 5>

5) 이 증명에서 AC/AB 대신 $\sqrt{2}$를 넣고 시작한다면 학교수학 10단계에서 $\sqrt{2}$가 무리수임을 보이는 증명과 일치한다. 그러나 교재에서의 출발은 유리수라는 가정 때문에 유리수의 정의에 따른 표현에 불과한 반면, 여기서의 출발은 기하학적으로 두 선분이 공통 척도로 표현 가능함을 의미하며 제곱근 기호 없이도 피타고라스의 정리에 근거하여 전개한다는 점에서 수학적, 교수학적으로 차이가 있다.

**사례 2)** 정오각형의 한 변과 대각선 역시 통약 불가능하다. 즉 <그림 6>에서 BC와 BD가 공통 척도를 갖지 않음을 보일 것이다.




<그림 6>

이 증명을 위해 우선 BC=BR임을 보이자.

△BCD에서 BC=CD이므로 $\angle CBD = \angle CDB = \dfrac{180° - 108°}{2} = 36°$

△CDE에서도 마찬가지로 $\angle DCE = \angle DEC = 36°$

$\therefore\ \angle CRB = \angle RCD + \angle RDC = 72°$

$\angle RCB = \angle BCD - \angle RCD = 72°$

따라서 BC=BR이다.

이제, BC와 BD의 공통 척도를 찾는 것은 BR과 BD의 공통 척도를 찾는 것과 같고, 1단계에서 했던 호제법을 적용하면, BR과 RD의 공통 척도를 찾으면 된다. 그런데 BR=CD이므로, 다시 RD와 CD의 공통 척도를 찾는 문제가 되는데, 이 두 선분은 다시 새로운 정오각형 RCFGD (위의 증명에서, △RCD에서 $\angle RCD = \angle RDC = 36°$ 이므로 RC=RD이고 $\angle CRD = 180° - (\angle RCD + \angle RDC) = 108°$ 이므로 RCFGD는 정오각형이 된다.)의 한 변과 대각선이므로 문제는 원점으로 돌아간다. <그림 6>에서 보듯이 이와 같은 과정은 무한히 계속될 것이고, 결국 정오각형의 한 변과 대각선을 동시에 측정할 수 있는 척도를 잡을 수 없다는 결론에 이른다.

이외에도 통약 불가능한 수들은 많다. 자연수와 그 제곱수를 늘어놓을 때

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \cdots \\ 1, & 4, & 9, & 16, & 25, & 36, & \cdots \end{array}$$

제곱 행에 있지 않은 넓이 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 …에 대응하는 변이 없으므로 하나의 넓이가 다른 것의 넓이의 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10…배되는 두 정사각형의 변은 서로 통약 불가능하다.

이와 같이 통약 불가능한 선분의 존재는 피타고라스 학파에게는 기본 가정을 흔들 정도의

매우 도전적인 발견이었으며 수학사상 무리수라는 새로운 수를 도입하도록 한다. 제곱하여 2, 3, 5,…가 되는 수들은 원래 정사각형의 변인 1과 통약 불가능하며, 이 새로운 수를 무리수라 한다. 오늘날의 표기에 따라, $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$이 무리수라는 것은 $\frac{\sqrt{2}}{1}$와 $\frac{\sqrt{3}}{1}$에서 각각이 1과 같은 척도로 측정될 수 없음을 의미하게 되는 것이다.

## 3단계: (심화단계) 정오각형과 관련된 무리수 및 무리수 길이 선분의 작도

이상의 단계를 거쳐 무리수 개념을 도입하였는데, 이 과정 중 첫 번째 사례에서 문제가 되었던 정사각형의 대각선과 한 변의 비는 $\sqrt{2}$임이 분명하지만, 정오각형의 경우에 대각선과 한 변의 비는 얼마인지 모른다. 그에 해당하는 무리수를 구하여보자. <그림 7>에서 정오각형 ABCDE의 5개 대각선을 그으면 내부에 작은 정오각형 VWXYZ가 생긴다. VWXYZ에서 한 변 ZV를 1이라 할 때, 대각선 ZW의 길이가 구하는 비이다. 그 길이를 $x$라 하자.

두 정오각형의 대각선과 변의 비는 같으므로 $\frac{AD}{ED}=\frac{ZW}{ZV}$이다.

그런데 $ED=DY+YZ$ (사례 2에서)

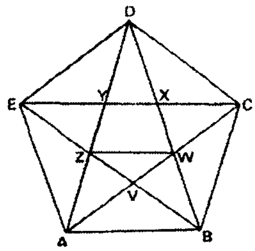
$=AZ+1$ ($\triangle EZA \equiv \triangle EYD$)

$=ZW+1$ ($\angle ZAW=\angle ZWA=36°$)

$=x+1$

이고 $AD=2x+1$이므로,

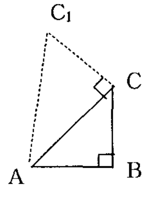
$$\frac{2x+1}{x+1}=\frac{x}{1}$$



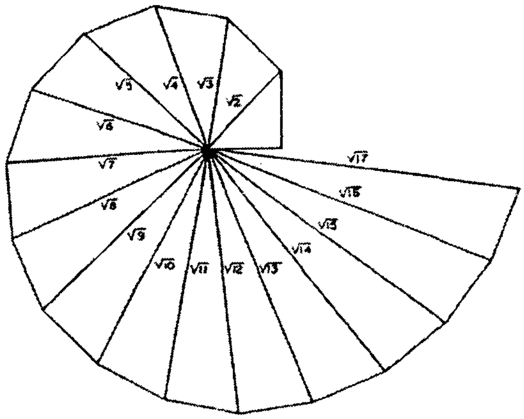
<그림 7>

즉, $x^2-x-1=0$이고, 그 해 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$가 구하는 비이다. 곧, 황금비이다.

다음은, 무리수 길이의 작도 문제이다. $\sqrt{2}$가 한 변이 1인 정사각형의 대각선이라면 $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, …등은 어떻게 작도할 수 있을까? <그림 8>에서 직각이등변삼각형 ABC의 AB를 1이라 하면, AC는 $\sqrt{2}$이고 C로부터 길이 1인 수선 $CC_1$을 그어 $AC_1$을 이으면 $\sqrt{3}$이 된다. 이런 식으로 계속해 나가면 <그림9>와 같이 $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, …등을 작도할 수 있다. 이렇게 그리다보면 $\sqrt{18}$이 처음 삼각형과 겹치게 되는데, 이것은 키레네의 테오도로스(Theodorus of Cyrene, 기원전 390)가 넓이 3, 5, …, 17인 정사각형의 변이 넓이 1인 정사각형의 변과 통약 불가능함을 증명할 때 왜 17에서 멈추었을까하는 의문에 대해 한 가지 가능한 설명이 될 수 있다.



<그림 8>




<그림 9>

## 3. 맺음말

본고는 학교 수학에서 무리수를 도입하는 방법이 학생들로 하여금 무리수의 본질적인 개념을 파악하도록 하는 데 부족하다는 문제 의식에서 출발하여, 그 해결책을 수학사에서 찾고자 한다. 실제로 수학사에서 무리수 개념이 발견되는 것은 공통 척도와 관련한 통약 불가능성의 맥락에서였으며, 따라서 학교 수학에서 무리수를 도입하는데 그러한 아이디어를 포함시킬 것을 제안한다. 이를 위해 수학 교수-학습 원리로서 역사발생적 원리를 옹호한 Clairaut와 Arcavi의 아이디어를 참조하여 구체적인 무리수 도입 방안을 제안한다. 그것은 통약 가능성의 의미를 파악하는 단계, 역사상 등장한 통약 불가능한 선분의 두 가지 사례를 통한 무리수의 도입 단계, 관련 무리수를 구하고 작도하는 단계로 이어진다.

제안된 교수 절차에서 직관적인 비약이나 교사의 도움에 의존하는 단계를 확인할 수 있다. 예를 들어 2단계의 사례 1에서 공통 척도를 찾기 위해 작게 자르는 활동을 몇 번 시도한 후 찾을 수 없다는 결론을 내리는 경우(곧 대수적 증명으로 정당화되기는 하지만), 또는 사례 2에서 정오각형의 한 변과 대각선의 통약 불가능성을 무한 과정에 대한 직관에 의존하는 경우이다. 그리고 제곱근의 근사값에 대한 지도 여부에 따라 다르겠지만 한 변을 100등분, 1000등분…할 때 구하는 제곱이 두 제곱의 사이에 놓이도록 연속하는 두 수(141과 142, 또는 1414와 1415)를 선택하는 것은 학생의 능력 이상일 수 있다. 교사의 도움이 있으면 역시 자연스럽게 진행할 수 있을 것이다. 본고의 제안이 지닌 실험적 미검증의 제한을 극복하기 위해 실제 학교 현장에의 적용을 통한 개선이 추후 과제로 남는다.

# 참고 문헌


1. 변희현, 박선용, "무리수의 개념적 측면을 강조한 교육 방안: '통약 불가능성'을 통한 무리수 고찰," 대한수학교육학회지 학교수학 4(4), 2002, 643-655.
2. 장미화, 수학사를 도입한 수학교육 지도 방법에 대한 연구 -중학교 2학년 중심으로-, 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문, 1983.
3. Arcavi, A., *History of Mathematics as a Component of Mathematics Teachers Background,* Ph.D. thesis: Part II: the learning materials, 1985.
4. Clairaut, A.C., *Elḗments de gḗomḗtrie,* Gauthier-Villars et Cle editeurs, 1746.
5. Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics*, 1953/ 이우영, 신항균(역), 수학사, 경문사, 1995.
6. Struik, D., *A Concise History of Mathematics*, 1948/ 장경윤 외(역), 간추린 수학사, 경문사, 2003.
7. Toeplitz, O., *The Calculus - a genetic approach*, The University of Chicago Press, 1963.