

# LMI를 기반으로 한 퍼지 피드백 선형화 제어 시스템의 L<sub>2</sub> 강인 안정성 해석

## LMI Based L<sub>2</sub> Robust Stability Analysis and Design of Fuzzy Feedback Linearization Control Systems

현 장 호, 박 창 우<sup>1)</sup>, 박 민 용

Chang-Ho Hyun, Chang-Woo Park, Mignon Park

### 요 약

본 논문에서는 퍼지 피드백 선형화 제어 시스템에 대한 강인 안정성 해석과 제어기 설계에 대해서 말하고 있다. 제어 대상인 비선형 시스템을 모델링 하는데 있어서 Takagi-Sugeno (TS) 퍼지 모델 기법을 이용하였고, 이때 발생할 수 있는 모델 불확실성과 외란에 대해 그것의 최대 최소 범위를 안다고 가정하였다. 모델링을 통해서 얻어진 폐구간 시스템에 대한 안정성 판별은 Diagonal Norm based Linear Differential Inclusions (DNLDI) 구조를 이용하여 L<sub>2</sub>강인 안정성 해석을 하였다. 또한, 퍼지 피드백 선형화 제어 시스템을 안정화 시키는 최대 이득을 얻기 위하여 LMI 최적화 계산법을 기반으로한 수치 해석법을 제시하였다. 제안된 방법의 효과를 확인하기 위해서 강인 안정성 해석 및 제어 설계에 대한 간단한 모의실험을 하였다.

### Abstract

This paper presents the robust stability analysis and design methodology of the fuzzy feedback linearization control systems. Uncertainty and disturbances with known bounds are assumed to be included in the Takagi-Sugeno (TS) fuzzy models representing the nonlinear plants. L<sub>2</sub> robust stability of the closed system is analyzed by casting the systems into the diagonal norm bounded linear differential inclusions (DNLDI) formulation. Based on the linear matrix inequality (LMI) optimization programming, a numerical method for finding the maximum stable ranges of the fuzzy feedback linearization control gains is also proposed. To verify the effectiveness of the proposed scheme, the robust stability analysis and control design examples are given.

**Key words:** L<sub>2</sub> robust stability, feedback linearization, fuzzy control, linear matrix inequalities, Takagi-Sugeno fuzzy model

### 1. 소개

퍼지 모델 기법은 비선형 시스템을 표현하고 복잡한 구조를 갖거나 불확실성을 갖는 시스템을 표현하는데 매우 유용하다 [1]. 이러한 특성 때문에, 이것을 이용한 퍼지 피드백 선형화 기법이 나타나게 되었고 지금까지 꾸준히 그것에 대한 연구가 진행되어 왔다 [2-8]. 일반적인 피드백 선형화 기법은 시스템의 비선형 요소를 제거함으로써 간단한 제어구조를 갖도록 하였다. 그러나, 비선형 시스템을 표현하는데 그 문제점을 갖고 있었고, 이러한 문제점을 퍼지 모델 기법을 이용하여 해결함으로써 시스템의 비선형 요소를 보다 쉽게 나타내고 제거할 수 있게 되었다. 이것이 바로 퍼지 피드백 선형화 기법이다.

Takagi-Sugeno (TS) 모델을 기반으로 한 퍼지 피드백 선형화 제어기법이 개발된 이후[2], 다양한 강인제어와 적응제어 기법이 이에 적용되기 시작했다[3-5, 7-8]. 그 중에서 적용 퍼지 피드백 선형화 방법은 불확실성의 존재에 대한 Lyapunov 안정성 해석이 가능하나, 구조적으로 복잡한 형태를 갖고 있기 때문에 실제 문제에서는 제어기 구성에 있어서 불가피한 한계를 갖고 있다. 이러한 현실적 측면을 고려하였을 때, 퍼지 피드백

선형화 기법에 대한 강인 안정성 해석은 적용 퍼지 피드백 선형화 시스템에서의 Lyapunov 안정성 해석보다 불확실성 문제를 해결하는데 보다 유용하다 [6-8].

시스템의 안정성 해석은 주파수 영역에서 시작되었고, Multivariable Circle Criterion을 이용한 강인 안정성 조건 및 설계방법이 나타나게 되었다 [6-7]. 하지만, 이러한 방법은 대부분 도식적인 안정성 해석 결과만을 보여 주기 때문에, 제어문제에 직접적으로 적용하는 데는 몇 가지 문제점을 가지고 있었다. 이에 대해, 해석학에서 선형 행렬 부등식 (LMI) 이론이 새롭게 급성장하면서 제어 시스템의 안정성 해석에서도 매우 유용한 방법으로 사용되고 있다[9, 10]. LMI이론을 사용함으로써 시스템과 제어이론에서 야기되는 다양한 문제점들을 단지 몇몇 형태의 LMI구조를 지닌 convex 또는 quasicconvex 최적화 문제로 줄일 수 있다. 특히, 이러한 LMI 방법은 체계적인 해석이 쉽지 않은 퍼지 제어 문제에 대해서 실질적인 해결방법을 제시한다[11-14].

퍼지 피드백 선형화 제어 시스템의 수치 해석을 얻기 위해서, 그것을 수치적으로 해결할 수 있는 LMI 기반의 강인 안정성 조건이 그간의 연구에서 제안되었다 [8]. 그러나, 그러한 연구에서는 단순히 안정성 해석만을 제시하였을 뿐, 제어기 설계에 관해서는 언급하지 않았다. 뿐만 아니라, 페루프 시스템을 LMI 구조로 변환하는 데는 루프 변환법과 같은 복잡한 과정이 필요하였다.

본 논문에서는 TS 퍼지 모델을 이용한 강인 퍼지 피드백 선

접수일자 : 2003년 5월 16일

완료일자 : 2003년 7월 10일

형화 제어 시스템의 안정성에 대한 수치 해석법과 그것을 이용한 제어기 설계에 대해서 연구하였다. TS 퍼지 모델 기반 제어는 적은 수의 퍼지규칙 만으로도 비선형 시스템을 표현할 수 있는 장점 때문에 지금까지도 광범위하게 연구되고 있다 [1], [11-12]. 퍼지 피드백 선형화 제어 시스템의 강인 안정성 해석을 위해서, 모델링에서 야기되는 불확실성의 최대 최소를 안다고 가정한다. 이러한 가정 하에 LMI 기반의 convex 최적화 방법을 적용하여 페루프 시스템의  $L_2$  강인 안정성을 해석한다. 안정성 문제는 Diagonal Norm Linear Differential Inclusions(DNLDI)문제와 Generalized Eigenvalue Problem(GEVP)로 변환하여 고려한다. 제안한 안정성 해석방법을 기반으로, 제어기 설계에서는 퍼지 피드백 선형화 제어 이득의 최대 안정 영역을 찾기 위한 체계적인 수치 해석법을 제시한다.

본 논문은, 2장에서 퍼지 피드백 선형화 제어 기법에 대해서 말하고 있고, 3장에서는 안정성에 대한 수치 해석법과 그것을 이용한 제어기 설계 방법을 설명하고 있다. 제안된 해석 방법과 제어기 설계 방법의 성능을, 4장에서 독립진자 모델을 이용한 모의 실험을 통해서 보여주고 있다. 마지막으로 5장에서는 본 연구에 대한 결과를 요약하여 정리하고 있다.

2. Takagi-Sugeno 모델 기반의 퍼지 피드백 선형화 제어

TS 퍼지 모델은 다음과 같은 퍼지 규칙을 사용하여 비선형 시스템을 나타낸다.  
i-번째 퍼지 규칙:

$$\begin{aligned} & \text{IF } x \text{ is } M_1 \text{ and } \dot{x} \text{ is } M_2 \text{ and } \dots \text{ and } x^{(n-1)} \text{ is } M_m \\ & \text{THEN } \dot{x}^{(n)} = (a_i + \Delta a_i(t))^T \cdot x + (b_i + \Delta b_i(t))u + d \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $x = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T$ 는 사용 가능한 상태 벡터이고,  $a_i, \Delta a_i(t) \in R^{1 \times n}$ 이고  $b_i, \Delta b_i(t) \in R$  이며,  $d \in R$ 는 다음의  $L_2$  공간에 속하는 알려지지 않은 외란을 나타낸다.

$$\int_0^\infty d(t)^2 dt < \infty \quad (2)$$

또한,  $M_{ij}$ 는 퍼지 집합이며,  $r$ 은 퍼지 규칙의 개수를 표시한다. 그리고,  $\Delta a_i(t), \Delta b_i(t)$ 는 시스템 내에서 최대 최소값만을 아는 시변 모델링 불확실성이다.

비선형 시스템에 대한 TS 퍼지 모델은 아래처럼 유도될 수 있다

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^r h_i(x) \{ (a_i + \Delta a_i(t))^T \cdot x + (b_i + \Delta b_i(t))u + d \} \quad (3)$$

여기서,  $w_i(x) = \prod_{j=1}^n M_{ij}(x^{(j-1)})$ ,  $h_i(x) = \frac{w_i(x)}{\sum_{i=1}^r w_i(x)}$

$M_{ij}(x^{(j-1)})$ 는  $x^{(j-1)}$ 의 소속등급이다. 본 논문에서는  $w_i(x) \geq 0, i=1,2,\dots,r, \sum_{i=1}^r w_i(x) > 0$  라고 가정하였다.

그러므로,  $h_i(x) \geq 0, i=1,2,\dots,r, \sum_{i=1}^r h_i(x) = 1$   
(3)식이 제어가능하기 위해서는 임의의 가제어성 영역 안에 있는  $x$ 에 대해서  $\sum_{i=1}^r h_i(x) b_i \neq 0$  이어야 한다. 만약 이러한 가제어성 조건을 만족하고 (3)식에서 불확실성이 존재하지 않는다면,  $\Delta a_i = 0, \Delta b_i = 0, d = 0$ 이고 (4)식에서 나타난 퍼지 피드백 선형화 제어기가 (3)식의 비선형성을 제거할 수 있을 뿐만 아니라, (5)식과 같은 정확한 선형화 시스템(exact linearization)도 만들어 낼 수 있다.

$$u = \frac{a_d^T \cdot x - \sum_{i=1}^r h_i(x) a_i^T \cdot x}{\sum_{i=1}^r h_i(x) b_i} = \frac{\sum_{i=1}^r h_i(x) (a_d^T - a_i^T) \cdot x}{\sum_{i=1}^r h_i(x) b_i} \quad (4)$$

여기서 사용된  $a_i, b_i, h_i(x)$ 는  $i(3)$ 식의 퍼지 모델에서 사용된 것과 같으며,  $a_d \in R^n$ 는 정밀 선형화 시스템(exact linearized system), (5)를 만족하는 임의의 파라미터이다.

$$\dot{x}^{(n)} = a_d^T \cdot x \quad (5)$$

위의 (5)식은 점근적으로 안정하다. 그러나, 실질적인 문제에 적용할 경우, 불확실성과 외란은 불가피하게 존재할 수밖에 없다. 그러므로, exact linearized system을 실질적으로 얻어내는 것은 어려운 작업이다. 본 논문에서는 이와 같은 문제를 해결하기 위해서 강인 안정성을 연구하였고, 다음과 같은 제어규칙을 고려하였다.

$$u = \frac{(a_R^T + \sum_{i=1}^r h_i(x) (a_d^T - a_i^T)) \cdot x}{\sum_{i=1}^r h_i(x) b_i} \quad (6)$$

$a_R \in R^n$ 는 불확실성에서 야기되는 외란을 줄이기 위해서 추가된 입력 벡터이다.

(6)식을 (3)식에 대입하므로써, (7)식과 같은 페루프 시스템을 구할 수 있다.

$$\dot{x}^{(n)} = a_d^T \cdot x + a_N(t)^T \cdot x + d \quad (7)$$

여기서,

$$\begin{aligned} a_N(t) = & a_R + \sum_{i=1}^r h_i(x) \Delta a_i(t) \\ & + \frac{\sum_{i=1}^r h_i(x) \Delta b_i(t)}{\sum_{i=1}^r h_i(x) b_i} \{ \sum_{i=1}^r h_i(x) (a_d + a_R - a_i) \} \end{aligned} \quad (8)$$

이렇게 얻어낸 (7)식에 대한 강인 안정성 해석과  $a_R$ 의 설계 방법에 대해서는 다음 장에서 설명하고 있다.

3. L2 강인 안정성 해석 및 퍼지 피드백 선형화 제어 시스템 설계

3.1. L2 강인 안정성 해석

$L_2$  강인 안정성 해석을 얘기하기에 앞서,  $L_2$  안정성 이론에서 사용되는 몇가지 중요한 정의를 간단하게 소개하겠다.

정의 1: 입력과 출력인  $(w, z)$  간의 함수  $\int_0^\infty w^T w dt < \infty$ 에 대해서, 만약  $z$ 가 (9)를 만족하는  $L_2$ 공간에 존재한다면, 그 시스템은  $L_2$  안정하다고 말한다.

$$\int_0^\infty z^T z dt < \infty \quad (9)$$

정의 2: 입력과 출력인  $(w, z)$  간의 함수에 대해서  $L_2$  이득은 (10)과 같이 정의한다.

$$\sup_{\|w\|_2 \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \quad (10)$$

여기서,  $u$ 의  $L_2$  놈(norm)의 제곱 꼴은  $\|u\|_2^2 = \int_0^\infty u^T u dt$  이고, 그것의 최고치는 0값이 아닌 모든 영역을 얘기한다.

정의 3:  $L_2$  이득이 1 이하이면, 그 시스템을 확장성이 없다(nonexpansive)라고 얘기한다.

수치적인  $L_2$  안정성 조건을 구하기 위해서, 페루프 시스템 식 (7)을 DNLDI구조로 바꾼다. DNLDI는 스칼라 값의 불확실한 시변 피드백 이득을 갖는 선형 시스템이다. 페루프 시스템에 대한 DNLDI 공식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bp + w \\ p &= A(t)Cx, \quad z = Dx \end{aligned} \quad (11)$$

여기서,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & a_{d3} & \dots & a_{dn} \end{bmatrix} \in R^{n \times n},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in R^{n \times n}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix} \in R^{n \times n},$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\delta_j(t) = \begin{cases} \frac{a_{Nj}(t)}{c_j} & \text{if } c_j \neq 0 \\ 0 & \text{if } c_j = 0 \end{cases} \quad (12)$$

제약조건 :  $|\Delta a_{Nj}(t)| \leq c_j (j = 1, 2, \dots, n)$  (13)

또는,  $p^T p \leq x^T C^T C x$  (14)

$$D = I \in R^{n \times n}, \quad p \in R^n, \quad z \in R^n, \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d \end{bmatrix} \in R^n \quad (15)$$

주의 1 : (12)에서  $c_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 는 (13)의 제약조건을 만족하는 음이 아닌 실수 값이거나,  $C$ 가 (14)의 제약조건을 만족하는 대각 양반 한정 행렬(diagonal positive semidefinite matrix)일 수 있다. 이때, 만약  $\Delta a_{Nj}(t) = 0$ 과 같이  $a_j$ 에 대응하는 불확실성이 존재하지 않는다면,  $c_j$ 가 공집합이 될 수 있다는 것을 주의해야 한다. 부록 A에서 안전성 해석을 위해  $c_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 를 선택하는 방법이 소개되어 있다. (15)식에서  $w$ 는 아래처럼  $L_2$  공간에 속하는 알려지지 않은 외부로부터 발생하는 잡음이다. 그리고,  $z$ 는 상태변수  $x$ 와 똑같은 출력이다.

$$\int_0^\infty w^T w \, dt < \infty \quad (16)$$

정리 1 : 만약 다음 (17)의 부등식을 만족하는  $P > 0$ 와  $\tau \geq 0$ 가 존재한다면, 시스템 (11)은  $L_2$  안정하고 그것의  $L_2$ 이득은  $\gamma$ 보다 작다.

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + D^T D + \tau C^T C & PB & P \\ B^T P & -\tau I & 0 \\ P & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (17)$$

증명 : 임의의 시간  $t$ 와  $p^T p \leq x^T C^T C x$ 를 만족하는  $x$ 와  $p$ 에 대해서 (18)식을 만족시키는 2차 함수  $V(x) = x^T P x$ 가 존재하고, 그때  $P > 0, \gamma \geq 0$ 라고 가정하자.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x) + z^T z - \gamma^2 w^T w \\ = x^T (A^T P + PA + D^T D) x + 2 x^T P B p + 2 P w - \gamma^2 w^T w \leq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

LMI기법 중, S-처리(S-procedure) [9]를 사용하면 (18)식은 다음의 부등식을 만족하는  $P$ 와  $\tau$ 가 존재하는 것과 같다.

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + D^T D + \tau C^T C & PB & P \\ B^T P & -\tau I & 0 \\ P & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0$$

(10)의  $L_2$ 이득이  $\gamma$ 보다 작다는 것을 보이기 위해 (18)식을 0부터  $T$ 까지 적분한다. 이때의 초기조건은 (19)식을 얻기 위해서  $x(0) = 0$ 로 한다.

$$V(x(T)) + \int_0^T (z^T z - \gamma^2 w^T w) \, dt \leq 0 \quad (19)$$

$V(x(T)) \geq 0$ 이므로  $\gamma$ 는 다음 부등식 (20)을 만족한다.

$$\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} < \gamma \quad (20)$$

그러므로, 정리 1에서 제시한 것처럼 다음 고유치 문제(EVP)를 해결함으로써  $L_2$  이득의 최대값 범위를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} P > 0, \tau \geq 0, \\ \begin{bmatrix} A^T P + PA + D^T D + \tau C^T C & PB & P \\ B^T P & -\tau I & 0 \\ P & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)을 만족시키는  $\gamma$ 를 최소화한다. 정리 1을 기반으로 안정성 해석과정을 아래와 같이 요약할 수 있다.

STEP 1. (7)식과 같은 페루프 시스템을 (11)식의 DNLDI형식으로 변환한다.

STEP 2. 부록 A에 나와있는 것처럼  $c_j (j=1, 2, \dots, n)$ 를 선택한다.

STEP 3. 정리 1의 안정성 조건을 검사한다. 이것의 실행은 쉽게 해결 가능하다.

STEP 4. 만약 적당한 EVP의 해인  $\gamma_{\min} > 0$ 가 존재한다면, 그 페루프 시스템은  $L_2$  개념에서 강인 안정하다. 그리고,  $L_2$  이득은  $\gamma_{\min}$ 보다 작다.

또한, 이렇게 유도되는 입출력 안정성 조건은 다음의 보조 정리를 통해서 입력이 없는 시스템(unforced system)에 대한 Lyapunov 안정성 해석으로도 쉽게 확장될 수 있다.

보조정리 1: 만약 (22)의 LMI를 만족하는  $P > 0$ 와  $\tau \geq 0$ 가 존재한다면,  $x=0$ 은  $d=0$ 처럼 페루프 시스템 (7)에서의 부입력이 없는 경우의 전역 평형점(globally attractive equilibrium)이다.

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + D^T D + \tau C^T C & PB & P \\ B^T P & -\tau I & 0 \\ P & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (22)$$

증명 : 부록 B를 참고하기 바란다.

### 3.2. 강인 안정한 시스템 설계

강인 안정한 시스템을 설계하기 위해서는, 규명된  $\gamma_{\max}$  범위내에서 페루프 시스템 (7)의  $L_2$  이득을 유지시킬 수 있는  $a_{Rj}$ 의  $L_2$  강인 안정성 범위를 결정해야 한다. (13)의 제약조건으로부터  $c_j$ 를 부록 A에서 유도된  $|a_{Nj}(t)| j = 1, 2, \dots, n$ 의 상한 임계값으로 간주할 수 있다. 그러므로,  $a_{Rj}$ 의 강인 안정한 영역을 결정하기 위해서는,  $\gamma = \gamma_{\max}$ 을 만족하는 정리 1에서의 가장 큰  $c_j$ 를 찾아내야 한다. 이것은 다음의 최적화 문제(23)를 해결함으로써 얻을 수 있다. (23)식을 만족하는  $c_1, c_2, \dots, c_n$ 의 최대값을 찾아낸다.

$$P > 0, \tau \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + D^T D + \tau C^T C & PB & P \\ B^T P & -\tau I & 0 \\ P & 0 & -\gamma_{\max}^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (23)$$

그러나, 여러개의 매개변수 최적화 문제(23)를 직접적으로 해결하는 것은 어렵다. 대신에, (23)식을 하나의 매개변수에 대한 최적화 문제로 분리함으로써, 부등식(24)의 해로부터 (23)식에 대한 적당한 해를 구하는 것은 가능하다.

$c_i$  가 (24)식을 만족하는 최대값을 찾아낸다.

$$P_i > 0, \tau_i \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} A^T P_i + P_i A + D^T D + \tau_i C_i^T C_i & P_i B & P_i \\ B^T P_i & -\tau_i I & 0 \\ P_i & 0 & -\gamma_{\max}^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (24)$$

여기서,  $C_i = \text{diag}(0, \dots, 0, c_i, 0, \dots, 0)$   
 $\leftarrow i-1 \rightarrow \quad \leftarrow n-i \rightarrow$

만약에  $\lambda_i = c_i^2$  로 정의한다면, (24)의 최적화 문제는 (25)식인 GEVP로 생각할 수 있다.

(25)식을 얻어낸 후, 이를 만족하는  $\lambda_i$  의 최대값을 찾아낸다.

$$P_i > 0, \tau_i \geq 0, \lambda_i \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} A^T P_i + P_i A + D^T D + \lambda_i \tau_i E_i^T E_i & P_i B & P_i \\ B^T P_i & -\tau_i I & 0 \\ P_i & 0 & -\gamma_{\max}^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (25)$$

여기서,  $E_i = \frac{C_i}{c_i}$  이다.

그러므로 위의 GEVP는 잘 정립된 LMI 최적화 기법을 이용해서 쉽게 해결할 수 있다 [10].

(25)식 GEVP의 해를  $\bar{\lambda}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )로 정의하자. 그렇다면, (24)의 최적화 문제의 해는  $\bar{c}_i = \sqrt{\bar{\lambda}_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 처럼 나타낼 수 있다. 여기서,  $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n$  는 최적화 문제(23)를 만족하는 해가 되기에 적당하지 않다는 것을 주의해야 한다.

$$\bar{C}_i = \text{diag}(0, \dots, 0, \bar{c}_i, 0, \dots, 0) \text{ 인 } \leftarrow i-1 \rightarrow \quad \leftarrow n-i \rightarrow$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{c}_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{c}_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \bar{C}_i \text{ 에 대해서, } \quad (26)$$

(17)식이 성립한다는 것을 보장할 수 없다. 그러므로, 적절한 해를 얻기 위해서는 약간의 수정이 필요하다. 수정된  $\bar{C}^m$  는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{C}^m = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{\tau}_i}} \begin{bmatrix} \sqrt{\bar{\tau}_1} \bar{c}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\bar{\tau}_2} \bar{c}_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\bar{\tau}_3} \bar{c}_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\bar{\tau}_n} \bar{c}_n \end{bmatrix} = \frac{\sum_{i=1}^n (\sqrt{\bar{\tau}_i} \bar{C}_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{\tau}_i}} \quad (27)$$

여기서,  $\bar{\tau}_i$  는  $\bar{\lambda}_i$  또는  $\bar{c}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )에 대응하는  $\tau_i$ 를 나타낸다.

정리 2에서, (27)의  $\bar{C}^m$  에 대해서 정리 1이 성립함을 보여준다.

**정리 2:** (27)의  $\bar{C}^m$  에 대해서, LMI  $L_2$  안정성 조건 (28)을 만족하는  $P > 0$  와  $\tau \geq 0$  가 존재한다.

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + D^T D + \tau \bar{C}^{mT} \bar{C}^m & PB & P \\ B^T P & -\tau I & 0 \\ P & 0 & -\gamma_{\max}^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (28)$$

증명:  $\bar{c}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )는 최적화 문제인 (24)의 해이기 때문에, 모든  $i$ 에 대해서 다음이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} A^T \bar{P}_i + \bar{P}_i A + D^T D + \bar{\tau}_i \bar{C}_i^T \bar{C}_i & \bar{P}_i B & \bar{P}_i \\ B^T \bar{P}_i & -\bar{\tau}_i I & 0 \\ \bar{P}_i & 0 & -\gamma_{\max}^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (29)$$

여기서,  $\bar{P}_i$  는  $\bar{\lambda}_i$  나  $\bar{c}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )에 대응하는  $P_i$ 를 나타낸다.

그러므로, 음의 반 한정행렬 (negative semi-definite matrix)의 특성으로부터 (30)식 또한 성립한다.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} A^T \bar{P}_i + \bar{P}_i A + D^T D + \bar{\tau}_i \bar{C}_i^T \bar{C}_i & \bar{P}_i B & \bar{P}_i \\ B^T \bar{P}_i & -\bar{\tau}_i I & 0 \\ \bar{P}_i & 0 & -\gamma_{\max}^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (30)$$

(30)식을 다시 나타내면 Appendix (31)식과 같이 정리할 수 있다. 이때,  $\bar{C}_i$ 의 특성을 이용해서 (32)식을 쉽게 보일 수 있다.

$$\sum_{i=1}^n \frac{\bar{\tau}_i}{n} \bar{C}_i^T \bar{C}_i = \left( \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{\bar{\tau}_i}{n}} \bar{C}_i^T \right) \left( \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{\bar{\tau}_i}{n}} \bar{C}_i \right) \quad (32)$$

(31)식을 이용해서 (32)식을 부록C의 (33)식과 같이 나타낼 수 있다. (33)에서  $P$ 와  $\tau$ 는 다음을 만족하는 값으로 선택하자.

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{P}_i}{n} \text{ and } \tau = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\tau}_i}{n} \quad (34)$$

그 후에 (27)과 (34)를 이용, (33)을 아래와 같이 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + D^T D + \tau \bar{C}^{mT} \bar{C}^m & PB & P \\ B^T P & -\tau I & 0 \\ P & 0 & -\gamma_{\max}^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (35)$$

그러므로, (27)의  $\bar{C}^m$  에 대해서, LMI  $L_2$  안정성 조건 (28)을 만족하는  $P > 0$  와  $\tau \geq 0$  가 존재한다. ■

정리 2가 (27)의  $\bar{C}^m$  에 대해서 성립하기 때문에,  $\bar{c}_1^m, \bar{c}_2^m, \dots, \bar{c}_n^m$  는 최적화 문제인 (23)의 적당한 해가 될 수 있다. 그러므로,  $\bar{c}_j^m$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ )는 정리 1을 만족시키기 위한 가장 큰  $c_j$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )로 사용될 수 있다. 게다가,  $a_{Rj}$ 에 대해서 사용 가능한 범위  $|a_{Rj}(t)|$ 를 사용함으로써,  $a_{Rj}$ 의 강인 안정 영역은 다음과 같은 집합으로 나타낼 수 있다. Appendix (36)

제어기 설계 과정은 다음처럼 요약할 수 있다.

**STEP 1.** 페루프 시스템 (7)을 DNLDI (11) 식으로 변환한다.

**STEP 2.** GEVP (25)를 해결한다.

**STEP 3.** (27)의  $\bar{C}^m$ 으로부터  $a_{Rj}$ 의 안정범위 (36)을 찾아낸다.

**STEP 4.** 집합 (36)내에서 적당한  $a_{Rj}$ 를 선택한다.

#### 4. 모의 실험

그림 1에서 보여주고 있는 도립진자 제어에 대해서 생각해 보자. 이 도립 진자에 대한 시스템 방정식은 다음과 같다[11].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x) + g(x)u + d(t) \\ &= \frac{g \sin(x_1) - a m l x_2^2 \sin(2x_1)/2 - a \cos(x_1)u}{4l/3 - a m \cos^2(x_1)} + d(t) \end{aligned} \quad (37)$$

여기서,  $x = [x_1 \ x_2]^T$  이고,  $x_1$ 은 수직성분과 도립진자간의 각을 얘기하고,  $x_2$ 는 각속도를 말한다. 중력은  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  이며,  $m$ 은 진자의 무게를 나타낸다.  $M$ 은 수레의 무게를 표시하며, 도립진자의 길이는  $2l$ 이다.  $u$ 는 카트에 적용되는 제어 입력이다.  $d(t)$ 는 외란을 표시하고 있으며,

$a = \frac{1}{m+M}$  이다. 모의실험을 위해서  $m=2.0kg$ ,  $M=8.0kg$ ,

그리고,  $2l = 1.0m$  로 두었다.

운동 방정식 (37)은 다음 두 개의 퍼지규칙[1]과 그림 2에서 보여주고 있는 퍼지 모델에 사용된 소속함수를 가지고 근사화할 수 있다.

Rule 1 : IF  $x$  is about 0

$$THEN \ddot{x} = (a_1 + \Delta a_1(t))^T \cdot x + (b_1 + \Delta b_1(t))u + d$$

Rule 2 : IF  $x$  is about  $\pm \frac{\pi}{2}$  ( $|x| < \frac{\pi}{2}$ )

$$THEN \ddot{x} = (a_2 + \Delta a_2(t))^T \cdot x + (b_2 + \Delta b_2(t))u + d \quad (38)$$

(38) 식은 다음처럼 유도될 수 있다.

$$\ddot{x} = \sum_{i=1}^2 h_i(x) \{ (a_i + \Delta a_i(t))^T \cdot x + (b_i + \Delta b_i(t))u \} + d \quad (39)$$

여기서,  $w_i(x) = \prod_{j=1}^2 M_{ij}(x^{(j-1)})$ ,  $h_i(x) = \frac{w_i(x)}{\sum_{i=1}^2 w_i(x)}$  이

고,

$$a_1 = \left[ \frac{\pi}{4l/3 - aml} \ 0 \right] = [17.29 \ 0], \quad a_2 = \left[ \frac{2\pi}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} \ 0 \right] = [9.35 \ 0],$$

$$b_1 = -\frac{a}{4l/3 - aml} = -0.1765, \quad b_2 = -\frac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} = -0.0052$$

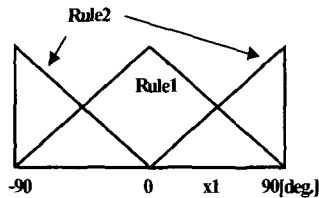


그림 2. 소속 함수

$\Delta a_1(t)$ ,  $\Delta a_2(t)$ ,  $\Delta b_1(t)$ ,  $\Delta b_2(t)$ 가 알려지지 않았으나 아래처럼 임의의 범위 안에서 존재한다고 가정한다.

$$-1 \leq \Delta a_{11}(t) \leq 1, \quad -0.5 \leq \Delta a_{12}(t) \leq 0.5, \quad -1 \leq \Delta a_{21}(t) \leq 1, \quad -0.5 \leq \Delta a_{22}(t) \leq 0.5, \quad -0.001 \leq \Delta b_1(t) \leq 0.001, \quad -0.001 \leq \Delta b_2(t) \leq 0.001$$

다음절에서 얘기하고 있는 해석방법과 제어기 설계에서는 (40)식과 같은 퍼드백 선형화 제어 규칙을 사용한다.

$$u = \frac{a_R^T + \sum_{i=1}^r h_i(x) (a_d^T - a_i^T) \cdot x}{\sum_{i=1}^r h_i(x) b_i} \quad (40)$$

그리고, (40)식을 (39)에 대입함으로써 아래의 페루프 시스템을 구한다.

$$\ddot{x} = a_d^T \cdot x + a_N(t)^T \cdot x + d$$

여기서,  $a_N(t) = a_R \cdot x + \sum_{i=1}^r h_i(x) \Delta a_i(t) \cdot x$

$$+ \frac{\sum_{i=1}^r h_i(x) \Delta b_i(t)}{\sum_{i=1}^r h_i(x) b_i} \{ \sum_{i=1}^r h_i(x) (a_d + a_R - a_i) \cdot x \} \quad (41)$$

#### 4.1. $L_2$ 강인 안정성 해석

$a_d = [-1 \ -1]$ 과  $a_R = [-3 \ -3]$ 을 갖는 퍼드백 선형화 제어 시스템의 강인 안정성을 해석한다.

STEP 1. 페루프 시스템 (41)을 DNLDI (42)식으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bp + w, \\ p &= \Delta(t)Cx, \quad z = Dx \end{aligned} \quad (42)$$

여기서,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix},$$

$$\Delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) & 0 \\ 0 & \delta_2(t) \end{bmatrix}, \quad \delta_j(t) = \begin{cases} \frac{a_{Nj}(t)}{c_j} & \text{if } c_j \neq 0 \\ 0 & \text{if } c_j = 0 \end{cases} \quad (43)$$

제약조건 :  $|\Delta a_{Nj}(t)| \leq c_j$  ( $j = 1, 2$ ) 또는

$$p^T p \leq x^T C^T C x$$

STEP 2. 아래와 같은 과정을 통해,  $c_j$  ( $j = 1, 2$ )를 선택한다.

$$c_1 = |a_{R1}| + \max_i |\Delta a_{1i}(t)| + \frac{\max_i |\Delta b_{1i}(t)|}{\min_i |b_{1i}|} \left( \max_i |a_{d1} + a_{R1} - a_{1i}| \right) = 8.088$$

$$c_2 = |a_{R2}| + \max_i |\Delta a_{2i}(t)| + \frac{\max_i |\Delta b_{2i}(t)|}{\min_i |b_{2i}|} \left( \max_i |a_{d2} + a_{R2} - a_{2i}| \right) = 4.268$$

STEP 3. LMI 기법 중에서 내심을 이용한 방법을 사용하여 다음의 GEVP를 해결한다 [10][15].

(44)식을 만족하는  $\gamma$ 의 최소값을 구한다.

$$P > 0, \quad \tau \geq 0, \quad \begin{bmatrix} A^T P + P A + D^T D + \tau C^T C & P B & P \\ B^T P & -\tau I & 0 \\ P & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (44)$$

GEVP의 적절한 해로 다음을 얻었다.

$$\gamma_{\min} = 0.0381 \text{ with } \tau = 0.0231 \text{ and}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1.7190 & 0.0159 \\ 0.0159 & 0.0388 \end{bmatrix} \quad (45)$$

STEP 4.  $\gamma_{\min} > 0$ 인 적당한 EVP 해가 존재하기 때문에, 페루프 시스템 (41)은  $L_2$  관점에서 강인 안정하다. 그리고,  $L_2$ 이득은  $\gamma_{\min} = 0.0381$ 보다 작다.

#### 4.2. 강인 안정한 제어기 설계

$a_d = [-1 \ -1]$ 를 갖는 퍼드백 선형화 제어 시스템에 대해서,  $a_{Rj}$ ,  $j=1,2$ 에 대한 제어기 설계 문제를 생각하자.

STEP 1. 페루프 시스템을 DNLDI식으로 변환한다. 이 단계는 앞 절의 안정성 해석에서의 첫 번째 단계와 같다.

STEP 2.  $j=1,2$ 일 때 (25)의 GEVP를 해결한다.

GEVP를 해결함으로써 [15]. 다음을 얻어낸다.

$$j = 1 \text{ 일때 : } \bar{\lambda}_1 = 133.3332, \quad \bar{c}_1 = 11.547,$$

$$\bar{\tau}_1 = 0.0015, \quad \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.2114 & 0.3630 \\ 0.3630 & 0.0103 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$j = 2 \text{ 일때 : } \bar{\lambda}_2 = 555.5556, \quad \bar{c}_2 = 23.5702,$$

$$\bar{\tau}_2 = 0.0015, \quad \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.2077 & 0.0188 \\ 0.0188 & 0.0006 \end{bmatrix} \quad (47)$$

여기서,  $\gamma = \gamma_{\max} = 0.01$  로 규정하였다.

STEP 3.  $C^m$ 로부터,  $a_{Rj}$ 의 안정한 영역을 찾아낸다.

$\bar{C}^m$ 를 계산한 결과는 다음과 같다.

$$\bar{C}^m = \begin{bmatrix} c_1^m & 0 \\ 0 & c_2^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.165 & 0 \\ 0 & 16.667 \end{bmatrix} \quad (48)$$

그러므로,  $a_{Rj}$ 의 강인 안정 영역은 (49)식으로 표현 가능하다.

$$\left\{ a_{R1} \left| |a_{R1}| + \max_i |\Delta a_{1i}(t)| + \frac{\max_i |\Delta b_{1i}(t)|}{\min_i |b_{1i}|} \left( \max_i |a_{d1} + a_{R1} - a_{1i}| \right) \leq 8.165 \right. \right\}$$

$$\left\{ a_{R2} \left| |a_{R2}| + \max_i |\Delta a_{2i}(t)| + \frac{\max_i |\Delta b_{2i}(t)|}{\min_i |b_{2i}|} \left( \max_i |a_{d2} + a_{R2} - a_{2i}| \right) \leq 16.667 \right. \right\} \quad (49)$$

STEP 4. 집합 (49)에서 적당한  $a_{R1}$ 을 선택한다.

그림 3은 (49)에서 얻은  $a_{R1}$ 와  $a_{R2}$ 의 영역을 보여주고 있다. 여기서 매개변수값으로  $a_{R1} = -2.5$ ,  $a_{R2} = -8$ 를 선택하였다.

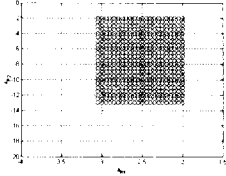


그림 3.  $a_{R1}$  와  $a_{R2}$ 의 영역

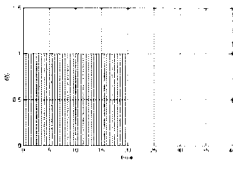


그림 4. 외란  $d(t)$

모의 실험에서 그림 4와 같은  $L_2$ 공간에 속하는  $d(t)$ 를 외란으로 사용하였으며, 그림 5와 그림 6은 초기조건이 0일 때의 모의 실험 결과를 나타내고 있다. 또한, 그림 7과 그림8은 외란과 출력의 시간에 대해서 변하는 모습을 보이고 있다.

입력과 출력의  $L_2$  norm은 다음처럼 계산된다.

$$\|w\|_2^2 = \int_0^\infty w^T w dt = \int_0^\infty d(t)^2 dt = 10 \quad (50)$$

$$\|z\|_2^2 = \int_0^\infty z^T z dt = \int_0^\infty x^T x dt = 0.0858 \quad (51)$$

그러므로,  $L_2$  이득은

$$\frac{\sup_{\|w\|_2 \neq 0} \|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} = 0.00858 \quad (52)$$

모의 실험의 결과는 페루프 시스템 (41)이  $L_2$  관점에서 봤을 때 강인 안정한 것을 설명하고 있으며,  $L_2$  이득이 설계 과정 STEP2 에 의해서 얻은 0.01보다 작은 것을 보여주고 있다.

### 5. 결론

본 논문에서는 퍼지 피드백 선형화 제어 시스템에 대한 LMI 기반의  $L_2$  강인 안정성 해석 및 제어기 설계 방법을 제안하였다. TS 퍼지 모델 기법을 이용하여 제어 대상을 모델링 하였으며, 안정성 해석과 제어기 설계에 있어서는 페루프 시스템을 DNLDI 와 GEVP 구조로 변형하여 수치 해석 방법을 제시하였다. 모의 실험을 통해서 제안된 안정성 해석을 적용하여 시스템의 안정성을 분석하였다.  $L_2$  이득이 설계 과정을 통해서 얻은 0.01보다 작은 것을 보임으로써  $L_2$  관점에서 안정함을 수치적으로 보였다. 뿐만 아니라, Lyapunov 안정성 해석을 위해서 상태변수  $x$ 에 대한 결과를 보여주면서 Lapunov 안정성 해석을 통한 안정도를 보였다.

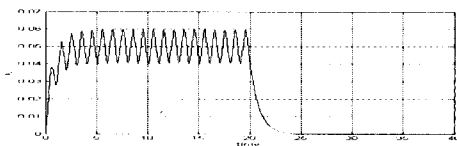


그림 5. 상태변수  $x_1$ 의 모의 실험결과

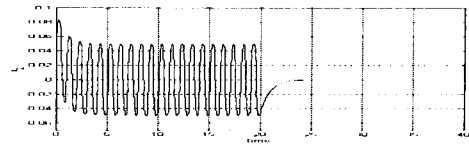


그림 6. 상태 변수  $x_2$ 의 모의 실험 결과

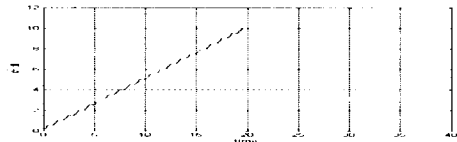


그림 7. 시간변화에 따른 외란의 변화

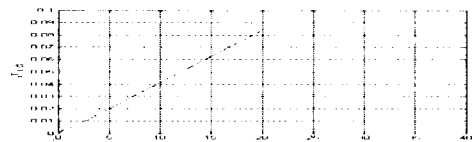


그림 8. 시간변화에 따른 출력의 변화

### 참고문헌

- [1]Takagi, T., Sugeno, M., Fuzzy Identification of systems and its applications to modeling and control, IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. 1985, 15(1) pp.116-132
- [2]Sugeno, M., Fuzzy control, Nikangoubyou-Shinnbun-sha, Tokyo, 1988
- [3]Y.-W. Cho, C.-W. Park, J.-H. Kim and M. Park, "Indirect model reference adaptive fuzzy control of dynamic fuzzy state space model", IEE Proc.-Control Theory Appl., vol. 148, No. 4, July, 2001
- [4]Fischle, K. and Schroder, D., An improved stable adaptive fuzzy control method, IEEE Trans. Fuzzy Systems, 1999, 7(1) pp.27-40
- [5]Tsay, D. L., Chung, H. Y. and Lee, C. J., The adaptive control of nonlinear systems using the Sugeno-type of fuzzy logic, IEEE Trans. Fuzzy Systems, 1999, 7(2) pp.225-229
- [6]Fuh, C. C., Tung, P. C., Robust stability analysis of fuzzy control systems, Fuzzy Sets and Systems, 1997, 88(3) pp.289-298
- [7]Kang, H. J., Kwon, C., Lee, C. H. and Park, M. Robust stability analysis and design method for the fuzzy feedback linearization regulator, IEEE Trans. Fuzzy Systems, 1998, 6(4) pp.464-472
- [8]Park, C. W., Kang, H. Y., Yee, Y. H. and Park, M., Numerical robust stability analysis of fuzzy feedback linearization regulator based on linear matrix inequality approach, IEE Proc.-Control Theory Appl., in press
- [9]Boyd, S., Linear matrix inequalities in systems and control theory, SIAM, Philadelphia, 1994
- [10]Nesterov, Y., Nemirovsky, A., Interior-point polynomial methods in convex programming, SIAM, Philadelphia, 1994
- [11]Wang, H. O., Tanaka, K., Grifiin, F. G., An approach to

fuzzy control of nonlinear system: stability and design issues', IEEE Trans. Fuzzy Systems, 1996, 4(1) pp.14-23

[12]Tanaka, K., Ikeda, T., Wang, H. O., Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stabilizability,  $H^\infty$  control theory, and linear matrix inequalities, IEEE Trans. Fuzzy Systems, 1996, 4(1) pp.1-13

[13]Kim, E., Kang, H. J., and Park, M., Numerical stability analysis of fuzzy control systems via quadratic programming and linear matrix inequalities, IEEE Trans. Fuzzy Systems, 1999, 29(4) pp.333-346

[14]Kim, E. and Kim D., Stability analysis and synthesis for an affine fuzzy system via LMI and ILMI: discrete case, IEEE Trans. Syst., Man and Cybernetics, 2001, 31(1) pp.132-140

[15]Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A., and Chilali, M., LMI Control Toolbox, The MathWorks, Inc., Natick, 1995

[16]Vidyasagar, M. Nonlinear system analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1993

**부록 A**

$c_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ )가 제약조건 (13)을 만족하는 임의의 양의 실수값 (positive real scalar)을 가질 수 있다고 하더라도,  $c_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ )는 기존의 해석법을 피하기 위해서  $|a_{N_j}(t)|$ 의 최소 상한 값 선정한다.

$|a_{N_j}(t)|$ 의 최소 상한 값을 얻기 위해서, (8)식을 (A.1)에 있는 것과 같은 구조로 나타낸다.

$$a_{N_j}(t) = a_{R_j} + \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\Delta a_{ij}(t) + \frac{\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\Delta b_i(t)}{\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))b_i} \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))(a_{di} + a_{R_j} - a_{ij}) \quad (A.1)$$

$(j = 1, 2, \dots, n)$

그렇다면, 지금까지 기본 가정으로 사용한 아래 식에서, 모든  $j$ 에 대해 부등식 (A.2)이 성립한다.

$$\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) = 1 \quad \text{and} \quad \max_{\mathbf{x}} h_i(\mathbf{x}(t)) = 1$$

$$|a_{N_j}(t)| \leq |a_{R_j}| + \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\Delta a_{ij}(t) + \frac{\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\Delta b_i(t)}{\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))b_i} \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))(a_{di} + a_{R_j} - a_{ij}) \quad (A.2)$$

(A.2)의 우변에 있는 두 번째와 세 번째 내용은 (A.3)와 (A.4)를 만족한다.

$$\left| \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\Delta a_{ij}(t) \right| \leq \max_i |\Delta a_{ij}(t)| \quad (A.3)$$

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\Delta b_i(t)}{\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))b_i} \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))(a_{di} + a_{R_j} - a_{ij}) \right| \leq \frac{\max_i |\Delta b_i(t)|}{\min_i |b_i|} \left( \max_i |a_{di} + a_{R_j} - a_{ij}| \right) \quad (A.4)$$

그렇다면, 아래의 부등식은 모든  $j$ 에 대해서 성립한다.

$$|a_{N_j}(t)| \leq |a_{R_j}| + \max_i |\Delta a_{ij}(t)| + \frac{\max_i |\Delta b_i(t)|}{\min_i |b_i|} \left( \max_i |a_{di} + a_{R_j} - a_{ij}| \right)$$

그러므로, 기존의 방법과는 차이가 있는 안정성 해석법으로써 (A.5)를 선택한다.

$$c_j = |a_{R_j}| + \max_i |\Delta a_{ij}(t)| + \frac{\max_i |\Delta b_i(t)|}{\min_i |b_i|} \left( \max_i |a_{di} + a_{R_j} - a_{ij}| \right) \quad (A.5)$$

$j = 1, 2, \dots, n$

**부록 B**

**보조 정리 1**을 증명하기 위해 다음의 정리 3이 필요하다.

**정리 3** : 다음과 같은 시스템을 고려해 보자.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{e}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{u}(t) - \Phi[t, \mathbf{y}(t)] \quad (B.1)$$

여기서,  $\mathbf{x}(t) \in R^n$ ,  $\mathbf{u}(t) \in R^m$ ,  $\mathbf{y}(t) \in R^l$  이고,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ 는 알맞은 차수를 갖는 행렬이다. 그리고,  $\Phi: R_+ \times R^l \rightarrow R^m$ 는  $\Phi(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ,  $\forall t \geq 0$ 를 만족한다.

만약 아래의 세 조건을 만족한다면,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 는 외부입력이 없는 시스템의 전역 평형점이다.

- i)  $\Phi$ 는 전역 Lipschitz 연속적(globally Lipschitz continuous)이다. 즉,
 
$$\|\Phi(t, \mathbf{y}_1) - \Phi(t, \mathbf{y}_2)\| \leq \mu \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|, \quad \forall t \geq 0, \forall \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in R^l$$
 를 만족시키는 상수  $\mu$ 가 존재한다.
- ii)  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 는 가제어성을 갖고,  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ 는 가관측성을 갖는다.
- iii) 외부 입력이 주어지는 시스템은  $L_2$  안정한다.

**증명** : 이 정리에 대한 증명은 참고논문 [16]에서 보이고 있다.

**보조정리 1**을 증명하기 위해서 페루프 시스템 (7)을 (B.1)과 같이 나타낸다.

여기서,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & a_{d3} & \dots & a_{dn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} a_{N1}(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{N2}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{N3}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{Nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -d \end{bmatrix} \quad (B.2)$$

$a_{N_j}(t)$ 는 모든  $j$ ,  $t$ 에 대해서 임의의 범위 안에 존재하기 때문에, 모든  $t$ 에 대해서  $\|\Phi(t)\| \leq \mu$ 라고 가정할 수 있다. 여기서,  $\mu$ 는 임의의 상수값을 갖는다. 그러므로, 임의의  $t \geq 0$ 와  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ 에 대해서 다음의 부등식이 성립한다.

$$\|\Phi(t)\mathbf{y}_1 - \Phi(t)\mathbf{y}_2\| = \|\Phi(t)(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\| \leq \|\Phi(t)\| \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \leq \mu \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \quad (B.3)$$

그러므로,  $\Phi(t)$  globally Lipschitz continuous하고,  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 와  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ 는  $a_d$ 에 상관없이 각각 제어 가능하고 관측 가능하다. 결과적으로, LMI(B.4)를 만족하는  $\mathbf{P} > \mathbf{0}$ 와  $\tau \geq 0$ 가 존재한다면, 입력이 주어진 시스템은 정

리 1에 의해서  $L_2$  안정하다.

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A + D^T D + \tau C^T C & P B & P \\ B^T P & -\tau I & 0 \\ P & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (B.4)$$

그러므로, 정리 3에 의해,  $x=0$ 는 (7)식의 외부입력이 없는 시스템에 대한 전역 평형점이다. ■

부록 C

$$\begin{bmatrix} A^T(\sum_{i=1}^n \frac{\bar{P}_i}{n}) + (\sum_{i=1}^n \frac{\bar{P}_i}{n}) A + D^T D + \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\tau}_i}{n} \bar{C}_i^T \bar{C}_i & (\sum_{i=1}^n \frac{\bar{P}_i}{n}) B & (\sum_{i=1}^n \frac{\bar{P}_i}{n}) \\ B^T(\sum_{i=1}^n \frac{\bar{P}_i}{n}) & -(\sum_{i=1}^n \frac{\bar{\tau}_i}{n}) I & 0 \\ (\sum_{i=1}^n \frac{\bar{P}_i}{n}) & 0 & -\gamma_{\max}^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} A^T(\sum_{i=1}^n \frac{\bar{P}_i}{n}) + (\sum_{i=1}^n \frac{\bar{P}_i}{n}) A + D^T D + (\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{\bar{\tau}_i}{n}} \bar{C}_i^T) (\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{\bar{\tau}_i}{n}} \bar{C}_i) & (\sum_{i=1}^n \frac{\bar{P}_i}{n}) B & (\sum_{i=1}^n \frac{\bar{P}_i}{n}) \\ B^T(\sum_{i=1}^n \frac{\bar{P}_i}{n}) & -(\sum_{i=1}^n \frac{\bar{\tau}_i}{n}) I & 0 \\ (\sum_{i=1}^n \frac{\bar{P}_i}{n}) & 0 & -\gamma_{\max}^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (33)$$

$$\left\{ a_{Rj} \left| a_{Rj} \right| + \max_i | \Delta a_{ij}(t) | + \frac{\max_i | \Delta b_i(t) |}{\min_i | b_i |} \left( \max_i | a_{di} + a_{Rj} - a_{ij} | \right) \leq c_j^m \right\} \quad (36)$$

$j = 1, 2, \dots, n$

저 자 소개



**Chang-Ho Hyun**

was born in Seoul, Korea. He received the B.S. degree in control and instrumentation engineering from Kwangwoon University and M.S. degree in electrical and electronic engineering from Yonsei University, Seoul, Korea, in 1999 and 2002, respectively. He is currently taking a doctoral courseto in electrical and electronic engineering at Yonsei

University, Seoul, Korea. His current research interests include fuzzy control theory and nonlinear control theory.

Phone : +82-2-2123-2868  
 Fax : +82-2-312-2333  
 E-mail : hhyun6@hotmail.com



**Chang-Woo Park**

was born in Seoul, Korea, in 1973. He received the B.S. degree in electronics from Korea University and M.S. degree and Ph.D degree in electronics from Yonsei University, Seoul, Korea, in 1997 and 1999, respectively. He is currently working for KETI, Kyunggi, Korea. His current research interests include fuzzy control theory, nonlinear control theory,

robot vision system and robotics.

Phone : +82-2-2123-2868  
 Fax : +82-2-312-2333  
 E-mail : cwpark@yeics.yonsei.ac.kr



**Mignon Park**

received the B.S. and M.S. degrees in electronics from Yonsei University, Seoul, Korea, in 1973 and 1977, respectively, and the Ph. D. degree from the University of Tokyo, Tokyo, Japan, in 1982. Since 1982, he has been a Professor in the Electrical and Computer Department of Yonsei University.

His research interests include fuzzy control and application engineering, robotics, and fuzzy biomedical system, etc.

Phone : +82-2-2123-2868  
 Fax : +82-2-312-2333  
 E-mail : mignpark@yonsei.ac.kr