Korean J. Crystallography
Vol. 14, No. 1, pp.25~31, 2003

Electromagnetic Wave는 어떻게 發生하나?

金榮相 · 高在中 · 姜相旭 · 李泳周 · 姜柔眞 · 徐日煥
高麗大學校 素材化學科

How Do Electromagnetic Waves Originate?

Young-Sang Kim, Jaejung Ko, Sang Ook Kang, Young-Joo Lee, Eugene Kang and Il-Hwan Suh
Department of Material Chemistry, Korea University, 208 Seochang, Chochiwon, Chung-nam 339-700, Korea

요 약

加速된 電子가 電磁波의 源이다. 電子가 加速運動을 하면 그 電子에 依한 電場도 加速運動을 한다. 이 變하는 電場은 變하는 磁場을 만들고, 變하는 磁場은 變하는 電場을 만드는 이 過程이 스스로 永久 反復된다. 이렇게 서로 聯關되어 生成된 $\bar{B}$와 $\bar{E}$의 線들은 閉鎖(폐쇄)된 loop들을 形成하면서 그 波源으로부터 速力 c로 멀어져 가는데 이 電場 및 磁場을 電磁波라 한다. 電磁波의 모든 性質은 Maxwell의 式에서 數學的으로 推論된다.

Abstract

Accelerated electric charge is the source of electromagnetic waves. If electric charge is accelerated, the electric field set up by the electric charge is also accelerated. A changing electric field produces a changing magnetic field and the changing magnetic field produces an electric field and the process is self-perpetuating. The lines of $\bar{B}$ as well as $\bar{E}$ thus occurred form closed loops that move away from the source with speed c. These traveling electric and magnetic fields, which are strongly interdependent, constitute electromagnetic radiation. All the properties of electromagnetic waves can be deduced mathematically from Maxwell's equations.

1. Introduction[1)]

Long wave, short wave, infrared, visible light, ultraviolet, X-ray, γ-ray들은 똑 같은 電磁波 (electromagnetic radiation)로 波長과 振動數만이 다를 뿐이며 自由空間에서 같은 速力 c로 進行한다. 이 中에서 radio wave는 振動하는 電氣 雙極子 antenna에서 加速되는 電荷에 依하여 發生하며, 可視光線, X-線은 原子크기의 源으로부터 나온다.

Maxwell's Eqs에 依하면 電磁波는 끊임없이 變하는 電氣場과 磁氣場이 서로 結合하여 自由空間을 光速度 $c = 1/(\sqrt{\varepsilon_o \mu_o})$로 그리고 $\bar{E} \times \bar{B}$의 方向으로 傳播한다.

2. Deduction of Maxwell's Equations

2-1.Gauss's law for electricity

Coulomb's law : $F = \dfrac{kq_o q}{r^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q_o q}{r^2}$

比例常數 $k = 9.0 \times 10^9$ nt · $m_2/coul^2$이고, permittivity constant $\varepsilon_0 = 8.85418 \times 10^{12}$ $coul^2/nt - m^2$이다.

Electric field : $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_o} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q_o q}{r^2}$

<u>Gauss's law for electricity</u> :

$$\int \vec{E} \cdot \vec{dA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

2-2. Energy density in electric field

Electric flux $\phi_E = \vec{E}\cdot\vec{A}$ 라 할 때 (ϕ_E의 單位는 nt – m^2/coul) plate의 面積이 A이고 plate間의 距離가 d인 parallel-plate capacitor의 境遇 Gauss's law에 依하여 $\phi_E = EA = q/\varepsilon_o$ 이며, 두 plate間의 potential 差異는 $V = Ed = qd/\varepsilon_o A$ 이다.

q가 한 plate에서 다른 plate로 옮겨졌을 때 그 plate間의 potential 差異는 C를 capacitance (單位: farad= coul/volt)라 할때 $V = q/C$ 인데, 이때 dp를 옮기는데 必要한 일은 $dW = Vdq = (qd/\varepsilon_o A)dq$ 이다.

$$W = U = \int_0^Q dW = \int \frac{qd}{\varepsilon_o A}dq = \frac{d}{\varepsilon_o A}\int_0^Q qdq$$
$$= \frac{d}{\varepsilon_o A}\frac{q^2}{2}\bigg|_0^Q = \frac{dQ^2}{2\varepsilon_o A}$$

$Q = \varepsilon_0 AE$를 上式에 代入하면

$$U = \frac{dQ^2}{\varepsilon_o A} = \frac{d}{2\varepsilon_o A}(\varepsilon_o AE)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 Ad$$

Ad는 capacitor의 體積이므로 空間의 어느 點에 electric field E가 있으면 그 點은 다음 같은 **energy density**를 갖고 있다고 생각할 수 있다.

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2$$

2-3. Gauss's law for magnetism

磁場 $\vec{B}$가 있는 곳에서 電荷 q가 速度 $\vec{v}$로 움직이면 그 電荷 q는 다음과 같은 right-hand rule을 따르는 힘 $\vec{F}$를 받는다: $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$.

Magnetic field $\vec{B}$의 unit는 1 tesla(T) = 1 nt · s/coul · m = 1 nt/amp · m 라 하고, 1 gauss(G) = 10^{-4} T 이다.

Magnetic monopole은 없으므로 다음의 Gauss's law가 얻어진다.

Gauss's law for magnetism : $\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$

卽 $\vec{B}$가 Gauss 面으로 들어오면 같은 量의 $\vec{B}$가 Gauss 面으로부터 나간다.

2-4. Ampere-Maxwell's Law

French physicist인 Andre Marie Ampere(1775~1836)가 發見한 法則은 Fig. 1과 같이 電線에 steady current(定常電流) i가 흐르면 그 周圍에 magnetic field $\vec{B}$가 생긴다는 것이다. 卽

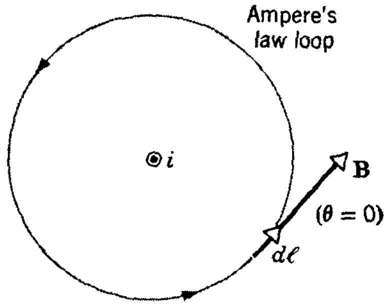

Fig. 1. A long straight wire carrying a current *i*. The Ampere's law loop is chosen to be a concentric circle.

Ampere's Law : $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o I$

여기서 permeability constant $\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}$ weber/amp-meter 이다.

電流가 흐르는 電線을 오른손으로 잡으면, 엄지손가락 方向이 電流 $\vec{i}$의 方向이고, 電線을 감은 나머지 손가락의 方向이 $\vec{B}$의 方向이다. 따라서 $\vec{i}$와 $\vec{B}$의 方向은 垂直이다.

定常狀態에 있는 導體回路에서 어느 한 部分으로 흘러들어가는 總 電流는 그 部分에서 흘러나오는 電流와 같아야 한다. 그러나 이 法則은 充電되고 있는 capacitor에서는 適用되지 않는다.

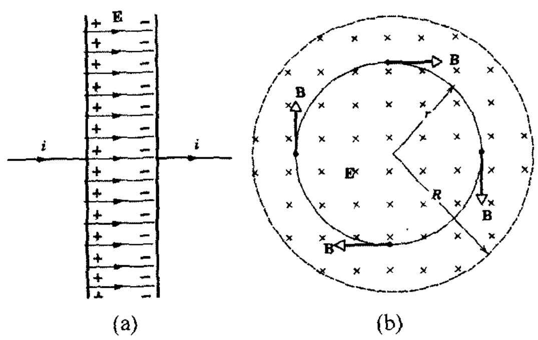

Fig. 2. (a) A changing electric field may be produced by changing a parallel-plate capacitor. (b) The induced magnetic fields $\vec{B}$ at four points are produced by a changing electric field $\vec{B}$.

Fig. 2(a)에서 왼쪽 極板으로 들어가는 conduction current(傳導電流)는 있지만 이 極板에서 나오는 conduction current는 없다. 마찬가지로 오른쪽 極板에서는 나오는 conduction current는 있지만 들어가는 conduction current는 없다.

1860年頃 Scottish physicist James Clerk Maxwell (1831~1879)은 다음같이 定意할수 있음을 밝혔다.

電氣가 充電됨에 따라 conduction current는 各 極板의 電荷를 增加시키고 이것은 차례로 極板間의 電場을 增加시키는데 電氣場의 增加率은 conduction current에 比例한다.

2-2. 節에서 capacitor의 極板사이의 E는 다음과 같다.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{\varepsilon_o A}$$

dt 동안에 Q는 $dQ = Idt$ 만큼 增加한다. 이에 該當하는 E의 變化量은

$$dE = \frac{dQ}{\varepsilon_o A} = \frac{Idt}{\varepsilon_o A} \quad \frac{dE}{dt} = \frac{I}{\varepsilon_o A}$$

두 極板 사이의 電流密度는 $I/A = \varepsilon_0(dE/dt)$ 이며 두 極板사이의 總 電流 I_D는

$$I_D = IA = \varepsilon_o\left(\frac{dE}{dt}\right)A$$

Maxwell이 맨처음 이 電流를 displacement current라 하였다. $\phi E = EA$이므로

$$I_D = \varepsilon_o\left(\frac{d\phi_E}{dt}\right)$$

Fig. 2(b)에서는 變化하는 電場에 의하여 磁場이 誘導됨을 보이고 있다. $\vec{E}$와 $\vec{B}$는 서로 垂直하다.

Displacement current를 Ampere's law에 代入하면 다음 같은 Ampere-Maxwell's law를 얻는다.

<u>**Ampere-Maxwell's law**</u> **:** $\int \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_o\left(i + \varepsilon_o \frac{d\phi_E}{dt}\right)$

따라서 magnetic field는 (1) 電流에 依하여 (2) 變化하는 electric field에 依하여 얻어진다. (2)項은 Maxwell이 追加한것이다.

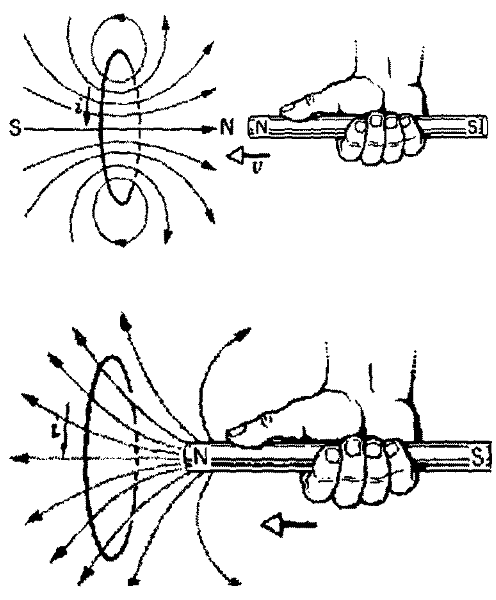

Fig. 3. If the magnet moves toward the loop, the induced current points as shown, setting up a magnetic field that opposes the motion of the *magnet.*

2-5. Faraday's law

Lenz's law: Fig. 3과 같이 磁石을 loop쪽으로 움직이면 그 loop에 誘導된 電流는 그 磁石의 運動을 反對하는 方向으로 일어난다.

Magnetic flux를 $\phi_B = \int \vec{B} \cdot \vec{dA}$로 定意하며, ϕ_B의 單位는 1 wb = 1 T · m²이다.

1831년 English scientist Michael Faraday가 發見한 法則은 다음이다.

<u>**Faraday's law of induction**</u> **:** $\int \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\phi_B}{dt}$

卽 magnetic field를 變化시키면 그 變化를 妨害하는 方向으로 電流가 흐르도록 electric field가 생긴다.

2-6. Energy density in the magnetic field

2-6-1. B for a solenoid

길이 l에 N回의 鐵絲가 감겨있는 solenoid에서 各 鐵絲에 電流 i가 흐르면, 各 鐵絲에서 Ampere's law은

$$\int \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_o i$$

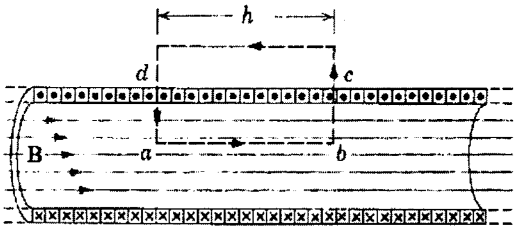

Fig. 4. A Section of an ideal solenoid, made of adjacent square turns, equivalent to an infinitely long cylindrical current sheet.

윗 式의 左邊을 Fig. 4의 a->b->c->d->a의 經路를 따라 積分하면 $\int \vec{B} \cdot \vec{dl} = Bh$ 이 된다.

Solenoid에 흐르는 全 電流는 $iN = i\ n\ l$이며 $n = N/l$이다. 따라서

$$B\ l = \mu_o\ i\ n\ l$$

$$B = \mu_o\ i\ n$$

2-6-2. An LR circuit

Faraday's law of induction : $\varepsilon = -\dfrac{d\psi_B}{dt}$

Fig. 5에서와 같이 길이가 l이고 斷面績이 A인 N回 감은 coil에 適用되면 各 coil에서 한 emf가 생기므로 N回 감은 coil에서는 全 flux가 $N\phi_B$로 되므로

$$\varepsilon = -N\frac{d\Psi_B}{dt} = -\frac{d(N\phi_B)}{dt}$$

$N\phi_B$는 current i에 比例하므로 $N\phi_B = Li$가 成立한다. 여기서 L는 inductance라 하고 單位는 1 henry = 1 volt-sec/amp이다.

$$L = \frac{N\phi_B}{i}$$

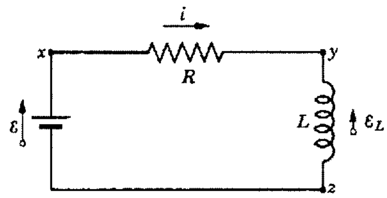

Fig. 5. An LR circuit.

그리고 $N\phi_B = (nl)(BA)$이며 2-6-1節에서 $B = \mu_o\ i\ n$이므로 $N\phi_B = \mu_o\ n^2\ i\ Al$이고 따라서 inductance는 다음같이 된다:

$$L = \frac{N\phi_B}{i} = \mu_o n^2 Al$$

Loop theorem에서 다음을 얻는다.

$$-iR - L\frac{di}{dt} + \varepsilon = 0,\ iR + L\frac{di}{dt} = \varepsilon$$

2-6-3. Energy in the magnetic field

上式에 i를 곱하면 다음 式이 되는데

$$\varepsilon i = i^2 R + Li\frac{di}{dt}$$

첫째項은 emf가 回路에 供給하는 energy 率이고, 둘째項은 抵抗의 Joule 熱이며, 셋째項은 energy 保存에 依하여 magnetic field에 貯藏된 energy 變化率 dU_B/dt로서 다음같이 써진다.

$$\frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt},\ dU_B = Lidi$$

이 式을 積分하면 다음같이 되며

$$U_B = \int_0^{U_B} dU_B = \int_0^i Lidi = \frac{1}{2}Li^2$$

U_B는 i가 흐르는 inductance L에 貯藏된 energy 이다.

2-6-4. Energy density in the magnetic field

길이가 l이고 斷面績이 A인 solenoid內서 magnetic field의 energy density u_B는 다음이다.

$$u_B = \frac{U_B}{Al} = \frac{\frac{1}{2}Li^2}{Al}$$

2-6-1節에서 $B = \mu_o in$ 그리고 2-6-2節에서 $L = \mu_o n^2 lA$ 이므로

$$u_B = \frac{\frac{1}{2}Li^2}{Al} = \frac{\frac{1}{2}\mu_o n^2 lAi^2}{Al} = \frac{1}{2}\mu_o n^2 i^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_o}$$

Table 1. The basic equations of electromagnetism (Maxwell's equations)

No.	name	equation	describes
I	Gauss's law for electricity	$\varepsilon_o \int \vec{E} \cdot \vec{dA} = q$	Charge and the electric field
II	Gauss's law for magnetism	$\int \vec{B} \cdot \vec{dA} = 0$	The magnetic field
III	Faraday's law of induction	$\int \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\phi_B}{dt}$	The electrical effect of a changing magnetic field
IV	Ampere-Maxwell's law	$\int \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_o\left(i + \varepsilon_o \frac{d\phi_E}{dt}\right)$	The magnetic effect of a changing electric field or of a current

3. Maxwell's Equations

4. Properties of Electromagnetic Waves

한 electric dipole antenna에 emf를 連結하여 potential이 週期的으로 振動하록 하면 電荷도 週期的으로 加速運動을 하여 週期的으로 變하는 電場이 만들어진다.

Ampere's law에서 電場이 變하면 磁場이 생기고, Faraday's law에서 磁場이 變하면 電場이 생겨이 波들은 같은 phase를 가지므로 다음 式으로 나타낼 수 있다. E와 B는 phase가 같아서 그 波가 움직이는 어느 點에서 同時에 그들의 maximum values에 到達한다.

$$\vec{E} = E_o \sin(kx - wt)\vec{j}$$

$$\vec{B} = B_o \sin(kx - wt)\vec{k}$$

Fig. 6과 같이 $\vec{E}$는 y-軸에 平行하고 $\vec{B}$는 z-軸에 平行하며 $\vec{E}$와 $\vec{B}$의 값들은 x와 t의 函數이지 y와 z와는 無關하다.

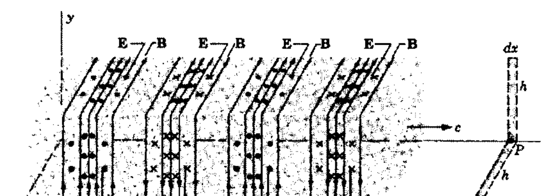

Fig. 6. A "snapshot" of a plane electromagnetic wave traveling in the x-direction at speed c, sweeping past point P.

4-1. The speed of the wave c is the ratio of the amplitudes of the electric and the magnetic waves

Fig. 7(a) 및 (b)에서와 같이 한 點에서 E와 B였던 것이 dx만큼 움직인 點에서는 $E + dE$와 $B + dB$로 되었다.

더 仔細한 解析을 爲하여 Fig. 7(a) 및 (b)의 dx로 표시된 rectangle에 Faraday's law of induction $\int \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\phi_B}{dt}$을 適用하자.

먼저 Faraday's law의 외쪽 項을 얻기 위하여 Fig. 7(a)에서 $\vec{E}$를 counterclockwise로 積分하면 rectangle의 위와 밑에서는 $\vec{E}$와 $\vec{dl}$이 서로 垂直하여 값이 없어서 積分은 다음과 같다.

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -Eh + (E + dE)h = h\, dE$$

또한 Fig. 7(b)의 dx로 나타낸 rectangle에 對한

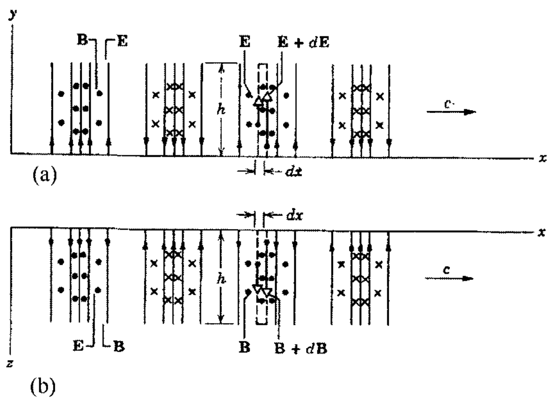

Fig. 7. The wave of Fig. 6 viewed (a) in the xy-plane and (b) in the xz-plane.

magnetic flux는 $\phi_B = (B)(dx\ h)$이고, 이를 微分하면 다음과 같이 Faraday Eq.의 오른쪽 項을 얻는다:

$$\frac{d\phi_B}{dt} = hdx\frac{dB}{dt}$$

위의 두 項을 Faraday's Eq에 代入하면 다음을 얻는다.

$$dE\ h = -hdx\frac{dB}{dt} \text{ 또는 } \frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt}$$

이 式으로부터 다음 關係를 얻는다.

$$kE_o\cos(kx - wt) = wB_o\cos(kx - wt)$$

$$\frac{E_o}{B_o} = \frac{w}{k} = \frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{T} = \nu\lambda = c$$

$E = E_o\sin(kx - wt)$ 및 $B = B_o\sin(kx - wt)$에서 $E/B = E_o/B_o$가 成立하므로 다음 關係가 얻어진다.

$$c = \frac{E}{B}$$

電磁波의 速力 c는 그 波의 電場成分과 磁氣成分의 振幅의 比이다.

4-2. The speed of the electromagnetic wave

다음에는 Fig. 7(b)를 다루자.

電磁波의 境遇 眞空에서 conduction current i가 없으므로 Maxwell's fourth equation은 다음과 같다:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o\varepsilon_o\frac{d\phi_E}{dt}$$

dx로 表示된 rectangle를 counterclockwise로 積分하면 윗 式의 왼쪽 積分은 $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = [-(b + dB)(h)] + [(B)(h)] = -h\ dB$이고 electric flux는 $\phi_E = (E)(hdx)$인데 마지막 式을 微分하면 다음이 되며

$$\frac{d\phi_E}{dt} = h\ dx\frac{dE}{dt}$$

이를 처음 式에 代入하면

$$-hdB = \mu_o\varepsilon_o\frac{dE}{dt},\ -\frac{dB}{dx} = \mu_o\varepsilon_o\frac{dE}{dt}$$

$$-kB_o\cos(kx - wt) = \mu_o\varepsilon_o wE_o\cos(kx - wt)$$

$$c = \frac{E_o}{B_o} = \frac{k}{\mu_o\varepsilon_o w} = \frac{1}{\mu_o\varepsilon_o c}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o\varepsilon_o}} = \frac{1}{\sqrt{(4\pi\times 10^{-7}\ weber/amp - m)(8.9\times 10^{-12}\ coul^2/nt - m^2)}}$$

$$= 3.0\times 10^8\ m/s$$

4-3. Intensity depends on the square of the wave amplitude

上述한 바와 같이 電場과 磁場은 *energy*를 包含하므로 電磁波가 움직일 때 그것은 電場 및 磁場의 energy를 運搬한다.

Intensity는 한 波가 單位面積當 energy를 運搬하는 率로서 그의 單位는 $\frac{Joule/sec}{m^2} = \frac{W}{m^2}$이다.

그 wave의 intensity를 計算하기 爲해서 Fig. 8과 같은 length가 dx이고 cross-section area가 A인 rectangular slab을 생각하자. 이 slab 內에 wave field $\vec{E}$와 $\vec{B}$가 있다. 이들 field들의 energy densities는 2-2節과 2-6節에서 다음과 같이 주어졌다:

$$\mu_E = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2,\ u_B = \frac{B^2}{2\mu_o}$$

dx가 充分히 작으면 그 fields는 그 slab에서 많이 變하지 않는다. 그래서 그 slab 內에 있는 全 energy는 electric and magnetic energy density의 合에 그 slab volume Adx를 곱한 것이다. 卽

$$du = (u_E + u_B)Adx = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_o E^2 + \frac{B^2}{\mu_o}\right)Adx$$

이 wave의 energy는 speed c로 움직이므로 이 slab

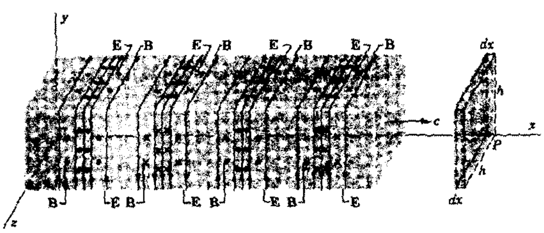

Fig. 8. A plane electromagnetic wave travels along the x-axis, transporting energy through an imaginary rectangular box.

內에 있는 energy는 $dt = dx/c$ 時間內에 이 slab를 빠져나간다.

Unit area A를 통해서 움기이는 energy 率은

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_o E^2 + \frac{B^2}{\mu_o}\right)\frac{Adx}{dx/c} = \frac{c}{2}\left(\varepsilon_o E^2 + \frac{B^2}{\mu_o}\right)A$$

Unit area當 energy flow率인 intensity I는

$$I = \frac{c}{2}\left(\varepsilon_o E^2 + \frac{B^2}{\mu_o}\right)$$

4-1절에서 얻은 $B = E/c$를 사용하면

$$I = \frac{c}{2}\left(\varepsilon_o cEB + \frac{EB}{\mu_o c}\right) = \frac{1}{2\mu_o}(\varepsilon_o \mu_o c^2 + 1)EB$$

4-2절에서 $\varepsilon_o \mu_o c^2 = 1$이므로 $I = EB/\mu_o$이다.

一般的으로 unit area當 energy flow의 rate는 다음으로 주어진다.

$$\vec{I} = \frac{1}{\mu_o}(\vec{E} \times \vec{B})$$

Vector $\vec{I}$는 energy flow의 크기뿐만 아니라 그의 方向도 가리킨다. 眞空에 있는 電磁波에 對하여 $\vec{E}$와 $\vec{B}$는 90°를 짓고 있다. $\vec{I}$는 1884년 그것을 暗示한 英國의 物理學者 J. H. Poynting의 이름을 따서 Poynting vector라 한다.

E와 B는 sinusoidally varying term들의 곱을 包含하고 있으므로, average intensity는 한 週期에서의 peak intensity와 $\sin^2$의 平均値인 1/2의 곱을 包含한다. 따라서 平均 intensity는 다음과 같이 amplitude의 제곱에 比例한다.

$\vec{I} = \frac{1}{\mu_o}(\vec{E}\vec{B}) = \frac{E_o B_o}{2\mu_o}$ 인데 $E_o = cB_o$ 이므로 다음 같이 된다:

$$\vec{I} = \frac{E_o^2}{2\mu_o c} \text{ 또는 } \vec{I} = \frac{E_o^2}{2\mu_o c}.$$

Reference

1) Fundamentals of Physics by David Halliday & Robert Resnick, 2nd Edition, pp. 419-687, 1984. John Wiley & Sons, Inc.