KJHM Vol. 16, No. 4, 2003, 15-32

다항식의 대수적 표현*

숙명여자대학교 수학과 **홍영희**

Abstract

Since algebra before the 19th century was the study of equations and equations are not differentiated from polynomials because of lack of the equality sign, the algebraic symbolism of polynomials plays very important role for the history of algebra. We deal with the evolution of literal notations of polynomials in western and eastern worlds, and then compare their history.

0. 서론

19세기 이전의 대수학이 방정식의 이론임은 잘 알려져 있다. 19세기 이후에 수학의 모든 분야는 대수화가 이루어진다. 대수학은 수의 연산에서 벗어나 비가환 대수, 결합 법칙이 성립하지 않는 대수계의 출현과 방정식의 이론에서 비롯된 군론의 등장, 논리의 대수화와 부분군, 환의 아이디얼의 격자들의 연구로 비롯된 격자론이 이루어지고, 또 해석학은 무한 차원의 선형공간으로 이해되고 기하의 문제도 대수적으로 취급되기 시작한다. 이는 결국 이항연산이 일반화되어 유니버설 대수의 출현으로 이어 진다([2], [3], [13], [24]). 따라서 20세기 수학은 이의 계속으로 구조적 접근이 가능해지고, 1945년 카테고리 이론(Category Theory)이 도입됨으로 수학적 구조가 정확하게 정의되고, 이를 통하여 수학의 구조적 연구가 활발하게 이루어진다([4], [22]).

우리는 일련의 연구를 통하여 대수학의 발전을 구조적 입장에서 취급하여 각 분야에서 그 진화 과정을 알아보았다([24], [25], [26], [27], [28]).

전술한 대로 대수학은 연산 특히 사칙연산을 활용하기 시작하고 또 여러 실생활의 문제를 취급하는 과정에서 방정식의 문제를 다루게 됨으로 대수학으로 학문의 자리를 이루게 된다. 실제로 일차 방정식, 연립 일차 방정식은 실생활과 밀접한 문제를 다루지만 이차 방정식 이

※ 2000 Mathematics Subject Classification - 12-03, 01A17, 01A20, 01A25, 01A45
본 연구는 숙명여자대학교 2003년도 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.

상의 방정식은 반드시 일상 생활의 문제를 다룬다고 할 수만은 없다. 예를 들어 바빌로니아나 중국에서 취급한 이차 방정식은 모두 직사각형과 같은 넓이를 가지는 정사각형의 변의 길이를 구하는 것, 즉 제곱근을 구하는 문제나, 직사각형의 넓이를 알고 두 변의 합이나 차를 알고 두 변의 길이를 구하는 문제로 시작되고 있다. 이는 실생활과 직접 관계 있다고 보기는 어렵고 일종의 초보적인 수학 자체의 범주에 들어간다고 볼 수 있다.

이와 같이 수학이 방정식을 통하여 정립되는데 방정식은 주로 다항방정식(polynomial equations)을 다루고 있고 그 밖의 경우도 결국 다항방정식으로 변환시켜 취급하고 있다. 따라서 방정식의 문제는 우선 다항식의 대수적 표현에 따라 그 발전이 진행될 수밖에 없게 된다. 또 다항식환(rings of polynomials)은 그 자체로 대수학의 가장 중요한 분야 중의 하나이고 또, 해석학에서 가장 중요한 분야인 해석함수로 확장된다.

본 논문에서는 방정식의 발전, 즉 대수학의 발전에서 방정식의 해법도 중요하지만 그 보다 방정식을 이해하는데 먼저 다항식환이 어떻게 발전되었는가에 대한 연구가 우선되어야 한다는 관점에서 다항식의 대수적 표현의 진화 과정을 연구하고자 한다.

첫째 절에서는 바빌로니아의 점토판(clay tablet)에서 취급되기 시작한 방정식의 표현에서부터 디오판토스(Diophantus, 246?~330?)의 다항방정식을 거쳐서 비에트(Viète, 1540~1603), 데카르트(Descartes, 1596~1650)에 의하여 현대와 같은 다항식의 표현이 이루어지는 과정을 조사한다.

둘째 절에서는 중국의 구장산술에서 연립 일차 방정식의 계수행렬을 산대를 이용하여 표시하기 시작하여 李冶와 朱世桀에 의하여 확립된 천원술에서 사원술까지의 진화 과정을 조사하고 이들 동서양의 방정식, 다항식에 대한 발전을 비교한다.

일반적인 대수학의 역사에 대하여 [2], [13], [14], [15]를 참고하고, 중국 수학사에 관하여 [8], [10], [11], [12], [17], [18], [19], [21]을 참고한다.

1. 서양 수학에서 다항식의 표현

Bashmakova와 Smirnova는 대수학의 발전을 다섯 단계로 나누었다. 제1단계는 고대 바빌로니아의 수의 대수학으로 이는 최초의 수학적 지식의 축적기와 일치하고, 제2단계는 기원전 5세기에서 기원전 1세기의 고대 기하학적 대수학으로 수학의 이론적인 추상화의 초보적 단계와 일치하고, 제3단계는 문자를 이용하는 대수학으로 1세기에서 16세기의 단계이고, 제4단계는 방정식론의 대수학으로 17~18세기에 이루어지고 이는 1830년경에 막을 내리고, 그 후 제5단계로 현대 대수학의 기초가 형성되는 1830~1930년경까지의 단계로 나누었다. 후에 그들은 제2단계의 기하학적 대수학은 제1단계 때도 통용되는 것으로 인정할 수밖에 없음을 시인하였다[2].

바빌로니아의 수학부터 논의를 시작하여 보자. 19세기에 수많은 점토판이 출토되고 1930년경 노이게바우어(Neugebauer)에 의하여 이들의 해독이 가능해 짐으로 수학사는 그 시작을 15세기 이상 끌어올릴 수밖에 없게 되었고, 또 바빌로니아의 수학의 정도가 대단히 높고 그 영향은 매우 크다는 사실이 알려지게 된다.

바빌로니아 사람들은 60진법을 사용하여 곱셈표도 9×9가 아니고 59×59가 되어 이를 모두 외운다는 일은 불가능하여 이들을 점토판에 기록하여 수표로 사용하고, 또 나눗셈도 $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$로 계산하고 따라서 수의 역수 $\frac{1}{b}$도 점토판의 수표를 이용하여 찾고 있다. 이 경우에 무한 소수의 경우는 근사값을 이용하고 있는데, 예를 들어 $\frac{1}{13} = \frac{7}{91} \approx 7 \times \frac{1}{90}$으로 계산하고 있다. 물론 $\frac{1}{90}$은 60진법으로는 유한 소수 0.00;40이다. 또 수들의 제곱, 세제곱에 대한 수표도 많은데 이는 $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4} = \frac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2} = ab$를 이용하여 곱셈을 계산하는데 사용하고, 또 n^3+n^2에 대한 수표를 만들어 방정식 $x^3+x^2=c$를 풀었다. 제곱근, 세제곱근에 대한 수표도 많이 발견되고 있는데, $\sqrt{a}$는 Newton 방법인 $\sqrt{a} \approx x_1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ ($n \geq 1$)을 이용하여, 근사값을 구하고 있다. 이와 같이 수의 계산에 대한 광범위한 지식을 그들은 점토판에 남겨 놓고 있다.

한편, 위의 수표로서의 점토판과 달리 많은 분량의 점토판은 방정식을 다루고 있다. 그들은 정방정식(determinate equation)과 부정방정식(indeterminate equation)을 같이 다루고 있다. 방정식을 나타내는데 미지수를 나타내는 문자는 없고, 그들을 길이($=x$), 너비($=y$), 그들의 곱을 넓이($=xy$)로 나타내고 또 미지수가 더 필요한 경우에는 깊이 ($=z$)라는 단어를 사용하여 나타내고 xyz를 부피로 나타내고 있다. 이때 항상 $y < x$를 가정하고 있다. 방정식을 취급하고 있는 점토판은 문제와 그 풀이로 이루어지고 있는데, 미지수, 즉 길이, 너비, 깊이는 주로 수메르(Sumer) 문자를, 문제의 본문은 아카디아(Akkadia) 문자를 사용하여 구별하고 있다. 또 이들 세 미지수와 그들의 곱은 기하학적인 양으로 취급하기보다는 문자로 취급하여 세 미지수와 넓이, 부피들 사이의 연산을 마음대로 시행하고 있다.

바빌로니아의 방정식은 $x \pm y = a,\ xy = b$; $x \pm y = a,\ x^2+y^2=b$; $ax^2 \pm bx = c$의 세 가지 형태와 이들의 변형인 $xy+(x-y)=a,\ x+y=b$; $x^2+y^2=a,\ y=kx+b$들이 취급되고 있다. 이들은 직사각형의 변의 길이의 합 또는 차에 대한 정보를 알고 또 넓이나 대각선의 제곱을 알고 두 변을 구하는 문제로 이는 물론 마지막 일반 이차 방정식 형태에 속하는 것이다. 그 풀이는 모두 기하학적으로 얻어지는 결과를 이용하여 양의 실근을 구하는 것이

다. 즉 $x+y=a$, $xy=b$의 경우 $x+y=a$를 한 변으로, $\frac{a}{2}$를 나머지 한 변으로 하는 직사각형을 정사각형으로 이등분하자. y를 한 변으로 하는 정사각형과 $x-\frac{a}{2}$, y를 변으로 가지는 두 직사각형의 넓이의 합은 x, y를 두 변으로 하는 직사각형의 넓이 $xy=b$와 같으므로, $\frac{a}{2}$를 한 변으로 하는 정사각형에서 이들 사각형들의 넓이를 뺀 정사각형의 한 변이 $x-\frac{a}{2}$가 됨을 이용하여 $x=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$로 풀고 있다.

물론 점토판에는 이 공식을 가지고 방정식을 푸는 것이 아니고 일종의 알고리즘(algorithm)으로 $\frac{a}{2}$를 구하고 이를 두 번 곱하여 b를 빼서 그 제곱근을 구하여 $\frac{a}{2}$을 더하면 구하는 x가 얻어지고, $y=a-x$로 구한다고 되어 있다. 또 다른 해석으로는 $x=\frac{a}{2}+t$, $y=\frac{a}{2}-t$로 놓고 $xy=\left(\frac{a}{2}+t\right)\left(\frac{a}{2}-t\right)=\left(\frac{a}{2}\right)^2-t^2=b$에서 $t=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$를 구하는 것으로 보는데[2], 아마도 전자의 방법을 통하여 구하였을 가능성이 크다고 본다. 이 방법은 후에 디오판토스가 사용한 방법이다[1].

변형인 $xy+(x-y)=a$, $x+y=b$의 경우는 첫째 식에 둘째 식을 더하여 $x(y+2)=a+b$, 또 둘째 식에서 $x+(y+2)=b+2$로 바꾸어 위의 방법을 써서 x, $y+2$를 각각 구하여 x, y를 구하고 있다. 이는 간단한 다항식의 합, 차, 곱과 분배법칙 및 등식에 대한 성질을 바빌로니아 수학자들이 이해하고 있었을 것으로 볼 수 있다. 이들은 직사각형의 넓이를 이용하여 쉽게 이해할 수 있는 내용이다.

한편, 바빌로니아 수학에서 부정방정식으로 그들이 이미 알고 있었던 피타고라스 정리로부터 $x^2+y^2=z^2$과 또 아래 윗변의 길이가 각각 x, y인 사다리꼴의 넓이를 이등분하는 변의 길이를 z이라 할 때 얻어 지는 방정식 $x^2+y^2=2z^2$을 다루고 있다. 후자의 자연수 해를 바빌로니아 삼조(Babylonian triple)라고 부른다. 그들은 $x^2+y^2=z^2$의 해인 피타고리스 삼조(Pythagorean triple) (x, y, z)을 구한 다음 $(x-y, x+y, z)$이 바빌로니아 삼조가 된다는 사실도 알고 있었다.

또 두 복소수 $z=u+iv$, $z'=\alpha+i\beta$에 대하여 $|z|^2|z'|^2=(zz')\overline{(zz')}=(z\overline{z'})\overline{(z\overline{z'})}$를 이용하여 다음 등식을 얻는다($\overline{z}$는 z의 공액복소수 $u-iv$를 나타낸다).

$$(u^2+v^2)(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha u-\beta v)^2+(\alpha v+\beta u)^2=(\alpha u+\beta v)^2+(\alpha v-\beta u)^2 \quad \cdots\cdots(A)$$

만일 (u, v, w)가 바빌로니아 삼조이고 $\alpha^2+\beta^2=1$이면 (A)에서 $(\alpha u-\beta v, \alpha v+\beta u, w)$, $(\alpha u+\beta v, \alpha v-\beta u, w)$도 각각 바빌로니아 삼조가 되고, 특히 $\alpha=\frac{3}{5}$, $\beta=\frac{4}{5}$를 이용하여 무한히 많은 바빌로니아 삼조를 구할 수 있었다. 실제로 위의 등식 (A)를 기하학적으로 증명하는 것은 불가능하였을 것으로 추정되고 일종의 알고리즘으로 이용된 것으로 보아야 할 것이다.

바빌로니아, 이집트 수학이 희랍으로 넘어가 그들은 논리적인 증명을 통하여 명제들을 확인하는 것에 관심을 쓰기 시작하고 이는 경험적인 실생활 수학에서부터 새로운 수학의 기초를 이루게 된다. 무리수의 발견으로 새로운 국면을 맞이하여 기하학이 대수학을 압도하게 되는 시기이기도 하다. 바빌로니아인들과 달리 희랍인들은 수의 곱에 대하여도 두 수의 곱, 즉 넓이, 세 수의 곱인 부피만 생각할 수 있어서 네 수 이상의 곱은 생각하지 않고 있고, 1은 단위수이므로 이를 더 이상 나눌 수 없다고 생각하여 유리수, 즉 분수는 모두 두 수의 비로 이해하고 있다. 또 그들은 방정식 $x+y=a$, $xy=b$, 즉 $x(a-x)=b$를 변의 길이가 각각 a, x인 직사각형에서 x를 한 변으로 하는 정사각형을 뺀 나머지 직사각형의 넓이가 b일 때 x를 구하는 문제로 생각하고, 또 $y-x=a$, $xy=b$, 즉 $x(a+x)=b$는 변의 길이가 각각 a, x인 직사각형에서 x를 한 변으로 하는 정사각형을 더한 직사각형의 넓이가 b일 때 x를 구하는 문제로 생각하여 전자를 타원형 방정식, 후자를 쌍곡선형 방정식이라 불렀다. 이는 각각 모자란다는 뜻의 희랍어 ἔλλειΨις, 또 남는다는 뜻의 ὑπερβολή에서 유래하였다. 또 그들은 $x(a-x)$ $(0\leq x\leq a)$의 최대값을 생각하여, $b\leq\frac{a^2}{4}$일 때 양의 실근을 가지는 것도 알고 있었다.

한편, 3차 방정식의 시작은 a를 한 변으로 하는 정육면체의 부피의 두 배를 부피로 갖는 정육면체의 한 변을 구하는 문제인 $x^3=2a^3$에서부터 밑면은 한 변이 a인 정사각형이고 높이가 b인 직육면체의 부피와 같은 부피의 정육면체의 한 변을 구하는 문제 $x^3=a^2b$를 취급하고 있는데, 특히 후자에 대하여 기원전 5세기 후반기에 히포크라테스(Hippocrates, 450? B.C.)는 이를 비의 문제 $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$로 이해하고, 또 이는 연립방정식 $ay=x^2$, $xy=ab$의 해로 되는데 이들은 물론 포물선, 쌍곡선으로 원추곡선의 연구에 대한 효시가 되었다. 기원전 3세기에 아폴로니오스(Apollonius, 260~200 B.C.)는 포물선, 타원, 쌍곡선의 식이 각각 다음과 같음을 밝혀내었다.

$$y^2=2px, \quad \frac{y^2}{x(2a-x)}=\frac{p}{2a}, \quad \frac{y^2}{x(x+2a)}=\frac{p}{2a}$$

그리고 위의 타원형, 쌍곡선형 방정식에서 나온 이름과 같이 포물선, 타원, 쌍곡선으로 명명하였다. 또 아르키메데스(Archimedes, 287~212 B.C.)는 반지름이 R인 구를 평면으로 잘라 두 부분의 부피의 비가 $m : n\ (m > n)$일 때 큰 쪽의 높이 x를 구하기 위하여 비례식 $4R^3 : x^2 = (3R-x) : \frac{m}{m+n}$ 을 일반화하여 비례식 $(a-x) : c = S : x^2$을 통하여 삼차방정식을 다루는데, 이를 위하여 그는 $S = pb$로 놓고 포물선 $y = \frac{x^2}{p}$, 쌍곡선 $y = \frac{bc}{a-x}$ 를 생각하여 삼차방정식 $x^2(a-x) = cS$를 푸는 문제로 바꾸었다. 이렇게 함으로 양의 해가 존재하기 위한 조건 $cS \le \max x^2(a-x)\ (0 \le x \le a)$를 얻어낸다. 이 방법은 소실되었다가 6세기에 유토시우스(Eutocius)에 의하여 재발견되었다. 실제로 위의 최대값은 $x = \frac{2a}{3}$에서 얻어 지는 것을 아르키메데스는 밝혀 내고 따라서 $cS < \frac{4a^3}{27}$일 때 두 실근을 가지게 되고, $cS = \frac{4a^3}{27}$ 일 때 중근을 가지게 된다. 이들은 위의 두 곡선의 교점을 통하여 얻어 지는 결과이다.

희랍 수학자들도 피타고리스 삼조를 찾는 부정방정식 $x^2 + y^2 = z^2$과 후에 펠-페르마(Pell-Fermat) 방정식으로 알려져 있는 부정방정식 $y^2 - ax^2 = \pm 1$을 다루고 있다. 피타고리스 삼조의 해로 $\left(a, \frac{a^2-1}{2}, \frac{a^2+1}{2}\right)$, $\left(a, \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1, \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1\right)$ 등을 알고 있었으며, 유클리드 (Euclid, 330~275 B.C.)의 기하학 원론에 일반해 $(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$이 주어져 있다. 한편, 펠-페르마 방정식에서 $a = 2$인 경우, 즉 $y^2 - 2x^2 = \pm 1$에서 양변을 x^2으로 나누면 $\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2 = \pm \frac{1}{x^2}$이 되어 $x \to \infty$일 때 $\frac{y}{x} \to \sqrt{2}$로 되는데, 이 때 $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$, $y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}$, $x_0 = y_0 = 1$이 모두 해가 됨을 이용하여 $\frac{y_n}{x_n}$을 귀납적으로 계산하여 $\sqrt{2}$의 근사값을 계산하고 있다. 특히 $\frac{y_n}{x_n} = a_n$이라 놓으면 이들은 $a_n = 1 + \frac{1}{1 + a_{n-1}}$을 만족한다. 또 같은 방법으로 $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$, $y_n = 3x_{n-1} + y_{n-1}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$이라 하면 위의 a_n은 $a_n = 1 + \frac{2}{1 + a_{n-1}}$를 만족하고, 따라서 $a_n \to \sqrt{3}$을 이용하여 $\sqrt{3}$을 계산하기도 하였다. 아르키메데스는 이유는 밝히지 않은 채 $\frac{y_7}{x_7} = \frac{263}{153}$을 $\sqrt{3}$의 근사값으로 사용하였다.

희랍의 수학은 로마 제국이 주위의 모든 국가를 통일하는 기원전 1세기경에 거의 발전이 멈추게 된다. 그 후 2세기경부터 다시 수학이 발전하기 시작하는데 이때부터 희랍의 기하 위주의 수학에서 대수학 위주로 바뀌게 된다. 프톨레마이오스(Ptolemy, 150?)는 그의 저서

알마게스트(Almagest)에서 비례로 이해하였던 유리수의 연산을 현재와 같이 시행하여 양의 유리수를 완전히 대수적으로 정리하였다. 그 후 디오판토스가 그의 저서 산학(Arithmetica)에서 음의 유리수에 대한 연산까지 정의함으로 유리수체가 완전히 정립되었다. 실제로 그는 음수를 모자라는 것(λεἰΨις)으로 이해하고 모든 유리수의 곱을 정의하고, 덧셈과 뺄셈은 정의하지 않은 채 사용하고 있다. 그러나 음수는 방정식의 풀이 과정에서만 사용되고 실제로 문제나 답에서는 양의 유리수만 취급하고 있다. 디오판토스의 방정식론은 다른 기회에 논하기로 하고 이 논문에서는 그가 택한 다항식, 방정식의 표현에 국한하여 논하기로 한다.

디오판토스는 문자를 사용한 최초의 사람으로 알려져 있다. 그는 미지수를 하나의 수 (ἀριθμός)라 부르고 이를 기호 ς로 나타내었다. 이 기호는 2세기경의 파피루스에도 나타나고 또 헤론(Heron)의 기하학(Geometrika)에도 나타나 있는 것으로 보아 이미 많이 사용되었을 것으로 추정되지만 디오판토스는 ς(= x)뿐만 아니라, x^2, x^3, ⋯, x^6과 그의 음수멱까지 기호로 나타내고 또 음수를 계수로 가지는 것도 처리 할 수 있는 기호를 도입함으로 최초의 다항식의 대수적 표현을 시도하고 이를 이용하여 방정식론을 정리하여 대수학을 시작한 사람이 되었다. 물론 현재의 지수 기호를 사용한 것이 아니고 각각 다음과 같이 표현하였다.

$$x : ς \;; \quad x^2 : \varDelta^{\upsilon} \;; \quad x^3 : K^{\upsilon} \;; \quad x^4 : \varDelta^{\upsilon}\varDelta \;; \quad x^5 : \varDelta K^{\upsilon} \;; \quad x^6 : K^{\upsilon}K$$

또 음수 지수는 위의 지수 부분에 χ를 더하여, 예를 들면 x^{-2}은 $\varDelta^{\upsilon}\chi$로 나타내었다. 이들은 멱(force, power)이라는 단어 Δύναμις에서 $\varDelta^{\upsilon}$, 세제곱, 즉 정육면체(cube)인 Κύβος에서 K^{υ}, 제곱 제곱의 Δύναμοδύναμις에서 $\varDelta^{\upsilon}\varDelta$, 제곱 세제곱의 Δύναμοχύβος에서 $\varDelta K^{\upsilon}$, 세제곱 세제곱인 Κύβοχύβος에서 $K^{\upsilon}K$를 각각 그 기호로 택하였는데 제곱, 세제곱의 경우는 각 단어에서 두 문자를 택하고, 제곱 제곱, 세제곱 세제곱에서는 같은 단어가 반복되는데 뒤 단어에서는 한 문자만 택하여 나타내고, 제곱 세제곱의 경우는 뒤 단어에서 두 문자를 택하고 있다. 또 특이한 것은 계수를 문자 뒤에 첨부하여 나타내고, 또 덧셈 기호 +는 아직 도입되지 않았으므로 각 항을 모두 차례로 늘어놓는데 그 항을 문자로 시작하므로, 상수항도 앞의 항의 계수와 이어지므로 이를 구분하기 위하여 상수항을 나타내기 위하여 x^0을 도입할 수밖에 없어서 단위라는 뜻의 단어 Μόνάς에서 $\overset{o}{M}$를 사용하여 다항식의 현재의 표현에서 상수항 c를 $\overset{o}{M}c$ 형태로 나타내고 또 등호 기호는 ἴσ를 사용하였다.

희랍인들은 수를 그들의 알파벳 위에 막대를 그어 나타내었다. 즉 처음 9개의 문자 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, ⋯, $\overline{\theta}$는 1, 2, ⋯, 8, 9를 나타내고(ε과 ζ 사이에 고문자 digamma ς가 있음), 다음 9개의 문자 $\overline{\iota}$, $\overline{\chi}$, ⋯, $\overline{\pi}$, $\overline{ϙ}$가 10, 20, ⋯, 80, 90을 나타내고(ϙ는 고문자 koppa임), 그리고 마지막 9개의 문자 $\overline{\rho}$, $\overline{\sigma}$, ⋯, $\overline{\omega}$, $\overline{ϡ}$가 100, 200, ⋯, 900을 나타낸다(ϡ는 고문자 san임). 따라

서 865는 $\overline{\omega\xi\varepsilon}$로 된다(1000자리 이상의 수의 표현에 대한 자세한 내용은 [6]을 참조). 한편 음의 계수를 가지는 항은 모두 모아 그 앞에 Ψ를 뒤집어 놓은 ⫛를 써서 나타냄으로 6차 이하의 방정식을 나타낼 수 있게 된다. 예를 들면 현재의 방정식 $x^3-2x^2+10x-1=5$은 다음과 같이 된다.

$$K^{\upsilon}\,\overline{\alpha}\,\varsigma\,\overline{\iota}\;⫛\;\Delta^{\upsilon}\,\overline{\beta}\,\overset{o}{M}\,\overline{\alpha}\,\text{ϊσ}\,\overset{o}{M}\,\overline{\varepsilon}$$

고대 수학의 특징은 항상 같은 종류의 문제를 여러 개 푸는 과정으로 일반적인 법칙을 나타내고 있는데, 디오판토스도 이 범주를 넘지 못하여, 계수를 문자화하는 일반적인 다항식은 취급하고 있지 않다. 그러나 그는 다음과 같은 지수법칙을 들어 놓고, 이를 이용하여 다항식의 계산을 할 수 있었다.

$$x^m x^n = x^{m+n},\quad 1\times x^m = x^m,\quad x^m x^{-m} = 1\quad (-6 \le m,\ n \le 6)$$

고대 희랍인들의 기하적인 대수의 생각에서 전술한대로 네 수 이상의 곱은 생각도 하지 않았었다. 디오판토스는 정방정식은 1차와 2차 방정식만 취급하였지만 그의 부정방정식을 풀면서 6제곱까지 생각하고 또 그들의 역수도 생각하게 되어 기하적인 대수에서 해방될 수 있게 되었다.

또, 그는 등식에 대한 성질 $A=B$이면 $A+C=B+C$가 되어 이항을 하면 그 부호가 바뀌는 것과 $A+C=B+C$일 때 $A=B$, 즉 같은 항을 소거할 수 있음을 사용하고 있다. 이는 후에 알콰리즈미(al-Khwarizmi)의 책의 제목인 al-jabr(=completion)와 al-muqābalah (=contrapositive)로 나타나 후에 algebra의 어원이 된다.

잘 알려져 있듯이 디오판토스는 부정방정식을 취급하였는데 미지수에 대한 문자는 한 개 밖에 없다는 것은 매우 중요한 약점이 되었다. 실제로 이 문제를 해결하기 위하여 한 미지수는 한 문자를 사용하여 나타내고 다른 미지수를 이 문자의 유리식으로 치환하여 일원 방정식으로 바꾸어 문제를 해결하고 있다. 예를 들어 부정방정식 $x^2+y^2=16$에서 $x=t$, $y=2t-4$로 놓아, 방정식 $t^2+(2t-4)^2=16$에서 $x=t=\frac{16}{5}$, $y=\frac{12}{5}$를 얻어내는 과정을 사용하고 있다[1].

디오판토스와 동시대의 인물인 라디케아의 아나톨리우스(Anatolius of Ladicea)도 x^4까지는 디오판토스와 같은 기호를 나타내고, 그 나머지는 지수에 대한 가법 법칙을 사용하지 않고 승법 법칙을 사용하여 미지수의 멱들을 나타내었다. 즉 제곱 세제곱의 Δύναμοxύβος에서 ΔK^{υ}은 x^6, 세제곱 세제곱인 Kύβοxύβος에서 $K^{\upsilon}K$은 x^9을 나타내고 소수인 5, 7에 대한

x^5, x^7은 각각 첫 번째, 두 번째 표현할 수 없는 것, 즉 ἀλογοςπρωτος, ἀλογοςδεύτερος로 나타내었다. 이와 같은 승법 법칙을 이용한 지수 표현은 15~16세기 유럽에서도 일반적으로 사용되었다.

디오판토스 이후에 모든 고전적인 학문은 급격히 쇠퇴하게 되고 7세기에 시작된 이슬람 문화권에서 다시 수학은 발전하기 시작한다. 9세기에 유클리드의 기하학 원본, 프톨레마이오스의 알마게스트, 디오판토스의 산학이 아랍어로 번역되고 그 밖의 고전들도 함께 번역된다. 전술한 대로 830년에 알콰리즈미는 Al-jabr w'al-muqābalah를 출판하고 이 책에서 2차 방정식을 6가지로 분류한다. 특이한 점은 1차 방정식도 6가지 중의 하나로 분류하고 있다. 그러나 그는 디오판토스와 달리 문자를 사용하지 않고, x^0을 "dihrem"(=수), 미지수 x를 "jizr"(=근) 또는 "shai"(=물건), x^2을 "mal"(=재산, 금액, 제곱)로 나타내어 다시 문장으로 다항식을 나타내고 있다. 또 후에 그의 저서 Dixit Algorithm이 라틴어로 번역되어 출판되었는데 이 책에서 인도에서 전래된 10진법을 소개하고 있다. Algorithm은 그의 이름의 라틴어 번역이고, 이는 현재도 algorithm으로 사용되고 있다.

그 후 10세기에 들어오면서 아랍 수학자들은 다시 디오판토스의 이론을 받아들인다. 아부 카밀(Abu Kamil, 850?~930?, 그는 Hasib al Misri, 즉 이집트의 계산가로도 알려져 있다)은 그의 저서 Book of Algebra and Almucabala에서 알콰리즈미의 제곱항보다 더 나아가서 x^3을 "kab"(=세제곱), x^4을 "mal al-mal", x^5을 "mal mal shai", x^6을 "kab al kab", x^8을 "mal mal mal al-mal"로 나타내고 이는 디오판토스가 나타내는 방법과 일치하고, 또 새로 x^8까지 확장하였다. 또 al-Karaji (?~1016)는 그의 저서 Al-Fakhri에서 미지수 x에 대하여 $x^n(n\in\mathbb{Z})$을 도입한다. 그도 문자를 사용하지 않고 비례식으로 다음을 무한히 계속할 수 있다고 함으로 임의의 x^n을 도입한다. 즉, 다음과 같이 나타내면서 임의의 x^n을 도입한다.

$$x : x^2 = x^2 : x^3 = x^3 : x^4 = \cdots, \qquad x^{-1} : x^{-2} = x^{-2} : x^{-3} = x^{-3} : x^{-4} = \cdots$$

또, 그는 다음과 같은 지수 법칙들을 사용하고 있다.

$$x^{-m} : x^{-n} = x^{n-m}\ ; \qquad x^{-m}x^{-n} = x^{-(n+m)}\ ; \qquad \frac{1}{x^m}x^n = x^{n-m}\ \ (n>m)$$

또 다항식의 계수는 음수도 포함하고 있고 동류항의 뺄셈에서 다음을 포함하고 있어서 음수의 연산을 완전히 이해하고 있다.

$$ax^m - bx^m = (a-b)x^m\ \ (a>b), \qquad ax^m - bx^m = -(b-a)x^m\ \ (a<b),$$

$$ax^m - (-bx^m) = (a+b)x^m$$

이들은 지수를 개념적으로는 완전히 확장하였으나 기호를 사용하지 않고 있어서 대단히 불편한 채 이들을 사용하고 있고 따라서 방정식의 일반론은 취급하기가 어려웠다. 또 11세기 콘스탄티노플의 수학자 Psellus는 미지수 x에 대하여 x, x^2, x^3, …을 첫째 수, 둘째 수, 셋째 수, … 등으로 나타내었다.

13세기 이전까지의 유럽에서는 피보나치(Fibonacci)로 더 잘 알려져 있는 피사노(Leonardo Pisano, 1174?~1250)만이 방정식론에 대한 업적을 남기고 있다. 그는 monic인 정수 계수 다항방정식이 정수해를 갖지 않으면 유리수해도 갖지 않음을 보이고, 그밖에 부정방정식에 대한 그의 독창적인 업적을 남겼다. 그는 근으로 radix, 미지수를 res(=물건), 제곱을 census로 나타내었는데 이는 모두 아랍어의 번역이다. 제곱 제곱, 즉 네 제곱은 censo di censo로 나타내었다.

12세기부터 아랍 수학자들은 미지수의 제곱들을 나타내는데 그 단어의 첫 글자만 사용하여 나타내기 시작한다. 그런데 이들의 라틴어 번역은 각각 cosa(=x), censo(=x^2), cubo(=x^3)이므로 첫 자가 모두 같아 두 자를 택하여 co, ce, cu로 나타낼 수밖에 없었다. 1384년에 Gilio는 그의 저서 Questioni d'Algebra에서 이 기호를 사용하였고, 또 x^4을 ce.ce로 근호 radice의 첫 자 R을 사용하여 제곱근을 나타내었다. 또 1494년 파치올리(Pacioli)는 그의 저서 Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita에서 미지수의 29제곱까지 나타내고 그 역시 승법 법칙을 이용하여 제곱들을 나타내고 있다. 즉 numero(=수)에서 x^0을 n^0으로, 그 다음 네 제곱까지는 위의 Gilio와 같고, x^5을 첫 번째 표현할 수 없는 것 (=primo relato)으로 p^0r^0, x^6을 ce.co, x^7을 두 번째 표현할 수 없는 것으로 2^0r^0, x^8을 ce.ce.ce, x^9은 cu.cu., x^{10}은 ce.p^0r^0 (2×5), … 등으로 나타내었다. 그는 또 다른 미지수를 $q.p^0$, 그 제곱을 ce.di.$q.p^0$로 나타내고 있다. 한편, Gori는 1544년에 그의 저서 Libro et trattato della praticha d'alcibra에서 Gilio 와 같은 승법 법칙을 써서 미지수의 멱들을 나타내었는데 소수의 경우 표현할 수 없는 것들 대신에 R을 1로 보아 예를 들어 5=2×2+1에서 x^5을 ce.ce.R, x^7을 ce.cu.R, x^{10}을 cu.cu.R, x^{11}을 cu.cu.R.R 등으로 나타내어 이들을 피하였다. 이때는 승법 법칙과 가법 법칙을 함께 사용하고 있다. 미지수의 제곱들의 표현 방법은 이탈리아에서 독일로 전파되는데 Adam(1489~1559)은 1525년에 그의 저서에서 res, zensus, cubus의 첫 글자의 고딕 문자 $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{c}$를 이용하여 x^0을 $\varnothing$, x를 $\mathfrak{r}$, x^2을 $\mathfrak{z}$, x^3을 $\mathfrak{c}$로 나타내고 승법 법칙을 써서 지수를 나타내고, 소수 부분은 차례로 x^5을 β, x^7을 $bi\beta$ 등으로 나타내었다. 또 Stifel(1487~1567)은 그의 저서 Arithmetica integra(1544)에서 미지수들을 모두 A, B, C, …으로 나타내고 그의 제곱들을 AA, AAA, …으로 나타내어 이 표현은 통일된 방법으로 독일, 이탈리아의 많은 수학자들이 따르게 되었다.

또 슈케(Chuquet, ?~1500?)는 미지수의 지수를 그 계수의 지수로, 즉 $12x^3$은 12^3으로 나타내어 계산하고 있는데 이와 비슷한 방법으로는 봄벨리(Bombelli, 1526?~1573)와 스테빈(Stevin, 1548~1620)이 도입한 것이 있는데 전자는 그의 저서 대수학(L'Algebra, 1572)에서 미지수를 1 아래에 ⌣기호를 붙여 나타내고 그 제곱들을 각각 그 지수의 아래에 ⌣를 붙여 나타내고, 또 음수의 연산과 복소수를 도입하였다. 봄벨리는 디오판토스의 문제들을 재정리하고 대수학을 다시 한 단계 끌어올린 사람이다. 스테빈은 미지수를 ①로, 그 제곱들을 ②, ③, …으로 나타내고 또 다른 미지수들은 sec., ter., … 등을 ①, ②, ③, …의 앞에 붙여서 나타내었다.

현재의 기호 $+, -$는 독일인 비트만(Widman)의 저서 Behend und hübsch Rechnung für allen Kaufmannschaften(1489)에 처음 나온다. 또 위의 스테빈은 $+$를 $\tilde{p}$, $-$를 $\widetilde{m}$으로 나타내었는데 이는 piu(=plus), meno(=minus)의 첫 문자들이다.

현재의 계수까지 문자를 이용한 다항식의 표현의 시작은 비에트(Viète, 1540~1603)에 의하여 이루어졌다. 그는 $(x+y)^n$($n\le 5$)의 전개식, x^n+y^n($n=3,5$), x^n-y^n($n\le 5$)의 인수분해 공식, 드 무아브르(de Moivre) 공식으로 알려져 있는 공식, 5차 이하의 다항방정식의 근과 계수와의 관계 등 중요한 대수적 이론을 정립한 사람으로 잘 알려져 있다. 비에트는 고대 희랍인들의 생각을 좇아 수를 길이, 즉 일차원 양으로, 그 곱을 이차원 양으로, . . .와 같이 구별하고 같은 종류들 사이에만 덧셈 뺄셈을 할 수 있다고 생각하였다. 곱셈과 나눗셈은 다른 차원의 것들도 연산이 가능하고, 지수의 법칙에 따라, 곱셈에 의하여 그 차원은 증가하고, 큰 차원의 수를 낮은 차원의 수로 나눌 수 있고 그 차원은 감소하는 것으로 생각하였다. 이는 후에 데카르트(Descartes, 1596~1650)에 의하여 완전히 현재의 연산으로 다시 정리된다. 다항식의 표현을 위하여 비에트는 미지수는 모음 A, E, I, O, …, 기지수는 자음 B, C, D , …를 사용하여 나타내고 그 차수를 그 뒤에 plan. quad. (2차), solid, cub. (3차), plano-planum, quadrato-quadratum (4차), … 등을 써서 나타내고, 덧셈, 뺄셈은 $+, -$로, 곱셈과 나눗셈은 각각 두 수 사이에 in, applicare를 넣어 나타내었다. 한 가지 특이한 것은 등호는 두 수의 차이의 절대값, 즉 $B=C$는 $|B-C|$를 나타내는 것이었다. 드 무아브르 법칙을 직각을 낀 두 변의 길이가 u, v와 α, β인 두 직삼각형에 대하여 앞의 등식 (A)를 만족하는 두 개의 직삼각형을 얻어내는 것을 연산으로 보아 얻어내고 있다. 이를 이용하여 방정식을 풀고 이는 그의 제자 Gizzard(1595~1632)에 의하여 일반화되었다.

앞에서도 언급하였듯이 비에트의 연산과 다항식의 표현은 데카르트에 의하여 완전히 현재의 방법으로 정립된다. 특히 그는 방정식을 $p(x)=0$의 형태로 놓고 또 a가 방정식의 해이면 $p(x)$는 $x-a$로 나누어 떨어지고, n차 다항방정식의 $n-1$차 항을 항상 소거할 수 있고, 또 이들은 n개의 해를 가짐을 보였다.

2. 동양수학에서 다항식 표현

중국 수학도 서양 수학과 마찬가지로 귀납적으로 동일한 종류의 문제를 취급하는 과정에서 법칙을 드러내고 또 그것을 표현할 필요도 갖지 않고 있다. 따라서 그들 법칙에 대한 증명도 기하적인 도형을 통하여 드러내고, 일반적인 문제를 취급하지 않고 있다. 그러나 근본적으로 구체적인 경우에서 개념화하는 과정과 그 반대의 경우를 모두 생각하여야 한다는 생각은 초기부터 하였다. 예를 들어 **주비산경**의 陳子와 榮方의 대화(陳子曰思之未熟, 此亦望遠起高之術而子不能得則子之於數未能**通類**, 是智有所不及而神有所窮, 夫道術言約而用博者**智類之明**, **問一類而萬事達者謂之知道**, 今子所學, 算數之術是用智矣而尙有所難是子之智類單, 夫道術所以難通者旣學矣患其不博, 旣博矣患其不習, 旣習矣患其不能知, 故**同術相學**, **同事相觀**, 此列士之愚智, 賢不肖之所分, **是故能類以合類此賢者業精習智之質也**, 夫學同業而不能入神者此不肖無智而業不能精習, 是故算不能精習吾豈以道隱子哉固復熟思之. p. 176-177, [5], [19])나 **九章算術**의 劉徽의 서문(**事類相推 各有攸歸** 故枝條雖分而同本幹者之 **發其一端而已**, …, **觸類而長之** 則雖幽遐詭伏 靡所不入 [7], [16], [19], [23])과 그의 주석에서 수학에 대한 이러한 생각이 잘 나타나 있다.

서양 수학이 유클리드의 기하학 원본에 그 기본을 두고 발전한 것과 같이 중국 수학은 **九章算術**에 그 근원을 두고 발전하였다. 또 다른 특징은 그들은 수를 나타내는 문자가 있었음에도 실제로 그 계산과 표현은 산대를 가지고 하였다는 점이다(산대에 대한 자세한 내용은 [6], [7], [8] 등을 참조).

그들은 희랍 수학과 달리 비례를 통하지 않고 바로 분수를 통하여 유리수를 취급하고 현재 우리가 사용하고 있는 양의 유리수의 연산을 할 수 있었다. 무리수에 대한 개념은 없었고, 그러나 이들은 얼마든지 좋은 근사값을 계산 할 수 있지만 계산은 하지 않는다고 말하고 있다([7], [16], [19]). 상당히 많은 부분에서 중국 수학은 희랍 수학보다 바빌로니아 수학과 더 가까운 편이다. 바빌로니아 수학에서 제곱근은 전술한 대로 뉴턴의 방법을 써서 귀납적으로 근사값을 구하였는데 중국 수학에서는 제곱근이나 세제곱근도 현재 우리가 쓰고 있는 방법과 같은 알고리즘을 써서 계산하고 있다. 이들이 모두 **九章算術**에 나와 있다([7], [16]). 또, 실생활과 밀접한 문제들을 취급하고 있기 때문에 도형의 넓이나 부피에 대한 연구가 매우 깊고 폭 넓게 이루어졌다. 아르키메데스와 같은 극한에 대한 초보적인 개념도 사용하고 있다.

중국 수학에서 방정식과 다항식의 표현에 대하여 알아보자. 앞에서 언급한 대로 그들은 산대를 썼기 때문에 수의 자리수는 산대를 차례로 늘어놓는 것에 따라 구별되기 때문에 수 $a_n10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 (0 \le a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \le 9)$은 차례로 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$을 늘어놓기만 하면 된다. 초기에는 0이 없었으므로 그 자리는 비워 두고 나타내었

다. 이와 같이 방정식도 미지수의 제곱들은 상관하지 않고 그 계수만 차례로 늘어놓는 방법이 가능하였을 것이다. 물론 처음부터 고차 방정식은 생각을 못하였고 연립 일차 방정식을 주로 취급하는데 이도 먼저 盈不足術이라고 불리는 것을 통하여 이원 일차 연립 방정식을 먼저 취급한다. 그러나 이는 연립 방정식으로 취급하기보다는 다음과 같은 원리를 통하여 문제를 해결하는 것을 뜻한다. 즉 연립 방정식 $a_1x+y=c_1$, $a_2x+y=c_2$를 x, y를 계수 a, b로 하는 일반 일차 방정식 $ax+b=c$로 대치하여, $x=a_1$로 가정하였을 때 그 오차가 c_1이면 $aa_1+b=c+c_1$이고(여기서 위의 y는 $b-c$로 보면 된다), $x=a_2$로 가정하였을 때 그 오차가 c_2이면 $aa_2+b=c+c_2$이다. 따라서 $a=\dfrac{c_1-c_2}{a_1-a_2}$, $c-b=\dfrac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1-a_2}$이므로 다음을 얻는다.

$$x=\frac{c-b}{a}=\frac{a_2c_1-a_1c_2}{c_1-c_2}$$

이는 서양 수학에서 이중가정법(Rule of Double False Position)으로 알려져 있다. **九章算術**에서는 위의 a를 구하는 방법을 영부족술이라 하고 $c-b$와 x를 구하는 방법을 영부족일술(其一術)이라 하였다.

일반적인 연립 일차 방정식은 **九章算術**의 제 7 장 盈不足의 다음 제 8 장 方程에서 다루고 있는데 현재의 연립 일차 방정식의 계수 행렬을 사용하여 나타내고 또 가우스-조르단(Gauss-Jordan) 소거법을 시행하여 삼각 행렬로 바꾸어 풀고 있다. 현재와 다른 점은 각 방정식을 오른쪽부터 차례로 그 계수를 列로 나타내고 있다. 이는 고대 중국 사람들이 좁은 죽간에 붓으로 쓴 책을 이용하고 있다는 것을 생각하면 이해가 된다. 이 방법으로 미지수를 나타내지 않고도 방정식을 풀 수 있게 된다. 이 장에서 취급하고 있는 연립 방정식은 2원, 3원, 4원, 5원 연립방정식이 각각 8, 6, 2, 1개씩 들어 있고 또 6개의 미지수에 대한 5개의 방정식으로 이루어져 있는 부정방정식을 한 개 취급하고 있다. 또 소거법에서 생기는 음수와 그들 사이의 덧셈과 뺄셈이 자연적으로 나오게 되어 이들에 대한 법칙, 즉 正負術을 포함하고 있다.

초기 2차 이상의 방정식은 기하의 문제를 통하여 먼저 제곱근과 세제곱근을 푸는 문제, 즉 $x^2=a$, $x^3=a$(a는 양수)의 양수해를 구하는 문제에서 시작하였다. 그러나 **九章算術**의 마지막인 제 9 장에서 句股, 즉 피타고라스(Pythagoras) 정리를 취급하면서 나오는 문제로 제 20 번에 처음으로 일차항이 있는 방정식 $x^2+34x=7100$을 취급하고 있는데 이 때 일차항의 계수 34를 從法이라는 단어를 사용하여 나타내고 답 250을 얻었지만 그 풀이 과정은 제곱근을 푸는 방법으로 풀었다고 하고 자세한 내용은 들어 있지 않다. 그 후 5세기 중엽에 쓰여졌을 것으로 추정되는 **張丘建算經**에는 두 문제의 이차 방정식이 들어 있다. 하나는 유

리수 계수를 가지는 방정식으로 이는 중편의 마지막 문제인데 "상수항을 實, 그 다음 일차항(?)을 從"이라 하는 데까지 있고 그 후는 소실된 채 출판되고 있다. 이 경우도 그 풀이 과정을 알 수 없다[19].

일반 삼차 방정식은 王孝通의 緝古算經(7세기 초의 책)에 28개의 삼차 방정식을 다루고 있는데 그는 상수항을 實, 일차항의 계수를 方法, 이차항의 계수를 廉法으로 나타내었다. 그의 방정식은 모두 monic, 즉 삼차항의 계수는 1인데 이를 隅라 하였다. 즉 삼차 방정식 $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x = a_0$을 隅는 a_3, 廉法은 a_2, 方法은 a_1, 實은 a_0와 같이 나타내었다. 그 역시 풀이는 세제곱근을 푸는 방법에 따라서 (從開立方除之) 푼다고 하고 그 자세한 내용은 없다[19, p. 331]. 그 후 이러한 방법은 음의 지수까지 확장되어 사용되는데 특히 劉汝諧는 그의 저서 如積釋鎖(1170)에서 상수항부터 차례로 人, 天, 上, 高, 層, 壘, 漢, 霄, 明, 仙을 써서 9차항까지 나타내고 또 −1차항부터 −9차항까지를 地, 下, 低, 減, 落, 逝, 泉, 暗, 鬼를 써서 나타내었다. 또 이와 같은 방법으로 秦九韶(1127 - 1279)는 그의 저서 數書九章(1247)에서 이차, 삼차, 사차식의 계수를 상수항부터 차례로 實, 方, 隅; 實, 方, 廉, 隅; 實, 方, 上廉, 下廉, 隅로 나타내고, 십차식의 계수는 實, 方, 上廉, 次廉, 才廉, 維廉, 行廉, 爻廉, 星廉, 下廉, 隅로 나타내었고, 주세걸은 14차 방정식까지 다루고 있는데, 상수항은 實, 일차항은 方, 이차항은 上廉, 삼차항은 二廉, …, 십삼차항은 十二廉, 그리고 최고차항(=14차항)은 隅로 나타내었다. 또 최고차항 바로 아래차항 (이 경우 13차항)은 下廉으로 나타내기도 한다. 상수항과 최고차항의 부호는 正(=+), 益(=−)으로 나타내고, 그 나머지 항은 從(=+), 益(=−)을 앞에 붙여서 나타내고 있다. 이는 현재 쓰고 있는 차수보다 하나 작은 수로 나타낸 것만 다르고 매우 효과적인 방법임을 알 수 있다.

수의 산대 표시와 같이 자리수를 표시하는 방법은 天元術, 즉 미지수를 천원이라 하고 상수항을 처음에는 人으로 하다가 나중에 太라하고 그 자리를 기준으로 아래 혹은 위로 차례로 1차항의 계수, 2차항의 계수, …를 적고, 그 반대로 차례로 −1차항의 계수, −2차항의 계수, …를 써서 나타내었다. 元裕는 如積釋鎖細草(1190?)에서 아래에서 위로, 彭澤(1230?)은 위에서 아래로 쓰는 방법을 사용하고 있었는데, 李冶(=李治)는 그의 저서 測圓海鏡(1248)에서는 아래에서 위로, 또 益古演段(1259)에서는 위에서 아래로 쓰는 방법을 쓰고 있다. 그 후에는 위에서 아래로 쓰는 방법이 일반으로 사용되었다. 천원술의 역사는 중국의 많은 산학서들이 소실되어 자세한 내용을 알 수 없지만 朱世桀의 四元玉鑑(1303)에 祖頤가 쓴 서문에 다음과 같이 쓰고 있는데 인용된 책들이 모두 소실되어 그 자세한 내용은 알 수 없다. "平陽의 蔣周는 益古(1080?)를, 博陸의 李文一은 照胆을, 鹿泉의 石信道는 鈐經을, 平水의 劉汝諧는 如積釋鎖를 저술하고 이에 대하여 絳의 사람 元裕는 細草를 달아 주어, 후세 사람들은 천원술에 대하여 알게 되었다."(厥後平陽蔣周撰益古, 博陸李文一撰照胆, 鹿泉石信道撰鈐經, 平水劉如諧撰如積釋鎖, 絳人元裕之細草, 後人始知有天元也). 따라서 한 개의 미지수에 대한 방정식 즉 다항식의 표현은 적어도 12세기에 이미 사용되고 있다고 보아야 할 것이다. 두 개 이상의 미지수를 가지는 방정식의 표현에 대하여 祖頤는 위의 사원옥감의 서문에 위의

인용된 문장에 이어 다음과 같이 소개하고 있다. "平陽의 李德載는 兩儀羣英集臻을 저술하였는데, 미지수 地元을 사용하고 있고, 또 霍山의 邢頌不 선생의 제자 大鑑 劉潤夫는 乾坤括囊을 썼는데 그 책의 끝 부분에서 人元(=제 삼의 미지수)을 포함하고 있는 문제 두 개를 포함하고 있다. 나의 친구 燕山의 朱漢卿(=朱世桀) 선생은 수년동안 수학을 가르치고, 세 개의 미지수를 포함하는 문제를 깊이 탐구하고 또 구장에 숨어 있는 사실들을 알아내어 네 개의 미지수 天, 地, 人, 物을 설정하여 사원(술)을 이루었다."(平陽李德載因撰兩儀羣英集臻, 兼有地元, 霍山邢先生頌不高弟 劉大鑑潤夫撰乾坤括囊, 末僅有人元二問 吾友燕山朱漢卿先生演數有年 探三才之賾, 索九章之隱 按天地人物立成四元). 위의 두 저서도 소실되어 그 자세한 내용은 알 수 없고, 朱世桀이 **사원옥감**에서 처음 시도한 네 개의 미지수를 포함하는 천원술은 현재까지 남아 있게 되었다. 실제로 그는 **사원옥감**의 시작에 假令四草의 장을 두고 이 네 가지, 즉 일원, 이원, 삼원, 사원 방정식의 예를 각각 하나씩, 一氣混元, 兩儀化元, 三才運元, 四象會元의 제목으로 들고 본문으로 들어가고 있다. 이들 제목도 매우 흥미 있게 붙이고 있음을 알 수 있다. **사원옥감**에서 설정한 다항식 표시를 4개의 미지수를 포함하고 있다고 하여 四元術이라 하기도 하는데 그 표현 방법은 다음과 같다. 즉 天元(=x), 地元(=y), 人元(=z), 物元(=u)의 4개의 문자로 생성되는 다항식의 각 항의 계수를 다음과 같은 자리에 늘어놓아 나타내었다.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & u^2y^2 & u^2y & & u^2 & & u^2z & u^2z^2 & \cdots \\
\cdots & uy^2 & uy & & u & & uz & uz^2 & \cdots \\
 & & & & & yz & & & \\
\cdots & y^2 & y & & \text{太} & & z & z^2 & \cdots \\
 & & & xu & & & & & \\
\cdots & xy^2 & xy & & x & & xz & xz^2 & \cdots \\
\cdots & x^2y^2 & x^2y & & x^2 & & x^2z & x^2z^2 & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdots
\end{array}
$$

이때 太자 항은 물론 상수항을 나타내고, xu, yz, …의 항은 대각선 위에 표시하였다. 그러나 천, 지 이원의 경우에는 천원은 太항 아래로, 천원의 음의 지수는 太항 위로, 지원은 太항 왼쪽에, 음의 지수는 太항 오른쪽에 나타내고 있다(**四元玉鑑** 假令四草 참조). 한편 위에서 언급한 가령사초의 사상회원의 예에서 보면 한 문제에서 사원술로 읽으면 안되고 양의 화원으로 읽어서 음의 지수로 읽어야 하는 경우가 들어 있다. 사원술의 방법에 따르면 $2+4yu+4zu$이지만 실제로는 $2+4yx^{-1}+4zx^{-1}$을 나타내고 있다. 즉 위의 兩儀化元에서 설명한 대로 太항의 위쪽은 음의 지수 항을 나타내는 것이다. 따라서 한 문제에서 다항식의 표현이 통일되지 않고 있으므로 대응되는 문장과 함께 다항식 표현을 읽어야 한다.

실제로 사원술이 이루어지기 전에 진구소는 그의 **수서구장**에서 천원술을 이용하여 방정식

의 풀이를 완전히 해결하였고, 李冶는 측원해경과 익고연단에서 천원술에 대한 표기 방법을 완전히 체계적으로 확정하고 주세걸은 그의 算學啓蒙(1299)에서 이미 천원술을 사용하고 사원옥감에서 사원술로 확장하였다.

천원술은 수의 표현과 마찬가지로 덧셈, 뺄셈, 곱셈을 간단히 계산할 수 있고, 예를 들어 x^n으로 곱하는 것은 아래로 평행이동 시키면 되고, x^n으로 나누는 것은 반대로 위로 평행이동 시키면 되고 분배법칙을 이용하여 곱셈을 계산할 수 있다.

또 사원옥감의 방정식에 대한 부분에서는 모두 고차 연립방정식을 취급하고 있는데, 2원 연립방정식 36개 문항, 3원 연립방정식 13개 문항, 4원 연립방정식 7개 문항을 취급하고 있는데, 이들 모두는 당연히 한 개의 미지수만 남기고 나머지 미지수를 소거하여야 하는데 천원술을 이용하여 방정식들을 나타낼 수 있고, 또 방정식의 성격을 한 눈에 볼 수 있어서 소거하는 일이 일목 요연하게 나타나 있다. 흥미 있는 것은 마지막 일원 방정식이 일차인 경우를 2차항이 없는 2차 방정식으로 보고 풀어내고 있는 것이다(開無隅平方). 이는 알콰리즈미가 Al-jabr w'al-muqābalah에서 일차 방정식을 2차 방정식의 하나로 분류한 것과 같은 것이다.

방정식의 해법은 11세기 중엽에 賈憲의 釋書鎖算에서 시작된 增乘開方法인데 이는 소실되고 楊輝의 詳解九章算法(1261)의 서문에 이를 언급하고 있고, 그는 이 방법을 九章算法纂類에서 소개하고 있고, 또 12세기 중엽에 劉益이 議古根源에서도 이를 취급하였는데 이중에 많은 문제를 양휘는 그의 田畝比類乘除捷法에서 다시 다루고, 진구소는 그의 수서구장(1247)에 이 방법을 사용하여 10차 방정식까지 풀어내었다([9], [19]). 이 방법은 Ruffini(1765~1822)가 1804년에, Horner(1786~1837)가 1819년에 발표하였고, Ruffini-Horner 방법 혹은 Horner의 방법으로 알려져 있다. 그러나 이미 700여년 전에 중국 수학자들은 이를 사용하고 있었다. 따라서 李冶나 주세걸은 방정식의 풀이는 모두 생략하고 천원술을 빌려 연립방정식의 미지수를 소거하는 방법만 그들의 저서에서 취급하고 있다. 사원옥감에서 사용된 소거방법에 대한 자세한 조사는 다음 기회로 미루기로 한다.

천원술 내지 사원술을 이용한 다항식 표현 방법은 한국, 일본으로 전파되고 19세기말까지 계속 사용되고 있다([11], [20]).

3. 결론

19세기 이전의 대수학, 넓은 의미에서 수학 전반의 역사는 방정식의 역사라고 하여도 크게 틀리지 않는다. 방정식은 등호(=) 기호가 없는 채 취급되고 있어서 동서양 모두 방정식과 다항식은 구별되지 않고 있다. 또 다항식의 연산은 수의 연산의 중요한 성질을 모두 포함하고 있고, 또 그 자체로 새로운 대수계, 즉 다항식환을 이루고 있기 때문에 다항식을 일

반적으로 취급할 수 있고 난 다음에야 현대 대수학이 정립되었다고 볼 수 있다. 따라서 다항식의 표현 방법은 수학사에서 매우 중요한 자리를 차지하게 된다.

동서양 모두 초기부터 문자 사용을 하지 못하고 수학적 지식을 예제를 통하여 나타낼 수 밖에 없었다. 그러나 그들은 예제를 통한 수학적 법칙을 충분히 실생활에 활용하고 또 이를 개념화할 수 있었다.

동양, 특히 중국에서는 수의 산대 표시에서 다항식의 표시로 확장이 가능하여 천원술, 나아가서 사원 연립방정식을 취급할 수 있는 사원술의 도입이 가능하여 대수학의 발전이 서양 수학보다 5~6세기 이상 빨리 발전할 수 있었다. 그러나 산대 표시는 계수의 문자화가 불가능하므로 개념화가 어렵고, 또 방정식의 해법도 인수분해가 아닌 증승개방법을 통한 양의 근사값의 계산으로 만족하여, 비에트, 데카르트 등에 의하여 계수까지 포함한 다항식의 도입으로 얻어지는 근의 성질, radical을 통한 해법의 가능성, 복소수의 도입, 대수학의 기본정리 등 중요한 대수학의 발전이 중국 수학에서 불가능하게 되어, 17세기 이후 대수학의 발전은 오히려 서양수학이 앞서게 되고 또 방정식론으로부터 현대 수학의 발전이 가능하게 되었다.

참고 문헌

1. Bashmakova, I.G., *Diophantus and Diophantine Equations*, MAA, 1997.
2. Bashmakova, I.G. and G.S. Smirnova, *The Beginnings and Evolution of Algebra*, MAA, 2000.
3. Bourbaki, N., *Elements of the History of Mathematics*, Springer-Verlag, 1994.
4. Corry, L., *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Birkhäuser, 1996.
5. Cullen, C., *Astronomy and mathematics in ancient China: The Zhou bi suan jing*, Cambridge Univ. Press, 1996.
6. Ifrah, G., *The Universal History of Numbers*, John Wiley & Sons, 1999.
7. Kangshen, S., J. N. Crossley and A. W.-C. Lun, *The Nine Chapters on the Mathematical Art*, Oxford Univ. Press, 1999.
8. Li, Y. and S. Du, *Chinese Mathematics, A concise history*, tr. J. N. Crossely and A. W.-C. Lun, Clarendon Press, 1987.
9. Libbrecht, U., *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century, The Shu-shu chiu-chang of Ch'in Chiu-shao*, The MIT Press, 1973.
10. Martzloff, J.-C., *A History of Chinese Mathematics*, Springer-Verlag, 1997.
11. Mikami, Y., *The Development of Mathematics in China and Japan*, Chelsea, 1913.
12. Needham, J., *Science and Civilization in China*, Vol. 3, Cambridge Univ. Press, 1959.

13. van der Waerden, B.L., *A History of Algebra*, Springer-Verlag, 1985.
14. van der Waerden, B.L., *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer-Verlag, 1983.
15. van der Waerden, B.L., *Science Awakening*, P. Nordhoff, 1954.
16. 郭書春 匯校, **九章算術**, 遼寧教育出版社, 1990.
17. 吳文俊 主編, **中國數學史大系**, 第一卷~第八卷, 北京師範大學出版社, 1998.
18. 李信明, **中國數學五千年**, 臺灣書店印行, 1997.
19. **中國歷代算學集大成**, 上, 中, 下, 山東人民出版社, 1994.
20. **韓國科學技術史資料大系**, 數學編, 1卷~10卷, 驪江出版社, 1985.
21. 김용국, 김용운, **중국수학사**, 민음사, 1996.
22. 홍성사 · 홍영희, "Categorical Topology의 역사," **한국수학사학회지** 제 10 권 제 2 호(1997), 11-23.
23. 홍성사 · 홍영희, "劉徽와 九章算術," **한국수학사학회지** 제 11 권 제 1 호(1998), 27-35.
24. 홍영희, "유니버설 대수학의 발전," **한국수학사학회지** 제 12 권 제 1 호(1999), 21-31.
25. 홍영희, "격자론의 기원," **한국수학사학회지** 제 12 권 제 2 호(1999), 15-23.
26. 홍영희, "초기 군론의 역사," **한국수학사학회지** 제 13 권 제 2 호(2000), 33-40.
27. 홍영희, "수학적 구조에서의 아이디얼," **한국수학사학회지** 제 14 권 제 2 호(2001), 29-44.
28. 홍영희, "수학적 구조와 격자론," **한국수학사학회지** 제 15 권 제 2 호(2002), 175-181.