KJHM Vol. 16, No. 4, 2003, 1-14

九章算術의 原版과 英文飜譯版의 間隔

군산대학교 수리정보통계학부 **柳寅永**

Abstract

The Nine Chapters by Liu Hui(劉徽) in the three kingdoms(220~265 AD) is the fundamental source of the traditional Chinese Mathematics and has not only remained the lighthouse of the traditional Chinese Mathematics over the last 2000 years, but also has exerted a profound influence on the development of mathematics in the neighbouring countries and regions. At last it also translated into English.

In this paper, some differences between the Orignal and the New Translated Nine Chapters will be introduced and a problem of *Mathematical Treatise in Nine Sections* (Shushu Jiuzhang, 數書九章, 1247) of Qin Jiushao(秦九韶, 1202~1261 AD) in the Song (宋, 960~1261 AD) Dynasty. It looks like an insect in the amber but not error.

0. 안내

본 발표는 구장산술의 원판과 구장산술의 번역판 *The Nine Chapters on the Mathematical Art* 를 얻게 되어 같이 보다가 진귀한 부분이 있어서 정돈해 소개한다.

1. 전체 내용 구성의 비교
2. 기이한 차이점 및 풀이
3. 수서구장의 문제와 여러 풀이
4. 결론

   참고 문헌

1. 전체 내용 구성의 비교

구장산술			The Nine Chapters on the Mathematical Art	
1장	방 전	38문	Field Measurement	38문
2장	속 미	46문	Millet and Rice	46문
3장	쇠 분	20문	Distribution by proportion	20문
4장	소 광	24문	Short width	24문
5장	상 공	28문	Construction Consultations	28문
6장	균 수	28문	Fair Levies	28문
7장	영부족	20문	Excess and Deficit	20문
8장	방 정	18문	Rectangular Arrays	18문
9장	구 고	24문	Right-angled triangle	24문
10장			Sea Island Mathematical Manual	9문
문계		246문		255문

제 10 장의 "Sea Island Mathematical Manual"은 중국의 삼국 시대의 수학자 유휘가 주석한 해도산경으로 중차를 이용한 닮은 도형의 문제이며 제 9장에 넣어서 보아도 자연스러울 것이다. 한편 제 9 장에 이미 유휘찬 구장 중차 8문이 수록되어 있다.

2. 기이한 차이점 및 풀이

(1) 차이 1문

今有負籠 重一石一十七斤 行七十六步 五十返. 今負籠 重一石 行百步 問返幾何(**九章算術**, p. 325)

지금 바구니에 무게 일 석 일십 칠 근을 지고 칠십 육 보를 가서 오십을 돌아온다. 이제 바구니에 무게 일 석을 지고 백 보를 간다. 얼마 돌아오는가?를 묻는다.

Now someone with a basket-load of 1 dan 17 jin travels 50 round trips. The trip is known to be 76 bu long. Given another one with a basket-load of 1 dan. The round trip is known to be 100 bu long. Tell; how many trips does he travel? (*Nine Chapters*, p. 323)

답왈 오십칠반이천육백삼분반지일천육백이십구(答曰 五十七返二千六百三分返之一千六百二十九)

(Answer) 43 23/60 round trips

(術曰 以故所行步數乘故籠重斤數爲法. 此法謂負一斤一返所行之積步也. 今籠重斤數乘今步, 又以返數乘之, 爲實. 實如法得一返. 按; 此法, 負一斤一返所行之積步; 此實者, 一斤一日所行之積步. 故以一返之課除終日之程, 卽是返數也. 臣淳風等謹按; 此術, 所行步多者, 得返少; 所行步少者, 得返多. 然則 〔故〕所行者, 今返率也. 故令所得返乘今返之率, 謂實, 而以故返之率爲法, 今有術也. 按; 此負籠又有輕重, 於是爲術者因令重者得返少, 輕者得返多. 故又因其率以乘法, 實者, 重今有之義也. 然此意非也. 按; 此籠雖輕而行有限, 籠過重則人力遺, 力有遺而術無窮, 人行有限而籠輕重不等. 使其有限之力隨彼無窮之變, 故知此術率乖理也. 若故所行有空行返數, 設以問者, 當因其所負以爲返率. 則今返之數可得而知也. 假令空行一日六十里, 負重一斛, 行四十里. 減重一斗進二里半, 負重(三)〔二〕斗以下, 與空行同. 今負籠重六斗, 往還行一百步. 問返幾何? 荅曰; 一百五十返. 術曰; 置重行率, 加十里, 以里法通之, 爲實. 以一返之步爲法. 實與法而一, 卽得也)

(풀이) 비례식 137근×76보 : 50반＝120근×100보 : x반으로부터 다음을 얻는다,

$$x=\frac{120\times 100\times 50}{137\times 76}=\frac{2^2\times 150\ 000}{2^2\times 2\ 603}=\frac{150\ 000}{2\ 603}=57.625816=57\frac{1\ 629}{2\ 603}\text{ (반)},$$

$$0.625816\times 2\ 603=1\ 628.999\fallingdotseq 1\ 629.$$

(Solution) Let x be the number of bu of one's trip. Then $137\times 50\times 76=120\times 100\times x$,

$$x=\frac{137\times 50\times 76}{120\times 100}=\frac{2\ 603}{60}=43.383333=43\frac{23}{60}\text{ (round trip)}$$

$$0.383333\times 60=22.99998\fallingdotseq 23$$

(2) 차이 2문

今有共買豕 人出一百 **<u>盈一百</u>** 人出九十 適足 問人數 豕價幾何(九章算術, p. 361)

지금 함께 돼지를 사는데 사람들이 일백을 내면 일백이 남고 사람들이 구십을 내면 꼭 적합하다. 사람의 수와 돼지의 값이 얼마인가?를 묻는다.

Now pigs are purchased jointly; everyone contributes 100, **the <u>deficit is 100</u>**; everyone contributes 90, it is exactly enough. Tell; the number of people, the pig price, what is each ? (*Nine Chapters*, p. 365) (deficit → excess)

답왈 일십인, 시가구백(答曰 一十人, 豕價九百)

(Answer) 10 people, pig price 900.

(Solution) Let x and y be the number of people and the pig price, then

$100x=y+100$ ……①, $90x=y$ ……②,

solving these, we have $x=10$, $y=900$.

[盈適足, 不足適足] 術曰; 以盈及不足之數爲實. 置所出率, 以少減多, 餘爲法, 實如法得一[人]. 其求物價者, 以適足乘人數, 得物價. 〈此術意謂以所出率, 以少減多, 餘是一人不足之差. 不足數爲衆人之差. 以一人差約之, 故得人之數也. (適) [盈及不] 足數爲實者, 數單見, 卽衆人差, 故以爲實. 所出率以少減多, 卽一人差, 故以爲法. 以除衆人差得人數, 以適足乘人數, 卽得物價也〉

(3) 참고 3문

今有良馬與駑馬發長安 至齊 齊去長安三千里 良馬初日行一百九十三里 日增一十三里 駑馬初日行九十七里日減半里 良馬先至齊 復還迎駑馬 問幾何日相逢及各行幾何(**九章算術**, p. 369)

지금 양마(잘 달리는 말)와 노마(우둔한 말)가 같이 장안을 출발하여 제에 이른다. 제는 장안에서 삼천리를 간다. 양마는 첫 날 일백 구십 삼 리를 가고 날마다 일십 삼 리를 증가하여 간다. 노마는 첫 날 구십 칠 리를 가고 날마다 반 리를 감하여 간다. 양마가 먼저 제에 이르러서 다시 노마를 맞으러 돌아온다. 어느 날 서로 만나며 각기 얼마를 갔는가?를 묻는다.

Now a good horse and an inferior horse set out from Chang'an to Qi. Qi is 3 000 li from Chang'an. The good horse travels 193 li on the first day and daily increases by 13 li; the inferior horse travels 97 li on the first and decreases by 1/2 li. Good horse reaches Qi first and turns back to meet the inferior horse. Tell; how many days till they meet and how far has each travelled? (*Nine Chapters*, p. 378)

***답왈 일십오일일백구십일분일지일백삼십오이상봉(答曰 一十五日一百九十一分日之一百三十五而相逢)**

양마행사천오백삼십사리일백구십일분리지사십육(良馬行四千五百三十四里一百九十一分里之四十六)
노마행일천사백육십오리일백구십일분리지일백사십오駑馬行一千四百六十五里一百九十一分里之一百四十五

***(Answer) 15 135/191 days till they meet,**
The good horse travelled 4 534 46/191 li,
the inferior horse travelled 1 465 145/191 li,

(풀이) 양마는 첫 날 193 li를 가고 또 매일 13 리를 증가하여 가므로, 가는 n날까지 가는 거리는 다음과 같다.

$$S_n = 193n + 13\times\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}$$

한편, 노마는 첫 날에 97 li를 가고 매일 반 리를 줄여서 가므로 n날까지의 가는 거리는 다음과 같다.

$$T_n = 97n - \frac{1}{2}\{1+2+3\cdots+(n-1)\}$$

그런데 $6\ 000 = S_n + T_n = 193n + 13\times\frac{n(n-1)}{2} + 97n - \frac{1}{2}\times\frac{n(n-1)}{2}$

$$= 290n + 12.5\times\frac{n(n-1)}{2}$$

$\therefore$ $\mathbf{H(n) = 5n^2 + 227n - 4\ 800 = 0,}$

$\mathbf{H(15.70954) \fallingdotseq 0,\quad n = 15.70954\ \text{days} = 15\frac{137}{193}\ \text{days}}$

$$S_{15\frac{137}{193}} = 193n + 13\times\frac{n(n-1)}{2} = 193\times\frac{3\ 032}{193} + 13\times\frac{\frac{3\ 032}{193}\times\frac{2\ 839}{193}}{2}$$

$$= \frac{3\ 032}{193}\left(193 + 6.5\times\frac{2\ 839}{193}\right) = \frac{3\ 032}{193}\times 288.61398 = 4534.0807 \fallingdotseq 4534\ \text{(li)}.$$

$$T_{15\frac{137}{193}} = 97n - \frac{1}{2}\times\frac{n(n-1)}{2} = 97\times\frac{3\ 032}{193} - \frac{1}{2}\times\frac{3\ 032}{193}\times\frac{2\ 839}{193}$$

$$= \frac{3\ 032}{193}\left(97 - \frac{1}{4}\times\frac{2\ 839}{193}\right) = \frac{3\ 032}{193}\times 93.322539 = 1\ 466.0825 \fallingdotseq 1\ 466\ \text{(li)}.$$

By the writer's method,
considering Table 7.7 and Table 7.8, in the interval $n \leq x \leq n+1$
$y_{\text{good-h.}} + y_{\text{bad.-h.}} = 6\ 000$ li, since they meet at some point(x) of 15th day.
Let a_i and b be li on the ith day and acceleration of each for $i=1, 2, \cdots, n, n+1$,
then total distance $(a_1 + \text{b}/2(n-1))n + (a_1 + nb)d/c$ where d/c is the fractional portion of

the $(n+1)$th day before the two horses meet.

The distance in 15 days

$$y_{15}=193\times 15+13\times(1+2+\cdots+14)+97\times 15-\frac{1}{2}\times(1+2+\cdots+14)=5662.5 \text{ li},$$

On the other hand, the distance in 16 days

$$y_{16}=193\times 16+13(1+2+\cdots+15)+97\times 16-\frac{1}{2}\times(1+2+\cdots+15)=6140 \text{ li}$$

$$1/x=\frac{477.5}{337.7}, \quad x=\frac{135}{191}\text{ day.}$$

They meet in 15 135/191 days.

$$y_{g15\frac{135}{191}}=(193+13\times 14/2)\times 15+(193+13\times 15)\times\frac{135}{191}$$

$$=(193+91)\times 15+(193+195)\times\frac{135}{191}$$

$$=4260+274.24083=4534.2408=4534\frac{46}{191}\text{ li}$$

$$y_{i15\frac{135}{191}}=(97-1/2\times 14/2)\times 15+(97-1/2\times 15)\times\frac{135}{191}$$

$$=93.5\times 15+89.5\times\frac{135}{191}=1402.5+63.259162=1465.7591=1465\frac{145}{191}\text{ li}$$

$$*\ (193+13(n\frac{-1)}{2})n+(193+13n)(x-n)+(97-\frac{n-1}{4})n+\frac{(97-n}{2})(x-n)=6\ 000$$

$$n=15\rightarrow *,\ 477.5x=7500,\quad x=15.706806=15\frac{135}{191}\text{ days}$$

$$0.706806\times 477.5=337.5,\quad \frac{337.5}{477.5}=\frac{3375}{4775}=\frac{135}{191}$$

It looks unnatural but more precise.

術日 假令十五日不足三百三十七里半令之十六日多一百四十里 以盈不足維乘假令之數 幷而爲實 幷盈 不足爲法 實如法而一 得日數不盡者以等數除之而命分「求良馬行者 十四乘益疾里數而半之 加良馬初日之行里數 [以乘十五日 得十五日之凡行 又以十五日乘益疾里數 加良馬初日之行] 以乘日分子 如日分母而一 所得 [加] 前良馬凡行里數 卽得 其不盡而命分 求駑馬行者 以十四乘半里 又半之 以減駑馬初日之行里數 以乘十五日 [得駑馬十五日] 之凡行 又以十五日乘半里 以減駑馬初日之行 餘 以乘日分子 如日分母而一 所得 加前里 卽駑馬定行里數 其奇半里者 爲半法 以半法增殘分 卽得 其不盡者而命分 按 令十五日 不足三百三十七里半者 據良馬十五日凡行四千二百六十里 除先去齊三千里 定還迎駑馬一千二百六十里 駑馬十五日凡行一千四百二里半 幷良 (馬) [駑] 二馬所行 得二千六百六十二里半 課於三千里 少三百三十七里半 故日不足 令之十六日 多一百四十里者 據良馬十六日凡行四千六百四十八里 (先) 除 [先] 去齊三千里 定還迎駑馬一千六百四十八里 駑馬十六日凡行一千四百九十二里 幷良 駑二馬所行 得三千一百四十里

課於三千里 餘有一百四十里 故謂之多也 以盈不足之 實如法而一 得日數者 卽設差不盈不朒之正數 以二馬初日所行里乘十五日 爲一十五日平行數 求初末益疾減遲之數者 幷一與十四 以十四乘以半之 爲中平之積（減益疾之數）又令益疾減遲里數乘之 各爲減益之中平里 故各減益平行數得一十五日定行里 若求後一日 以十六日之定行里數乘日分子 如日分母而一 各得日分子之定行里數 故各幷十五日定行里 卽得 其駑馬奇半里者 法爲全里之分 故破半里爲半法 以增殘分 卽合所問也」

술책이 가라사대 15 일에 만난다고 가정하면 337 리 반이 모자라고 16 일에 만난다면 140 리가 남는다. 남음과 부족으로써 가령의 수 15와 16에 유승(관계를 유지하는 곱을)하고 이를 더하여 실이라고 하고 남음과 부족을 더하여 법이라고 하면 실을 법으로 나누면 일 수를 얻는다. 소수 부분은 등수(같은 수 191)로 이를 곱하여 분수로 표시한다. 「양마의 간 거리를 구하는 것은 15에서 1이 부족한 14를 빨리 가는 리 수 13에 곱하여 이를 반으로 하고 양마의 초일 간 거리를 더하여 15 일에 곱함으로써 15 일의 보통으로 간 거리를 얻고 또 15 일로써 빨리 달린이 수에 곱하고 양마의 초일의 간 거리를 더하여 하루의 분수의 분자를 곱하고 분모로 나누어 얻은 바에 앞의 양마의 보통 간 거리 수를 더하면 즉 그것을 얻고 부진은 법을 곱하여 정돈 한다. 노둔한 말의 간 거리를 구하는 것은 반 리에 14를 곱하여 또 이를 반으로 하고 노마의 초 일의 간 거리의 수에서 이를 감하여 15 일로써 곱하면 둔한 말의 15 일 간의 보통으로 간 리 수를 얻고 또 15 일을 반 리에 곱하여 노마 첫 날 간 거리의 수에서 이를 감한 나머지에 하루의 분자를 곱하고 분모로써 나누어 앞의 리 수를 더하면 즉 둔한 말의 확정한 간 거리 이니라. 그의 기수의 반 리의 수는 반의 법이 되고 반의 법이 남은 부분을 증가시킴으로써 즉 그의 소수 부분을 얻어 분수로 한다. 가령 15 일을 살펴보면 부족이 337 리 반이라고 하는 것은 양마가 15 일에 보통으로 간 리 수 4260 리에 근거하여 먼저 제에 간 3,000 리를 제(뺌)하고 고정된 둔한 말을 맞으러 1260 리를 돌아오는 리 수이오 둔한 말의 15 일의 보통으로 간 거리는 1402 리 반으로 양마와 노마(둔한 말)의 두 말의 간 거리는 2662 리 반을 얻어 3,000 리에 대보면(비교) 337 리 반이 적으므로 가라사대 부족 이오. 가령 16 일은 140 리가 많다 함은 양마 16 일 간의 보통으로 간 거리 4648 리에 근거하여 이를 선이라고 두고 선에서 제까지의 거리 3,000 리를 제(빼)하면 고정된 둔한 말을 맞으러 1648 리를 돌아 오는 리 수이오 둔한 말의 16 일의 보통으로 간 리 수는 1492 리로 앞의 양마 돌아오는 리 수와 더하면 두 말의 간 거리는 3140 리를 얻어 3,000 리에 견주면 140 리의 남음이 있는 고로 이를 일러 많다고 이르니라. 영(많음)과 부족으로서의 실을 법으로 나누면 일 수를 얻는다. 즉 차이가 남지도 않고 모자라지도 않는 정수를 놓고 2 말의 첫 날 간 거리 수를 15 일에 곱하면 15 일의 평균으로 간 거리의 수가 된다. 처음과 끝의 빨리 간 리 수에서 더디 간 리 수를 감한 리 수를 구하는 것은 1과 14를 더하여 14로써 곱하여 이를 반으로 하면 중간 평균의 곱이 되고 (빨리 간 리 수를 감함) 또 가령 빨리 간 리 수에서 더디 간 리 수를 빼서 이에 곱하면 각기는 더하고 감한 중간 보통의 간 거리의 수가 되는 고로 각기를 평등 리 수를 더한 데서 감하면 15 일의 확정한 간 거리의 수를 얻는다. 만일에

뒤의 1 일에 간 기리를 구한다면 16 일의 확정한 가는 거리의 수를 일수의 분자에 곱하여 일수의 분모로 나누면 각기는 일수 분자의 확정된 가는 거리의 수를 얻는 고로 각기 15 일의 정하여 간 거리의 수를 더하면. 즉 그 둔한 말의 기수의 반 리를 간 리 수를 얻고 법은 전 간 거리를 나누는 고로 반리를 다 쓰면 반 법이 되어 남는 부분을 증대시킴으로써 즉 문는 바에 합치한다. 」

3. 수서구장의 문제와 여러 풀이

사연 4문

(원문) 問有圓城不知周徑四門中開北外三里有喬木出南門便折東行九里乃見木欲知城周徑各幾何「圓用(月→用)古法」(測量圖解, 數書九章測望類, p. 453; 中國歷代算學集成, 上, p. 550; 算學正義, p. 368)

(문역) 문제는 둥근 성이 있는데 주(둘레)와 경(지름)을 알지 못 한다. 4문의 가운데 북문을 열어 북방의 밖 3 리에 키큰 나무가 있고 남문을 나와서 문득 방향을 꺾어서 동으로 9 리를 가서 이에 나무를 본다. 성주(성의 둘레)와 경(지름)은 각 얼마인가?를 알고자 한다. 「원의 고법(옛 방법)」

답왈경구리 (答曰徑九里)
주이십칠리 (周二十七里)

(원문) 術曰以句股差率求之一爲從隅伍(五)因北外里爲從七廉置北里冪八因爲從五廉以北里冪爲正率以東行冪爲負率二率差四因乘北里爲益從三廉倍負率乘五廉爲益上廉以北里乘上廉爲實開玲瓏九乘方得數自乘爲徑以三因徑得周
草曰以一爲從隅以五因北三里得一十五里爲從七廉以北三里自乘得九里爲正率以八因率得七十二爲從五廉以東行九里自乘得八十一爲負率以正率九減負率餘七十二爲負差以四因之得二百八十八以乘北三里得八百六十四係負差所乘者爲益三廉倍負率八十一得一百六十二乘五廉七十二得一萬一千六百六十四爲益上廉以北三里乘上廉得三萬四千九百九十二爲實各置實廉隅玲瓏空耦位方廉以約實衆法不可超進乃於實上定商三里其隅與商相生得三爲從下廉又與商相生入從七廉共得二十四爲星廉又與商相生得七十二爲從六廉又與商相生入五廉內共得二百八十八又與商相生得八百六十四爲從四廉又與商相生得二千五百九十二爲正三廉內消益三廉八百六十四訖餘一千七百二十八爲從三廉又與商相生得五千一百八十四爲從二廉又與商相生得一萬五千五百五十二爲正上廉內消益上廉一萬一千六百六十四訖餘三千八百八十八爲從上廉又與商相生得一萬一千六百六十四爲從方乃命上商三里除實適盡所得三里以自乘之得九里爲城圓徑之里數又以古法圓率三因之得二十七

爲城周
「此條立術甚迂回不必至於九乘方也今尋其比例之理則只爲立方故布算審正」(「」안은 원문에 없음)
<u>法以北外三里乘出南門折東行九里得二十七里再以東行九里乘得二百四十三里仍四倍得九百七十二里爲實從方空以北外三里爲從廉以一爲隅開立方得九里卽城徑也</u> (밑줄 부분은 원문에 없음)

(문역) 술수가 가라사대 구고의 차율로써 이를 구한다. 1은 종우가 되고 북외리에 5를 곱하여 종 7 염이 된다. 북외리의 멱을 놓고 8을 곱하면 종 5염이 된다. 북외리의 멱을 정율이라고 하고 동행의 멱을 부율로 하여 2율차(6)에 4를 곱하고 북외리에 곱하여 익종 3염이 되고 부율을 배로 하여 5 염에 곱하여 익상염이 되고 상염에 북외리를 곱하여 실이라고 하여 **영롱의 9 승방 법으로 개방하면 수를 얻어** 자승하면 경이 되고 경에 3을 곱하면 주를 얻는다.
초에 이르기를 1로써 종우라고 하고 북외 3 리에 5를 곱함으로써 15 리를 얻어 종 7이 되고 북외의 3 리를 자승하면 9 리를 얻어 정율이 되고 정율에 8을 곱하면 72를 얻어 종 5 염이 되고 동행의 9 리를 자승함으로써 81을 얻어 부율이 되고 부율에서 정율을 감한 나머지 72는 부차가 되어 이에 4를 곱하면 288를 얻어 북외리의 3리를 곱하면 864를 얻어 곱하는 바 부차를 이어 익 3 염이 되고 부율의 81를 배로 하면 162를 얻어 5 염의 72에 곱하면 11,664를 얻어 익 상염이 되고 상염에 북외리의 3 리를 곱하면 34,992를 얻어 실이 되고 각기 실 염 우 영롱을 공의 위의 방염으로 짝지어 가히 초진(앞서가는)이 아닌 여러 방법으로써 실을 나눔으로써 이에 실상에 상(商) 3 리를 정하여 그의 우는 상과 더불어 상생하면 3을 얻어 종 하염이 된다. 또 상의 상생에 7 염을 더한 합은 24를 얻어 성염이 되고 또 상과 더하면 상생은 72를 얻어 종 6 염이 되고 또 상의 상생과 더불어 5 염을 더하면 합은 288을 얻는다. 또 상의 상생과 더하면 864를 얻어 종 4 염이 되고 또 상의 상생과 더하면 2,592를 얻어 정 3 염이 되어 익 3 염의 864를 내소하면 나머지1,728은 종 3 염이 되고 또 상의 상생과 더하면 5,184를 얻어 종 2 염이 되고 또 상의 상생과 더하면 15,552를 얻어 정 상염이 되고 익 상염의 11,664를 내소한 나머지 3,888를 종 상염이라고 하고 또 상의 상생과 더하면 11,664를 얻어 종방이 된다. 이에 상상의 3 리로 실를 나누면 꼭 맞게 다하여 얻는 바의 3 리는 이를 자승하면 9 리를 얻어서 원경의 리 수를 얻고 고법의 원율 3을 이에 곱하면 27을 얻어 성의 주(둘레)가 된다.
「이조목의 술책은 몹시 우회하여 필요 없이 구승방에 이른다. 이제 그 비례의 이치를 찾아 다만 방도를 세우는 고로 포산이 바르다.」
법은 남문을 나와서 꺾어서 동행 9 리에 북의 외 3 리를 곱하면 27 리를 얻는다. 다시 동행의 9 리를 곱하면 243 리를 얻어 이에 4 배 하면 972 리를 얻어 실이 되고 종방은 공이오 북외의 3 리로써 종염이라고 하고 1로써 우로 놓아 입방법으로 개방하면 9 리를 얻어 즉 성경이니라.

(풀이 1) 법의 약식 $H(x)=x^3+3x^2-972=0$, $H(9)=0$, $x=9$, $3x=27$

(풀이 2) 역자주 甲乙=甲己　丁戊=丁己이고
∠甲乙庚=∠庚戊丁=∠庚己丁=∠甲乙庚=∠R이므로
△甲乙庚∽△庚戊丁에서 甲乙$=b$　乙庚$=r=$庚戊라고 하면
甲乙/乙庚=庚戊/戊丁　戊丁$=r^2/b$ ……①
△甲乙丙∽△丁戊丙에서 丙戊=戊丙$=a$ 라고 하면
乙丙$=2r+a$　비례식　甲乙/乙丙=丁戊/戊丙
丁戊=戊丁$=ab/(2r+a)$ ……②=①
$H(r)=2r^3+ar^2-ab^2=0$ ……(*)
$a=3$, $b=9$ → (*): $H(x)=2r^3+3r^2-243=0$
$H(4.5)=0$, $r=4.5$, $2r=9$, $l=2\pi r=3\times 9=27$ 리

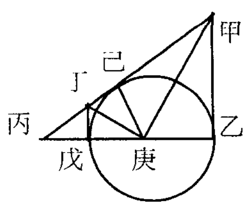
(풀이 3) 술왈의 약식 $H(x)=x^{10}+15x^8+72x^6-864x^4-11{,}664x^2-34{,}992=0$
$H(3)=0$, $x=3$, $x^2=9$는 지름, $3x^3=27$ 리는 원성주.

(풀이 4) 그런데 △甲乙丙은 직각삼각형(∠甲乙丙=∠乙=∠R)
甲丙^2=甲乙^2+丙乙^2, 丙乙$=2r+a$ 리　甲乙$=b$ 리
甲丙$^2=(2r+a)^2+b^2$ ……①　甲丙⊥己庚
면적산에서 1/2(甲乙×丙乙)=1/2(甲丙×己庚+甲乙×乙庚)
$b\times(2r+a)=(b\times r)+($甲丙$\times r)$　甲丙$=(ab+br)/r$ ……②→①
$H(r)=4r^4+4ar^3+a^2r^2-2ab^2r-a^2b^2=0$ ……(*)
$a=3$, $b=9$ → (*): $H(r)=4r^4+12r^3+9r^2-486r-729=0$
$H(4.5)=0$,　$r=4.5$,　$2r=9$ (경),　$6r=27$ (원성주)

(원문) 圖解曰甲乙爲出南門折東行里數戊丙爲北外里數乙戊爲城全徑自甲角抵圜心庚作甲庚分角線又自圜心庚作丁庚割線及丁戊折線則甲乙庚句股形與庚戊丁句股形爲同式形何(부)則試作己庚幅線(*法線)爲甲丙線之垂線則甲乙庚己四邊形之乙角己角庚戊丁己四邊形之戊角乙(*乙→己)角俱爲直角而庚戊丁己形之庚角爲甲乙庚己形之庚角之外角其度必與甲角等則其丁角亦必與甲乙庚己形之庚角等而爲同式兩四邊形而甲乙庚庚戊丁兩句股形各爲兩四邊形之半故亦必相爲同式形矣於是以丁戊小句與戊庚小股若乙庚大句與甲乙大股而戊庚與乙庚同爲城半徑故甲乙爲首率戊庚或乙庚爲中率丁戊爲末率成連比例三率若以甲乙與丁戊相乘則成戊庚城半徑自乘冪而今無丁戊末率只有戊丙故以戊丙乘甲乙再以甲乙乘之則與以丁戊乘甲乙再以乙丙乘之之積等盖甲乙丙句股形與丁戊丙句股形亦爲同式形(부)故丁戊與甲乙若戊丙與乙丙爲相當比例四率而甲乙二率與戊丙三率相乘之數與丁戊一率與乙丙四率相乘之數等也以甲乙首率乘丁戊末率之面積「卽戊庚中率自乘面積」爲底以乙丙爲高「卽戊丙乘甲乙再以甲乙乘之之數」仍爲四倍則與以乙戊城全徑自乘冪爲底

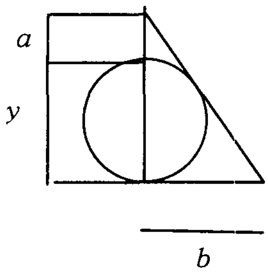
以乙戊城全徑加戊丙北外里之乙丙爲高之立表方積等而戊丙爲方高差故以立長方積爲實從方空以戊丙方高差爲從廉開立方得乙戊城徑也

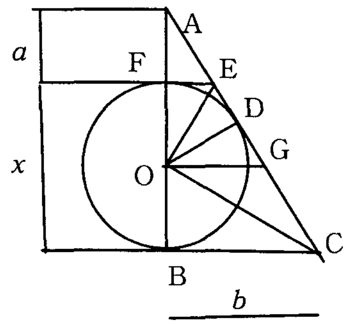
(문역) 그림의 해설이 이르기를 갑을은 남문에 나와서 꺾어 동행한 리 수요 무병은 북쪽의 밖의 리 수요 을무는 성의 전경이 되어 갑의 각으로부터 원의 중심 경과 갑경의 분각선(각의 2등분선)을 만들고 또 원의 중심 경은 정경의 할선 및 정무의 절선을 만드는 즉 갑을경의 구고형은 경무정의 구고형과 더브러 동식형이 된다. 왜 즉 살펴보면 기경의 폭선 (법선)을 그으면 갑병의 선 (접선)의 수선이 되는 즉 갑을경기의 4변형의 을각과 기각은 경무정기의 4변형의 무각과 기각은 모두 직각이 되어 경무정기형의 경각은 갑을경기형의 경각의 외각이 되어 그의 각도는 반드시 갑의 각과 같은 즉 그의 정각은 역시 반드시 갑을경기형의 경각과 같아 동식 (닮은)의 양(두) 4변형이 되고 (3각형) 갑을경과 경무정의 두 구고형은 각기 양 4변형의 반인 고로 또한 반드시 서로 동식형이 되느니라. 이에서 정무의 소구와 무경의 소고의 비가 을경(경을)의 대구와 갑을(을갑)의 대고의 비가 같고 무경과 을경은 같은 성의 반경이 되는 고로 갑을은 수율이 되고 무경 혹은 을경은 중율이 되고 정무는 말율이 되는 고로 연비례 3율을 이루어 만일 갑을과 정무를 상승하는 즉 무경의 성의 반경의 자승멱을 이루어 이제 정무의 말율은 없고 다만 무병이 있는 고로 무병을 갑을에 곱하고 다시 갑을을 이에 곱하면 즉 정무를 갑을에 곱하고 다시 이에 을병을 곱하는 적과 같다. 대개 갑을병의 구고형은 정무병의 구고형과 더불어 또한 동식형 (닮은 도형)이 되는 고로 정무와 갑을의 비가 무병과 을병의 비가 같아 서로 당연한 비례 4율이 되어 갑을의 2율과 무병의 3율을 서로 곱한 수는 정무의 1율과 을병의 4율의 서로 곱한 수와 같으니라. 갑을의 수율로써 정무의 말율에 곱한 면적은 「즉 무경의 중율의 자승의 면적 이다.」 밑면이 되고 을병을 고(높이)로 하여 「즉 무병을 갑을에 곱하고 다시 갑을로 이에 곱하는 수」 이에 4배가 되는 즉 을무의 성전경을 자승멱 하면 밑면이 되고 을무의 성전경에 무병의 북외리의 을병을 더하면 고의 입표의 방적과 같아서 무병은 방고의 차가 되는 고로 입 장방적을 실이라고 하고 종방은 공이오 무병의 방고차는 종염이 되어 입방법으로 개방하면 을무의 성경을 얻느니라.



“There is a round town of which we do not know the circumference and the diameter. There are four gates in the wall. Three li outside the northern gate there is a high tree. When we go outside the southern gate and turn east, we must cover 9 li before we see the tree. Find the circumference and the diameter x^2 of the town (π =3).” (Chinese

Mathematics in 13th century, p. 134)
This explanation follows Pai Shang－shu.
Ch'in says that x is the root of the equation;





$$x^{10}+5ax^8+8a^2x^6-4a(b^2-a^2)x^4-16a^2b^2x^2-16a^3b^2=0,\ (a=3,\ b=9)$$
$$x^{10}+15x^8+72x^6-864x^4-11{,}664x^2-34{,}992=0,$$
$$H(x)=x^{10}+15x^8+72x^6-864x^4-11{,}664x^2-34{,}992=0,$$
$H(3)=0$, $x=3$, $x^2=9$ is the diameter.
$$K(y)=y^5+15y^4+72y^3-864y^2-11{,}664y-34{,}992=0,\ K(9)=0,\ y=9\ ///\ (y=x^2)$$

From △ABC∽△ADO and AC/AB＝AO/AD, we obtain
$$\frac{\sqrt{(x+a)^2+b^2}}{x+a}=\frac{(x/2)+a}{\sqrt{a(x+a)}},\ \mathrm{AB}\times\mathrm{AF}=\mathrm{AD}^2\ (\triangle\mathrm{ADF}\backsim\triangle\mathrm{ABD})$$
$$x^4+2ax^3+a^2x^2-4ab^2x-4a^2b^2=0\ \cdots\cdots①$$
or if $a=3$, $b=9$
$$H(x)=x^4+6x^3+9x^2-972x-2{,}916=0,\quad H(9)=0,\quad x=9$$
We may divide the equation ① by $(x+\mathrm{a})$; we get $x^3+ax^2-4ab^2=0$.
Taking the diameter$=x^2$, gives the equation $x^4(x^2+a)=4ab^2$.
Multplying it by $(x^2+2a)^2$ the result is
$$x^{10}+15x^8+72x^6-864x^4-11{,}664x^2-34{,}992=0.$$
The other solution $x^3-ax^2-44b^2=0$. Ch'in's equation is $(x^2+2a)^2(x^3-ax^2-4ab^2)=0$.
Pai Shang－shu's method uses ching lu"; $x^2(x^2+2a)$ and kou－lu"; $b(x^2+2a)$

△ADO∽△AOG; AO/OG＝AD/OD → $\dfrac{x^2/2+a}{\mathrm{OG}}=\dfrac{\sqrt{[(x^2/2)+a]^2-[x^2/2]^2}}{x^2/2}$ or
$$x^2(x^2+2a)=4\sqrt{a(x^2+a)}\times\mathrm{OG}\ \cdots\cdots①\quad \mathrm{FE}\parallel\mathrm{OG}\quad x\Rightarrow x^2$$
Also, △AOG∽△ABC; AO/OG＝AB/BC, or
$$b(x^2+2a)=2(x^2+a)\times\mathrm{OG}\ \cdots\cdots②$$
Eliminating OG from ① and ②, we get

$$\frac{x^2(x^2+2a)}{4\sqrt{a(x^2+a)}} = \frac{b(x^2+2a)}{2(x^2+a)} \text{ or } \frac{x^4(x^2+2a)^2}{16a(x^2+a)} = \frac{b^2(x^2+2a)}{4(x^2+a)^2}$$

reducing the denominator by $4(x^2+a)$, we get

$$\frac{x^4(x^2+2a)^2}{4a} = \frac{b^2(x^2+2a)^2}{x^2+a}$$

This gives Ch'in chiu-shao's equation.

Reconstruction of the Ch'in's equation;

$$\triangle AOG \backsim \triangle AFE,\ AO/OG = AF/FE \text{ or } \frac{ab}{x^2+a}(x^2+2a) = 2a \times OG \cdots\cdots③$$

Multiplying ③ by ②, we get

$$b(x^2+2a)\left[\frac{ab}{x^2+a}(x^2+2a)\right] = 4a(x^2+a) \times OG^2$$

Subtracting the square of one-half of ①;

$$b(x^2+2a)\left[\frac{ab}{x^2+a}(x^2+2a)\right] - \left[\frac{x^2(x^2+2a)}{2}\right]^2 = 0,$$

which is equal to

$$x^{10}+5ax^8+8a^2x^6-4a(b^2-a^2)x^4-16a^2b^2x^2-16a^3b^2=0.$$

4. 결론

사물을 보는 것은 시각에 따라서 다르듯 어떠한 문제를 보는 관점이 같을 수가 없다. 絜矩之道라고 할지? 그렇지만 수학에 불변(invariant)이라는 공통점이 있다. 이용하면 편리하다. 구장산술은 중국의 역사만큼이나 깊은 맛이 있고 넓은 국토만큼이나 광범위하고 인구만큼이나 다양한 사고 방법이 있다. 그것이 인류 문명의 발전에 기여한 것이라고 본다.

참고 문헌

1. 韓國科學技術史資料大系
2. 九章算術
3. 한국수학사학회지
4. 한국수학사학회 Colloquium, 매월 제3주 화(금) 17:00 한양여자대학교 연구동 Seminar – Room.
5. 柳寅永, "默思集算法의 瑕疵," **한국수학사학회지** 제 12 권 제 2 호(1999), 63–68.
6. ______, "理藪新編의 管見," **한국수학사학회지** 제 13 권 제 1 호(2000), 27–32.
7. ______, "朝鮮王朝代의 秤法과 疋法," **한국수학사학회지** 제 13 권 제 2 호(2000), 23–32.

8. ______, “朝鮮王朝代 古, 徽, 密, 新率의 圓 및 立圓積,” 한국수학사학회지 제 14 권 제 1 호(2001), 1－16.
9. ______, “朝鮮朝代의 高次方程式의 虛實,” 한국수학사학회지 제 14 권 제 2 호(2001), 1－12.
10. ______, “朝鮮朝代의 數學問題 取扱의 虛實(1),” 한국수학사학회지 제 15 권 제 1 호(2002), 57－68
11. ______, “朝鮮朝代 弧矢田積의 虛實과 三角函數表,” 한국수학사학회지 제 15 권 제 3 호(2002), 1－16
12. ______, “朝鮮朝代의 數學問題取扱의 虛實(2),” 한국수학사학회지 제 16 권 제 2 호(2003), 1－10
13. ______, “朝鮮朝代 勾股의 兩和術,” 한국수학사학회지 제 16 권 제 3 호(2003), 1－26