韓國經營科學會誌
第28卷 第4號
2003年 12月

그래프분할문제*

명 영 수**

The Graph Partition Problem*

Young-Soo Myung**

■ Abstract ■

In this paper, we present a survey about the various graph partition problems including the clustering problem, the k-cut problem, the multiterminal cut problem, the multicut problem, the sparsest cut problem, the network attack problem, the network disconnection problem. We compare those problems focusing on the problem characteristics such as the objective function and the conditions that the partitioned clusters should satisfy. We also introduce the mathematical programming formulations, and the solution approaches developed for the problems.

Keyword : Graph Partition, Clustering, Multicut, Survey

1. 서 론

그래프분할문제(graph partition problem)는 무방향그래프(undirected graph)와 각 에지(edge)별 가중치 및 노드(node)별 가중치가 주어져 있을 때, 정해진 목적에 가장 부합하도록 노드를 몇 개의 그룹으로 분할하는 문제이다. 분할된 노드의 그룹을 클러스터(cluster)라고 부르는데 분할되는 클러스터는 일정한 조건을 만족하도록 제약이 주어진다. 그래프분할문제는 클러스터링(clustering), VLSI 설계 등 다양한 문제에 응용될 수 있고, 조합최적화(combinatorial optimization) 분야의 대표적 문제 중 하나라는 이론적 중요성 때문에 많은 연구가 이루어져 왔다[26, 29]. 특히 최근에는 통신네트워크의 설계와 관련한 응용 예도 많이 알려지고 있다[27, 33, 35].

논문접수일 : 2003년 10월 4일 논문게재확정일 : 2003년 11월 19일
* 이 논문은 2003년도 단국대학교 대학연구비에 의하여 연구되었음.
** 단국대학교 경상학부 교수

그래프를 분할한다는 점에서는 동일하나 분할 후에 생기는 클러스터의 조건이나 분할의 목적이 서로 다른 다양한 형태의 그래프분할문제들을 문헌에서 발견할 수 있다. 이러한 문제들은 다양한 이름으로 지칭되었고, 연구결과도 경영과학, 컴퓨터이론, 응용수학, 공학 등의 여러 분야에서 발표되었다. 이 문제들은 외형상 비슷한 구조를 갖고 있어서 수학적 모형을 수립하고 해법을 개발하는 경우에 서로 참고가 될 수 있다. 그러나 한편으로는 비슷한 구조에도 불구하고 계산상의 복잡성 (computational complexity) 등 문제의 성격은 크게 다른 경우도 있다. 따라서 그래프분할문제의 응용성을 고려할 때 여러 유사한 문제들을 망라하여 비교하는 연구가 필요하다. 그러나 이제까지는 다양한 그래프분할문제들을 비교 분석하는 연구는 이루어진 적이 없고, 개별문제에 대한 모형 및 해법에 국한된 서베이(survey) 형태의 논문이 발표되었을 뿐이다.

본 논문의 목적은 다양한 유형의 그래프분할문제를 속성에 따라 분류하고, 분류된 문제들에 대해서 문제의 복잡성, 수학적인 모형, 해법들을 소개하는 것이다. 본 논문에서는 그동안 많은 연구가 이루어졌던 clustering 문제, k-cut 문제, multiterminal cut 문제, multicut 문제, sparsest cut 문제, 네트워크 공격문제, 네트워크 단절문제 등을 소개하고, 이러한 문제들이 그래프분할문제의 한 유형이며 각 문제는 그래프를 분할한 후에 생성되는 클러스터의 개수 및 구성 조건, 목적함수의 형태에만 차이가 있음을 보인다.

그 동안 학계에 발표된 여러 논문에서도 논문에서 다루고 있는 문제가 그래프분할문제의 한 유형임에도 불구하고, 문헌조사의 부족으로 논문의 대상문제와 기존에 소개된 그래프분할문제들과의 상이점에 대한 분석이 충분치 못한 경우가 많았다. 최근의 통신네트워크 설계 등에 그래프분할문제가 자주 응용됨을 고려할 때 이러한 문제들을 망라하여 비교 분석한 연구가 존재한다면 유사한 문제를 다루는 연구에 크게 도움이 될 것으로 생각된다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2장에서는 clustering 문제, k-cut 문제, multiterminal cut 문제, multicut 문제, sparsest cut 문제, 네트워크 공격문제, 네트워크 단절문제 등을 소개하고 이러한 문제들을 그래프분할문제의 체계에서 비교한다. 3장에서는 2장에서 소개된 대표적인 그래프분할문제들의 계산상의 복잡성을 소개하고 4장에서는 이들의 수학적인 모형을 소개한다. 5장에서는 각 문제들을 풀기 위해서 개발된 해법들을 소개하기로 한다.

2. 그래프분할문제들

그래프분할문제를 일반화하여서 정의하면 다음과 같다. 연결되어 있는(connected) 무방향그래프(undirected graph) $G=(V,E)$와 각 에지(edge)별 가중치 c_e 및 노드(node)별 가중치 w_i가 주어져 있을 때, 그래프분할문제는 미리 정해진 목적에 가장 적합하도록 노드를 클러스터로 분할하는 문제이다. 이 때 분할되는 클러스터가 갖추어야 할 조건을 사전에 정할 수도 있다. 이와 같은 정의에 비추어 볼 때, 이제까지 조합최적화 분야에서 다루어졌던 clustering 문제, k-cut 문제, multiterminal cut 문제, multicut 문제, sparsest cut 문제, 네트워크 공격문제, 네트워크 단절문제 등은 모두 그래프분할문제의 한 유형이라고 할 수 있다. 각 문제들의 정의는 다음과 같다. 에지들 중에서 서로 다른 클러스터에 속한 노드를 연결하는 에지를 클러스터간 에지(intercluster edge)라고 부르기로 하자.

- Clustering 문제

클러스터간 에지에 대한 가중치의 합이 최소가 되도록 노드를 분할하는 문제이다. 가장 기본적인 문제는 별도의 제약조건이 없는 경우이나, 클러스터를 구성하는 노드의 개수, 클러스터를 구성하는 노드의 가중치의 합 등에 제약이 있는 확장된 clustering 문제를 다룬 연구도 많이 발표되었다.

• k-cut 문제

클러스터간 에지에 대한 가중치의 합이 최소가 되도록 노드를 k개 이상의 클러스터로 분할하는 문제이다. 주어진 그래프가 연결되어 있고 가중치가 비음조건을 만족한다고 가정하므로 k개의 클러스터를 넘지 않게 분할하는 최적해가 항상 존재한다.

• Multiterminal cut 문제

클러스터간 에지에 대한 가중치의 합이 최소가 되도록 노드를 분할하되, 미리 정해진 terminal 노드들은 서로 다른 클러스터에 속하도록 그래프를 분할하는 문제이다.

• Multicut 문제

두 개의 노드로 구성되는 노드 쌍 $\{s_i, t_i\}$, $\forall i \in K$가 주어져 있을 때 클러스터간 에지에 대한 가중치의 합이 최소가 되도록 노드를 분할하되, 각 $i \in K$에 대해서 s_i와 t_i는 서로 다른 클러스터에 포함되도록 그래프를 분할하는 문제이다.

• Sparsest cut 문제

이 문제에서는 두 개의 노드로 구성되는 노드 쌍 $\{s_i, t_i\}$, $\forall i \in K$와 각 노드 쌍에 s_i와 t_i 사이의 흐름의 수요를 의미하는 가중치 d_i가 주어져 있다. sparsest cut 문제는 클러스터간 에지에 대한 가중치의 합을 s_i와 t_i가 서로 다른 클러스터에 속하는 노드 쌍들의 가중치의 합으로 나눈 비율이 최소가 되도록 노드를 분할하는 문제이다. 이 문제에서 에지의 가중치가 에지의 용량(capacity)을 의미하면, cut을 통과하는 수요에 대한 cut을 구성하는 에지의 용량의 비율이 최소인 cut이 최적해가 된다. 이러한 cut이 sparsest cut이며 병목이 가장 심한 cut을 의미한다.

• 네트워크 공격문제

주어진 그래프는 연결되어 있으므로 모든 노드들은 처음에는 한 개의 클러스터에 속한다고 할 수 있다. 네트워크 공격문제에서 에지의 가중치는 에지를 제거하는데 드는 비용을 의미한다. 그리고 에지의 제거로 클러스터의 수가 늘어나면 서로 다른 클러스터에 속한 노드끼리는 연결이 끊어지므로 공격자의 입장에서는 이익이 발생한다. 클러스터가 하나 추가될 때의 이익을 π라고 하면, 네트워크 공격문제는 공격자의 비용(클러스터간 에지에 대한 가중치의 합에서 (클러스터의 개수 - 1) × π를 뺀 값)이 최소가 되도록 노드를 분할하는 문제이다.

• 네트워크 단절문제

네트워크 단절문제도 네트워크 공격문제와 같이 에지의 가중치는 에지를 제거하는데 드는 비용을 의미한다. 네트워크 단절문제에서는 연결의 중심지가 되는 원천노드가 존재하고 공격자의 이익은 원천노드와 연결이 끊어지는 노드의 가중치로 표시된다. 따라서 네트워크 단절문제는 에지를 제거하는데 드는 비용의 합은 주어진 예산의 범위를 넘지 않도록 하면서, 원천노드와 연결이 끊어지는 노드들의 가중치의 합이 최대가 되도록 에지를 제거하는 것이다.

네트워크 단절문제는 네트워크를 원천노드가 속하는 클러스터와 그렇지 않은 두 개의 클러스터로 분할하는 문제로 생각할 수 있다. 즉, 클러스터간 에지에 대한 가중치의 합이 정해진 예산 이하가 되도록 하면서 원천노드가 포함되지 않는 클러스터에 속할 노드들의 가중치의 합이 최대가 되도록 그래프를 분할하는 문제이다.

별도의 제약조건이 없는 clustering 문제는 에지의 가중치가 비음조건을 만족하는 경우에는 분할을 하지 않는 것이 최적이므로 무의미한 문제가 된다. 따라서 이 경우에는 에지의 가중치에 음의 값도 존재하는 것으로 가정한다. 그러나 이 경우를 제외한 나머지 문제들에서는 각 가중치들은 비음의 조건을 만족하는 것으로 가정한다. 많은 문헌들에서는 그래프분할문제라는 명칭을 대개 clustering 문제를 지칭하는 것으로 사용하였다. 그러나 대상문제를 그래프분할문제로 지칭한 많은 연구가 추가적인 제약조건이 있는 clustering 문제를 다루

〈표 1〉 그래프 분할문제들의 속성

문 제	목 적 함 수	클러스터의 수	클러스터의 조건
clustering 문제	$c(\delta(V_1,\cdots,V_p))$		
k-cut 문제	$c(\delta(V_1,\cdots,V_p))$	k개 이상	
multiterminal cut 문제	$c(\delta(V_1,\cdots,V_p))$		terminal 노드를 한 개 포함
multicut 문제	$c(\delta(V_1,\cdots,V_p))$		$\lvert V_i \cap \{s_k, t_k\}\rvert \le 1, \forall i, k$
sparsest cut 문제	$\dfrac{c(\delta(V_1,\cdots,V_p))}{d(V_1,\cdots,V_p)}$		
네트워크 공격문제	$c(\delta(V_1,\cdots,V_p)) - \pi(p-1)$		
네트워크 단절문제	$w(V \setminus V_1)$	2개	$c(\delta(V_1, V\setminus V_1)) \le$ 예산

고 있어서, 실제로는 기타의 명칭으로 정의한 문제와 구별이 모호한 경우도 많다. 게다가 앞에서 소개한 모든 문제들은 그래프분할문제의 포괄적 정의에 부합된다. 따라서 그래프분할문제의 명칭은 위에 소개된 모든 문제들을 포함하는 일반화한 문제를 지칭하는 것으로 사용하고, 각각의 문제들은 그래프를 분할한 뒤에 생성되는 클러스터의 수 및 구성 조건, 목적함수에 차이가 나는 특별한 유형의 그래프분할문제로 파악하는 것이 바람직하다.

그래프분할문제를 좀 더 명확히 표현하고, 표기의 편의를 위하여 다음과 같은 기호를 정의하기로 한다. 주어진 그래프에서 노드의 집합을 $V=\{1,\cdots,n\}$, 무방향 에지의 집합을 $E=\{1,\cdots,m\}$로 표시한다. 두 노드 $i\in V$와 $j\in V$에 걸쳐있는 에지를 $e=\{i,j\}$로 표시하기로 하고 두 노드 i와 j를 에지 e의 종단노드(end nodes)라고 부르기로 한다. 노드의 집합 V에 대해서 $V=V_1\cup\cdots\cup V_p$, 이고 $V_i\cap V_j=\emptyset, \forall 1\le i\ne j\le p$을 만족하는 V의 부분집합 V_i로 클러스터를 표시하고 $(V_1,\cdots,V_p)$를 V의 분할(partition)이라고 정의한다. 그리고 $(V_1,\cdots,V_p)$에 대해서 $\delta(V_1,\cdots,V_p)$는 종단노드가 서로 다른 클러스터에 속하게 되는 에지의 집합, 즉 클러스터간 에지의 집합을 나타내는 것으로 정의한다. 에지의 비용과 노드의 가중치에 대한 합을 표현하기 위하여 에지의 부분집합 $E'\subseteq E$에 대해서 $c(E')=\sum_{e\in E'} c_e$, 노드의 부분집합 $S\subseteq V$에 대해서 $w(S)=\sum_{i\in S} w_i$의 기호를 사용하기로 한다. 각 노드 쌍 $\{s_i, t_i\}$, $\forall i\in K$의 가중치 d_i에 대해서 $d(V_1,\cdots,V_p)$는 노드 쌍의 한 쪽 노드가 서로 다른 클러스터에 속하게 되는 노드 쌍들의 가중치의 합을 표시하는 것으로 정의한다. 네트워크 단절문제에 정의되는 원천노드는 항상 클러스터 V_1에 속하는 것으로 가정한다.

이를 이용하여 앞에서 소개한 그래프분할문제들을 비교하면 <표 1>과 같이 요약할 수 있다.

3. 그래프분할문제들의 복잡성

2장에서 소개된 그래프분할문제들은 비슷한 구조를 갖고 있음에도 불구하고 계산상의 복잡성은 크게 다른 경우도 있다. 본 장에서는 각 문제들의 계산상의 복잡성에 대해서 이제까지 알려진 내용을 소개하기로 한다.

- Clustering 문제

Wakabayashi [36]는 NP-hard 문제인 max-cut 문제가 clustering 문제로 변형될 수 있음을 보임으로써 후자의 문제도 NP-hard임을 증명하였다. 또한, 에지의 가중치가 0, 1, -1의 값만을 갖는 경우도 NP-hard임을 증명하였다. Hyafil와 Rivest

[24]는 에지의 가중치가 모두 1이며 클러스터에 포함되는 노드의 수가 일정한 개수 이하로 제약되는 clustering 문제도 NP-hard임을 증명하였다. 이들은 증명을 위하여 NP-complete 문제인 Partition into triangles 문제를 이용하였다.

- k-cut 문제

Goldschmidt와 Hochbaum[21]은 k가 임의의 값으로 주어질 때는 에지의 가중치가 1인 경우도 NP-hard 임을 증명하였다. 이들은 NP-hard 문제인 max-clique 문제가 k-cut 문제로 변형될 수 있음을 보임으로써 증명하였다. 그러나 문제의 크기와 k에 대해서 다항함수로 표시되는 시간 안에 k-cut 문제를 풀 수 있는 해법을 제시함으로써 k가 문제의 입력자료로 주어지지 않는 경우에는 k-cut 문제가 P에 속함을 증명하였다. 또한 주어진 그래프가 planar 그래프인 경우에도 문제의 복잡성에 대한 결과는 달라지지 않음을 증명하였다.

- Multiterminal cut 문제

Dahlhaus 등[15]은 terminal 노드가 3개 이상인 multiterminal cut 문제는 에지의 가중치가 1인 경우도 NP-hard임을 증명하였다. 이들은 NP-hard 문제인 max-cut 문제가 multiterminal cut 문제로 변형될 수 있음을 이용하였다. 참고로 terminal 노드가 2개인 multitermial cut 문제는 두 노드를 분할하는 min-cut을 구하는 문제이므로 다항시간 안에 풀 수 있다. 주어진 그래프가 planar 그래프인 경우에는 terminal 노드의 개수가 임의의 값으로 주어질 때는 여전히 NP-hard이나, terminal 노드의 개수가 고정된 값으로 주어질 때는 다항시간에 풀 수 있는 해법이 가능하여 P에 속하게 된다.

- Multicut 문제

multiterminal cut 문제는 multicut 문제로 변형이 된다. 즉 전자의 문제에 주어진 terminal 노드 두 개로 구성되는 집합마다 multiterminal cut 문제의 노드 쌍을 하나씩 대응시키면 된다. 따라서 multicut 문제는 NP-hard임을 알 수 있다.

- Sparsest cut 문제

Matula와 Shahrokhi[31]는 NP-hard 문제인 max-cut 문제가 sparsest cut 문제로 변형될 수 있을 보임으로써 후자의 문제도 NP-hard임을 증명하였다. sparsest cut 문제에 주어진 노드 쌍 $\{s_i, t_i\}$, $\forall i \in K$에서 모든 s_i가 동일한 노드이거나 모든 t_i가 동일한 노드인 경우에는 다항시간에 풀 수 있어서, 이러한 조건을 만족하는 sparsest cut 문제는 P에 속하게 된다.

- 네트워크 공격문제

Cunningham [14]은 네트워크 공격문제를 다항시간에 풀 수 있는 해법을 제시하였다. 따라서 네트워크 공격문제는 P에 속하는 문제이다.

- 네트워크 단절문제

Martel 등[30]은 NP-hard 문제인 max-clique 문제가 에지와 노드의 가중치가 1인 경우의 네트워크 단절문제로 변형될 수 있음을 보임으로써 후자의 문제도 NP-hard임을 증명하였다.

4. 그래프분할문제들의 수리계획모형

4장에서는 2장에서 소개된 그래프분할문제들의 수리계획모형에 대해서 소개하기로 한다. 이러한 모형들은 문제의 특성을 이해하는데 도움을 주는 것은 물론, 해당문제의 최적해를 구하는데 중요한 역할을 하게 된다. 예로서 주어진 모형이 정수계획모형을 갖는 경우에, 이에 대한 선형계획 완화문제(linear programming relaxation)를 이용하여 하한(lower bound)을 구할 수 있고, 이를 이용하여 분단탐색법(branch and bound method)을 통해서 최적해를 구할 수도 있다.

그래프분할문제의 수리계획모형은 문제의 특성에 따라 달라지고, 같은 문제라도 다양한 형태로 모형을 구성할 수 있다. 각각의 문제에 따른 모형을 소개하기 전에 각 모형에서 공통적으로 사용될 변수들을 정의하기로 하자. 이러한 변수는 모형에 따라 일부의 변수만 사용되기도 하고 추가적인 변

수와 함께 사용되기도 한다. 특정의 에지가 클러스·터간 에지인지를 나타내는 변수 x_e, $\forall e \in E$와 어떤 노드가 어떤 클러스터에 속하는지를 나타내는 변수 y_{it}, $\forall 1 \le i, t \le n$를 다음과 같이 정의하기로 한다.

$$x_e = \begin{cases} 1, & \text{에지 } e\text{가 서로 다른 클러스터에 속한 노드를 연결할 때} \\ 0, & \text{위와 다른 경우} \end{cases}$$

$$y_{it} = \begin{cases} 1, & \text{노드 } i\text{가 클러스터 } t\text{에 속한 경우} \\ 0, & \text{위와 다른 경우} \end{cases}$$

위의 변수들끼리는 밀접한 관계가 있다. 예로서 $e=\{i,j\}$인 경우에 어떤 클러스터 t에 대해서 $y_{it}=y_{jt}=1$ 이면, 에지 e는 같은 클러스터에 포함되므로 $x_e=0$이고, y_{it}와 y_{jt} 중에 하나는 0이고 다른 하나는 1이면, 에지 e는 다른 클러스터에 포함되므로 $x_e=1$이어야 한다. 이러한 변수간의 관계를 다음과 같은 식으로 표시할 수 있다.

$$\left.\begin{array}{r} y_{it}+y_{jt}+x_{\{i,j\}} \le 2 \\ y_{it}-y_{jt}-x_{\{i,j\}} \le 0 \\ -y_{it}+y_{jt}-x_{\{i,j\}} \le 0 \end{array}\right\} \forall \{i,j\} \in E,\ 1 \le t \le n \qquad \text{(C1)}$$

- Clustering 문제

Clustering 문제는 위에서 정의된 변수와 제약식 (C1)을 이용하여 다음과 같은 정수계획모형으로 표현할 수 있다. 제약식 (1)은 각 노드는 적어도 하나의 클러스터에 할당됨을 의미한다.

$(CL1)$

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{e \in E} c_e x_e & \\ s.t. & \sum_{t=1}^{n} y_{it} = 1, \quad \forall 1 \le i \le n & (1) \\ & \left.\begin{array}{r} y_{it}+y_{jt}+x_{\{i,j\}} \le 2 \\ y_{it}-y_{jt}-x_{\{i,j\}} \le 0 \\ -y_{it}+y_{jt}-x_{\{i,j\}} \le 0 \end{array}\right\} & \\ & \qquad \forall \{i,j\} \in E,\ 1 \le t \le n & \text{(C1)} \\ & x_e \in \{0,1\}, \quad \forall e \in E, & (2) \\ & y_{it} \in \{0,1\}, \quad \forall 1 \le i, t \le n, & (3) \end{array}$$

Clustering 문제는 cut과 cycle의 관계를 이용하면 에지변수만을 사용한 정수계획모형으로도 표현할 수 있다. 그래프 G에 포함된 임의의 cycle C에 대하여 C를 구성하는 에지의 집합을 $E(C)$로 표시하기로 하자. 그러면 C에 속한 한 에지가 cut에 포함되면 또 다른 에지들 중 하나 이상이 cut에 포함되어야 한다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\sum_{e \in E(C) \setminus \{e'\}} x_e - x_{e'} \ge 0,$$
$$\forall e' \in E(C),\ G\text{에 속한 모든 } cycle\ C \qquad \text{(C2)}$$

그러면 clustering 문제는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$(CL2) \qquad \min \sum_{e \in E} c_e x_e$$
$$s.t. \quad \text{(C2), (2)}$$

$(CL2)$는 Chopra와 Rao[9]에 의하여 제시되었다. 주어진 그래프가 complete 그래프(모든 노드 쌍간에 에지가 존재하는 그래프)인 경우에는 임의의 cycle에 대한 식 (C2)은 3개의 노드와 에지로 이루어지는 cycle에 대한 식 (C2)의 합으로 표시될 수 있다. 따라서 주어진 그래프가 complete 그래프인 경우에는 식 (C2)은 3개의 노드와 에지로 이루어지는 cycle에 대한 제약식만으로 표시가 가능하고 이러한 사실은 Grötchel과 Wakabayashi[22, 23]에 의하여 활용되었다.

에지변수와 y_{it} 변수를 함께 이용하는 $(CL1)$은 제약식의 수가 문제의 크기에 대해서 다항식으로 표시할 수 있어서 선형계획 완화문제를 다항시간에 풀 수 있고, 제약식의 개수가 지수식으로 표시되는 $(CL2)$보다 간결하다. 그러나 $(CL1)$은 동일한 분할을 클러스터의 번호가 다르게 부여되면 서로 다른 실행가능해로 인식하는 단점을 갖고 있다. $(CL2)$는 많은 수의 제약식 (C2)를 갖고 있으나 제약식 (C2)의 분리문제(separation problem)를 다항시간에 풀 수 있어서 $(CL2)$의 선형계획 완화문제도 다항시간에 풀 수 있다. 또한 선형계획 완화

문제를 이용하여 하한을 구하는 경우에 ($CL1$)은 ($CL2$)보다 열등한 하한을 제공한다.

- k-cut 문제

k-cut 문제는 clustering 문제에 클러스터의 수가 k개 이상이라는 추가적인 제약만 표시할 수 있으면 된다. 2장에서 언급한대로 최적해는 k개의 클러스터로 분할되므로 ($CL1$)처럼 에지변수와 y_{it} 변수를 함께 이용하여 표현하는 경우에는 t의 범위를 $1 \le t \le k$로 제한하고, 각 클러스터에 적어도 하나의 노드 이상은 할당되도록 하여주는 제약식을 추가하면 된다. 이 때 (C1)의 첫 번째 제약식은 에지의 가중치가 비음이므로 생략할 수 있다. 그러면 다음과 같은 정수계획모형으로 k-cut 문제를 표현할 수 있다.

($kC1$)

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

$$s.t. \quad \sum_{t=1}^{k} y_{it} = 1, \quad \forall\, 1 \le i \le n \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{rl} y_{it} - y_{jt} - x_{\{i,j\}} & \le 0 \\ -y_{it} + y_{jt} - x_{\{i,j\}} & \le 0 \end{array}\right\}$$

$$\forall \{i,j\} \in E,\ 1 \le t \le k \qquad (C1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_{it} \ge 1, \qquad \forall\, 1 \le t \le k \qquad (C3)$$

$$x_e \in \{0,1\}, \qquad \forall e \in E, \qquad (2)$$

$$y_{it} \in \{0,1\}, \qquad \forall 1 \le i \le n,\ 1 \le t \le k, \quad (3)$$

주어진 그래프가 complete 그래프인 경우에는 k-cut 문제를 ($CL2$)처럼 에지변수만을 사용하여 표시하는 것도 가능하다. 이를 위해서 k-cut과 모든 노드를 연결하는 spanning tree와의 교집합은 k-1개 이상의 에지로 이루어진다는 사실을 이용한다. 임의의 spanning tree T에 대하여 T에 포함된 에지의 집합을 $E(T)$로 표시하기로 하자. 그러면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\sum_{e \in E(T)} x_e \ge k-1,\ \forall\ G\text{의 spanning tree } T \quad (C4)$$

이를 이용하면 k-cut 문제를 다음과 같이 표현할 수 있다[16].

$$(kC2) \qquad \min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

$$s.t. \ \text{(C4), (2)}$$

주어진 그래프가 complete 그래프가 아닌 경우에는 ($kC2$)의 실행가능해는 k개 미만의 클러스터로 구성되는 경우도 있어서 ($kC2$)는 적절한 모형이 될 수 없음에 유의해야 한다.

- Multiterminal cut 문제

Multiterminal cut 문제에서는 미리 정해진 terminal 노드들을 서로 다른 클러스터에 속하도록 분할하여야 한다. terminal 노드의 집합을 $K = \{1, 2, \cdots, k\}$라 하자. 그러면 각 terminal 노드 $i \in K$가 클러스터 i에 포함되는 k-cut 문제로 생각할 수 있다. 따라서 ($kC1$)의 모형에서 y_{it} 변수의 값을 다음과 같이 고정시키면 multiterminal cut 문제의 모형이 된다.

$$y_{ii} = 1, \ \forall\, 1 \le i \le k$$

$$y_{it} = 0, \ \forall\, 1 \le i \ne t \le k$$

이 경우에 $1 \le i \le k$에 대한 식 (1)과 식 (C3)은 필요 없게 된다. 이렇게 정의된 모형을 ($MTC1$)이라고 정의하자.

Bertsimas 등[5]은 ($MTC1$)에서 (C1)을 다음과 같은 제약식으로 대체할 수 있음을 밝혔다.

$$2x_{\{i,j\}} \ge \sum_{t=1}^{k} |y_{it} - y_{jt}|, \ \forall \{i,j\} \in E$$

위의 식은 절대값 함수를 갖고 있어서 선형식이 아니나 변수를 추가로 도입하면 선형식으로 표현할 수 있다. 이와 같이 하여 만들어진 수리계획 모형을 ($MTC2$)라고 하자.

또한 Chopra와 Owen[7], Cunningham[13]은 에지변수만을 사용하는 모형을 제시하였다. 이를 위해서 그래프 G의 부분그래프(subgraph) 중에서

leaf 노드가 terminal 노드로 이루어진 tree를 K-tree라고 정의하자. 여기서 leaf 노드란 연결된 에지가 하나뿐인 노드를 의미한다. 그러면 다음이 성립한다.

$$\sum_{e \in E(T)} x_e \geq |T \cap K| - 1, \forall \ G\text{의 } K-\text{ tree } T \quad (C5)$$

그러면 multiterminal cut 문제를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$(MTC3) \qquad \min \sum_{e \in E} c_e x_e$$
$$s.t. \ (C5), (2)$$

세 가지 모형 중에서 선형계획 완화문제가 제공하는 하한은 $(MTC2)$의 경우가 가장 정수해에 가까운 것으로 알려져 있다. multiterminal cut 문제의 추가적인 수리계획 모형과 이러한 모형들의 선형계획 완화문제가 제공하는 하한의 효율성에 대한 자세한 내용은 Bertsimas 등[5]과 Chopra와 Owen[7]의 연구를 참조할 수 있다.

● Multicut 문제

Multicut 문제에서는 두 개의 노드로 구성되는 노드 쌍 $\{s_i, t_i\}$, $\forall i \in K$가 주어져 있고, 각 i에 대해서 s_i와 t_i는 서로 다른 클러스터에 속하도록 그래프가 분할되어야 된다. 따라서 $(CL1)$처럼 에지변수와 y_{it} 변수를 함께 이용하여 표현하려면, s_i와 t_i가 서로 다른 클러스터에 속하도록 하기 위해서 다음과 같은 제약식이 필요하다.

$$y_{s_i,j} + y_{t_i,j} \leq 1, \ \forall 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n \quad (C6)$$

이를 이용하면 multicut 문제를 다음과 같이 표현할 수 있다

$(MC1)$

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

$$s.t. \ \sum_{t=1}^{n} y_{it} = 1, \ \forall \ 1 \leq i \leq n \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{it} - y_{jt} - x_{\{i,j\}} \leq 0 \\ -y_{it} + y_{jt} - x_{\{i,j\}} \leq 0 \end{array}\right\}$$
$$\forall \{i,j\} \in E, 1 \leq t \leq n \quad (C1)$$
$$y_{s_i,j} + y_{t_i,j} \leq 1, \ \forall 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n \quad (C6)$$
$$x_e \in \{0,1\}, \qquad \forall e \in E, \quad (2)$$
$$y_{it} \in \{0,1\}, \qquad \forall 1 \leq i, t \leq n, \quad (3)$$

Multicut 문제도 에지변수만을 사용하여 표시할 수 있다. s_i와 t_i가 서로 다른 클러스터에 속하기 위해서는 s_i와 t_i를 연결하는 경로(path)에 포함되는 에지 중 적어도 하나는 multicut에 포함되어야 한다. 임의의 노드 쌍 $\{s_i, t_i\}$, $\forall i \in K$에 대해서 s_i와 t_i를 연결하는 경로의 집합을 P_i라 하자. 임의의 경로 p에 대하여 p에 포함된 에지의 집합을 $E(p)$로 표시하기로 하자. 그러면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\sum_{e \in E(p)} x_e \geq 1, \ \forall \ p \in P_i, \ i \in K \quad (C7)$$

이를 이용하면 multicut 문제는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$(MC2) \qquad \min \sum_{e \in E} c_e x_e$$
$$s.t. \ (C7), (2)$$

● Sparsest cut 문제

Sparsest cut 문제에서는 두 개의 노드로 구성되는 노드 쌍 $\{s_i, t_i\}$, $\forall i \in K$와 각 노드 쌍에 가중치 d_i가 주어져 있고, 목적은 클러스터간 에지에 대한 가중치의 합을 s_i와 t_i가 서로 다른 클러스터에 속하는 노드 쌍들의 가중치의 합으로 나눈 비율이 최소가 되도록 그래프를 분할하는 것이다. 이 문제는 multicut 문제와 유사하나 multicut 문제에서는 모든 노드 쌍의 s_i와 t_i가 서로 다른 클러스터에 속하여야 하는 것에 반해서 sparsest cut 문제는 목적함수가 최적화되도록 일부의 노드 쌍만 서로 다른 클러스터에 나뉘어 포함될 수 있다. 최

적해에서 서로 다른 클러스터에 속하는 노드 쌍을 표현하기 위해서 변수 z_i, $\forall i \in K$를 추가로 정의하자.

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{노드 쌍 } \{s_i, t_i\}\text{가 서로 다른 클러스터에 속한 경우} \\ 0, & \text{위와 다른 경우} \end{cases}$$

Sparsest cut 문제를 $(CL1)$처럼 에지변수와 y_{it} 변수를 함께 이용하여 표현하는 경우에는 y_{it} 변수와 z_i 변수의 관계를 표시하기 위하여 (C1)과 같은 의미를 갖는 다음의 제약식을 추가하면 된다.

$$\left.\begin{aligned} y_{s_i,j}+y_{t_i,j}+z_i &\le 2 \\ y_{s_i,j}-y_{t_i,j}-z_i &\le 0 \\ -y_{s_i,j}+y_{t_i,j}-z_i &\le 0 \end{aligned}\right\} \forall i \in K,\ 1 \le j \le n \quad \text{(C8)}$$

그러면 sparsest cut 문제는 다음과 같은 정수계획모형으로 표현할 수 있다.

$(SC1)$

$$\min \frac{\sum_{e \in E} c_e x_e}{\sum_{i \in K} d_i z_i}$$

$$s.t.\ \sum_{t=1}^{n} y_{it} = 1, \quad \forall 1 \le i \le n \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} y_{it}-y_{jt}-x_{\{i,j\}} &\le 0 \\ -y_{it}+y_{jt}-x_{\{i,j\}} &\le 0 \end{aligned}\right\} \quad \forall \{i,j\} \in E,\ 1 \le t \le n \quad \text{(C1)}$$

$$\left.\begin{aligned} y_{s_i,j}+y_{t_i,j}+z_i &\le 2 \\ y_{s_i,j}-y_{t_i,j}-z_i &\le 0 \\ -y_{s_i,j}+y_{t_i,j}-z_i &\le 0 \end{aligned}\right] \quad \forall i \in K,\ 1 \le j \le n \quad \text{(C8)}$$

$$x_e \in \{0,1\}, \quad \forall e \in E \quad (2)$$

$$y_{it} \in \{0,1\}, \quad \forall 1 \le i, t \le n, \quad (3)$$

$$z_i \in \{0,1\}, \quad \forall 1 \le i, t \le n \quad (4)$$

Sparsest cut 문제도 y_{it} 변수를 사용하지 않는 수리계획 모형으로 표시할 수 있다. multicut 문제의 모형을 만들 때처럼 임의의 노드 쌍 $\{s_i, t_i\}$, $\forall i \in K$에 대해서 s_i와 t_i를 연결하는 경로의 집합을 P_i로, 임의의 경로 p에 대하여 p에 포함된 에지의 집합을 $E(p)$로 표시하기로 하자. 그러면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\sum_{e \in E(p)} x_e \ge z_i, \quad \forall p \in P_i,\ i \in K \quad \text{(C9)}$$

이를 이용하면 sparsest cut 문제는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$(SC2) \qquad \min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

$$s.t.\ \text{(C9), (2), (4)}$$

● 네트워크 공격문제

이 문제에 대해서는 수리계획모형을 제시한 연구는 발견되지 않는다. 아마도 네트워크 공격문제는 최대흐름문제(max flow problem)를 반복하여 풀어서 다항시간 안에 해를 구할 수 있었기 때문에 별도의 수리계획모형에 대한 필요하지 않았기 때문으로 짐작된다. 실제로 문제의 성격상 클러스터의 개수가 변수로 나타나므로 모형을 표현하기도 쉽지 않다.

● 네트워크 단절문제

사전에 정해진 원천노드를 노드 1로 가정하고 에지를 제거하는데 사용할 수 있는 예산을 b라고 하자. 네트워크 단절문제는 그래프를 두 개의 클러스터로 분할하므로 y_{it} 변수를 다음과 같이 좀 더 간단히 표현할 수 있다.

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{노드 } i\text{가 노드 1과 다른 클러스터에 포함된 경우} \\ 0, & \text{위와 다른 경우} \end{cases}$$

따라서 $y_1 = 0$으로 고정시킬 수 있으며, 어떤 노드 $i \ne 1$에 대해서 $y_i = 1$이면 노드 i는 원천노드와 단절되었음을 의미한다. 그러면 네트워크 단절문제는 다음과 같은 정수계획모형으로 나타낼 수 있다[2].

$(ND1)$

$$max\ z = \sum_{i \in V} w_i y_i$$

$$s.t.\ \sum_{e \in E} c_e x_e \le b, \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{ll} y_i - y_j - x_{\{i,j\}} & \le 0 \\ -y_i + y_j - x_{\{i,j\}} & \le 0 \end{array}\right\} \forall \{i,j\} \in E \quad (C10)$$

$$x_e \in \{0,1\}, \quad \forall e \in E, \quad (2)$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \in V, \quad (6)$$

또한 노드 1과 노드 i를 연결하는 경로의 집합을 P_i라 하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\sum_{e \in E(p)} x_e \ge y_i, \ \ \forall p \in P_i,\ i \in V \backslash \{1\} \quad (C11)$$

그러면 네트워크 단절문제는 다음과 같은 정수계획모형으로도 나타낼 수 있다[32].

$$(ND2) \qquad max\ z = \sum_{i \in V} w_i y_i$$

$$s.t.\ (5),\ (C11),\ (2),\ (6)$$

김현준 등[1]은 두 모형의 선형계획 완화문제가 제공하는 하한은 동일함을 증명하였다.

5. 그래프분할문제들에 대한 해법

이 장에서는 그래프분할문제들을 풀기 위해서 고안된 해법에 대해서 소개하기로 한다. 2장에서 언급한대로 네트워크 공격문제를 제외하면 모든 문제들은 NP-hard 문제이므로 대부분의 해법에 대한 연구는 해당문제의 상한과 하한을 구하는데 초점을 맞추고 있다.

- Clustering 문제

Kernighan와 Lin[26]은 실행가능해를 구하는 휴리스틱을 제시하였다. Grötschel과 Wakabayashi [22, 23]는 complete 그래프에서의 clustering 문제에 대한 절단면해법(cutting plane algorithm)을 개발하였다. 이들은 $(CL2)$ 모형을 기본으로 여러가지의 유효부등식을 사용하여 하한을 구하는 방법을 제시하였다. 또한 Falkner 등[17]과 Lisser와 Rendl[29]은 클러스터에 포함되는 노드에 제약이 있는 문제에 대해서 고유치(eigen value)를 이용한 해법과 semidefinite programming을 이용한 해법을 각각 제시하였다. 또한 Johnson 등[25]은 column generation 방법을 이용한 해법을 제시하였다. Conforti 등[11, 12]과 Ferreira 등[18, 19]은 제약조건이 추가된 clustering 문제의 가해영역(feasible region)에 대한 다면체적 구조(polyhedral structure)를 분석하였다.

- k-cut 문제

Goldschmidt와 Hochbaum[21]은 k가 고정된 값으로 주어지는 경우에 다항시간에 최적해를 구할 수 있는 해법을 제시하였다. 그러나 이 해법은 실용적인 해법은 못된다. Saran과 Vazirani[34]는 최적해에 대해서 $(2-2/k)$배 이내의 실행가능해를 구할 수 있는 해법을 제시하였다. 이러한 해를 $(2-2/k)$ 근사해(approximation solution), 그러한 해를 구하는 해법을 $(2-2/k)$ 근사해법(approximation algorithm)이라고 부른다.

- Multiterminal cut 문제

Chopra와 Rao[8], Chopra와 Owen[7], Cunningham[13]은 절단면해법을 개발하였고 Dahlhaus 등[15]은 $(2-2/k)$ 근사해법을 제시하였다. Calinescu 등[6]은 좀 더 개선된 $(1.5-1/k)$ 근사해법을 개발하였다.

- Multicut 문제

Garg 등[20]은 $O(\log k)$ 근사해법을 제시하였다.

- Sparsest cut 문제

sparsest cut 문제의 근사해를 구하는 해법에 대해서는 많은 연구가 이루어졌다. 이러한 연구 중에서 가장 개선된 해법은 Linial 등[28]과 Auman과 Rabani[3]가 제시한 $O(\log k)$ 근사해법이다.

- 네트워크 공격문제

Cunningham[14]은 네트워크 공격문제의 최적해

를 최대흐름문제를 에지의 수만큼 풀어서 구하는 해법을 제시하였다. Barahona[4]는 최적해를 구할 때 최대흐름문제를 노드의 수만큼 푸는 해법을 제시하였다.

- 네트워크 단절문제

Myung과 Kim[32]은 네트워크 단절문제에 대해서 문제의 크기를 줄이는 과정과 ($ND2$)를 이용하여 하한 및 상한을 도출하는 절차를 개발하였다. 오상민[2]은 타부 탐색 휴리스틱을 개발하였다. 김현준 등[1]은 다양한 휴리스틱과 ($ND1$)과 ($ND2$)의 선형계획 완화문제의 효율을 비교하였다.

6. 결 론

본 논문에서는 문제의 구조가 유사한 clustering 문제, k-cut 문제, multiterminal cut 문제, multicut 문제, 네트워크 공격문제, sparsest cut 문제, 네트워크 단절문제 등을 그래프분할문제의 체계 안에 포함시키고, 각 문제들을 차별화 시키는 속성인 클러스터의 수 및 구성 조건, 목적함수에 따라 분류하였다. 또한 각 문제들에 대해서 문제의 복잡성, 수학적인 모형, 해법들을 소개하였다.

그래프분할문제들은 적용이 가능한 응용분야가 광범위하고, 조합최적화의 다양한 기법을 실험할 수 있는 전형적 문제라는 이론적 중요성 때문에 많은 연구가 이루어지고 있으나 그래프분할문제의 체계에 포함되는 유사한 문제들을 비교 분석한 서베이 형태의 논문은 찾기 어려웠다. 이러한 이유 중 하나는 그래프분할문제에 대한 연구가 경영과학, 컴퓨터이론, 응용수학, 공학 등의 여러 분야에 걸쳐서 다양한 형태로 이루어졌기 때문이라고 생각된다. 따라서 그래프분할문제와 관련된 연구를 할 때, 연구대상이 기존에 소개된 문제들과 어떤 차이가 있는지 분석하고 수리계획모형과 해법을 개발하는데 본 논문이 도움을 줄 수 있을 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

[1] 김현준, 명영수, 박성수, 오상민, "네트워크 단절문제에 대한 상한과 하한을 구하는 해법," working paper, 2003.

[2] 오상민, "네트워크 단절문제에 대한 수리모형과 휴리스틱 해법", 「석사학위논문」, 한국과학기술원, 2003.

[3] Aumann, Y. and Y. Rabani, "Approximate Min-cut Max-clow Theorem and Approximation Algorithm," *SIAM J. Computing*, Vol.27(1998), pp.291-301.

[4] Barahona, F., "Separating from the Dominant of the Spanning Tree Polytope," *Operational Research Letters*, Vol.12(1992), pp.201-203.

[5] Bertsimas, D., C.-P. Teo and R. Vohra, "Analysis of LP Relaxations for Multiway and Multicut Problems," *Networks*, Vol.34 (1998), pp.102-114.

[6] Calinescu, G., H. Karloff and Y. Rabani, *An Improved Approximation Algorithm for Multiway Cut*, Proceedings of the 13th Symposium on Theory of Computing, ACM, 1998.

[7] Chopra, S. and J.H. Owen, "Extended Formulation for the A-cut Problem," *Mathematical Programming*, Vol.73(1996), pp. 7-30.

[8] Chopra, S. and M.R. Rao, "On the Multiway Cut Polyhedron," *Networks*, Vol.21(1991), pp.51-89.

[9] Chopra, S. and M.R. Rao, "The Partition Problem," *Mathematical Programming*, Vol. 59(1993), pp.87-115.

[10] Chvatal, V., "Tough Graphs and Hamiltonian Circuits," *Discrete Mathematics*, Vol.5(1973), pp.215-228.

[11] Conforti, M.R. Rao and A. ssano, "The Equipartition Polytope I : Formulations, Dimension, and Basic Facets," *Mathematical Programming*, Vol.49(1990), pp.49-70.

[12] Conforti, M.R. Rao and A. ssano, "The Equipartition Polytope II : Formulations, Valid Inequalities and Facets," *Mathematical Programming*, Vol.49(1990), pp.71-90.

[13] Cunningham, W.H., "The Optimal Multiterminal Cut Problem," in DIMACS series in *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, Vol.5(1991), pp.105-120.

[14] Cunningham, W.H., "Optimal Attack and Reinforcement of a Network," *J. of ACM*, Vol.32(1985), pp.549-561.

[15] Dalhaus, E., D. Johnson, C. Papadimitriou, P. Seymour and M. Yannakakis, "The Complexity of Multiterminal Cuts," *SIAM J. Computing*, Vol.23(1994), pp.864-894.

[16] Deza, M., M. Grötschel and M. Laurent, "Clique Web Facets for Multicut Polytopes," *Mathematcs of Operations Research*, Vol.17(1992), pp.981-1000.

[17] Falkner, J., F. Rendl and H. Wolkowicz, "A Computational Study of Graph Partitioning," *Mathematical Programming*, Vol.66 (1994), pp.211-239.

[18] Ferreira, C.E., A. Martin, C.C. De Souza, R. Weismantel and L.A. Wolsey, "Formulation and Valid Inequalities for the Node Capacitated Graph Partitioning Problem," *Mathematical Programming*, Vol.74(1996), pp. 247-266.

[19] Ferreira, C.E., A. Martin, C.C. De Souza, R. Weismantel and L.A. Wolsey, "The Node Capacitated Graph Partitioning Problem : A Computational Study," *Mathematical Programming*, Vol.81(1998), pp.229-256.

[20] Garg, N., V. Vazirani and M. Yannakakis, "Approximate Max-flow Min-(multi)cut Theorems and their Applications," *SIAM J. Computing*, Vol.25(1996), pp.235-251.

[21] Goldschmidt, O. and D.S. Hochbaum, "A Polynomial Algorithm for The *k* Cut Problem for Fixed *k*," *Mathematics of Operations Research*, Vol.19(1994), pp.24-37.

[22] Grötschel, M. and Y. Wakabayashi, "A Cutting Plane Algorithm for a Clustering Problem," *Mathematical Programming*, Vol. 45(1989), pp.59-96.

[23] Grötschel, M. and Y. Wakabayashi, "Facets of the Clique Partitioning Polytope," *Mathematical Programming*, Vol.47(1990), pp. 367-387.

[24] Hyafil, L. and R.L. Rivest, *Graph Partitioning and Constructing Optimal Decision Trees are Polynomial Complete Problems*, Report No. 33, IRIA_Labora, Rocquencourt, France, 1973.

[25] Johnson, E.L., A. Mehrotra and G.L. Nemhauser, "Min-cut Clustering," *Mathematical Programming*, Vol.62(1993), pp.133-151.

[26] Kernighan, B.W. and S. Lin, "An Efficient Heuristic Procedure for Partitioning Graphs," *Bell Syst. Tech. J.*, Vol.49(1970), pp.291-307.

[27] Laguna, M., "Clustering for the Design of SONET Rings in Interoffice Telecommunications," *Management Science*, Vol.40 (1994), pp.1533-1541.

[28] Linial, N., E. London, and Y. Rabinovich, "The Geometry of Graphs And Some of its Algorithmic Applications," *Combinatorica*, Vol.15(1995), pp.215-245.

[29] Lisser, A. and F. Rendl, "Graph Partitioning

using Linear and Semidefinite Programming," *Mathematical Programming B*, Vol. 95(2003), pp.91-101.

[30] Martel, C., G. Nuckolls and D. Sniegowski, *Computing the Disconnectivity of a Graph*, Working paper, UC Davis.

[31] Matula, D.W. and F. Shahrokhi, "Sparsest cuts and Bottlenecks in graphs," *Discrete Applied Mathematics*, Vol.27(1990), pp. 113-123.

[32] Myung, Y.-S. and H.-J. Kim, *An Algorithm for the graph disconnection problem*, Working paper, Dankook University, 2003.

[33] Park, K., K. Lee, S. Park and H. Lee, "Telecommunication Node Clustering with Node Compatibility and Network Survivability Requirements," *Management Science*, Vol.46(2000), pp.363-374.

[34] Saran, H. and V. Vazirani, "Finding k Cuts within Twice the Optimal," *SIAM J. Computing*, Vol.24(1995), pp.101-108.

[35] Tcha, D.W., T.-J. Choi and Y.-S. Myung, "Location-area Partition in a Cellular Radio Network," *Journal of Operational Research Society*, Vol.48(1997), pp.1076-1081

[36] Wakabayashi, Y., "The Complexity of Computing Medians of Relations," *Resenhas IME-USP*, Vol.3(1998), pp.323-349.