비최소위상 비선형 시스템의 출력궤환 안정화

Output Feedback Stabilization of Non-Minimum Phase Nonlinear Systems

조 남 훈*
(Nam-Hoon Jo)

Abstract : An output feedback stabilizing controller for non-minimum phase nonlinear systems is presented. We first perform the standard input-output linearization of the system and then transform the zero dynamics into a special normal form in which the antistable part is not affected by the stable part and the antistable part is given in approximately linear form. Under the assumption that the nonlinear system satisfies the observability rank condition, we can design an observer for the extended system that is made of the augmentation of a chain of integrators. The proposed output feedback stabilizing controller can then be designed by combining the observer and the state feedback controller.

Keywords : nonlinear system, non-minimum phase, output feedback, zero dynamics

I. 서론

최근 몇 년간 비선형 시스템을 안정화시킬 수 있는 제어기의 설계기법에 대한 연구가 매우 활발히 진행되어 왔다 [1][2]. 특히, 비선형 궤환 선형화 제어기는 비선형 시스템을 좌표계 변환과 입력 변환에 의해 선형 모델을 얻음으로써 광범위한 동작점에서 선형 특성을 유지할 수 있다는 점에서 그에 대한 많은 연구가 진행되어 왔다. 하지만 이러한 장점에도 불구하고, 비선형 궤환 선형화 제어기를 적용할 수 있는 시스템은 매우 제한적인 단점이 존재하였다. 이런 시스템에 대해서는 시스템의 입출력 관계식만 선형 특성이 유지되도록 하는 입출력 선형화 제어기가 사용되었다. 즉, 최소위상(minimum phase) 비선형 시스템은 안정한 영동특성(zero dynamics)을 갖고 있으므로, 선형으로 표현되는 부시스템(subsystem)에 대한 안정화 제어기를 인가하면 전체 시스템의 안정도를 보장한다. 반면에, 비최소위상(non-minimum phase) 비선형 시스템의 제어는 최소위상 비선형 시스템의 제어보다 훨씬 난해한 문제인데, 이는 불안정한 영동특성을 안정화하는 것까지 고려해야 하기 때문이다. 최근에 참고문헌 [3]에서는 비최소위상 비선형 시스템을 제어하기 위한 근사 입출력 제어기법이 소개되었다. 즉, 특별한 형태의 표준형(normal form)이 제안되었는데, 이 표준형에서 영동특성은 안정한 부분과 불안정한 부분으로 분해가 되며, 불안정한 부분은 근사적으로 선형화되면서 안정한 부분과는 분리되어 있는 형태이다. 제안된 표준형을 사용할 경우, 비최소위상 비선형 시스템에 대해 상대적으로 간단하면서도 고 성능의 제어기를 얻을 수 있으나, 이 제어기는 모든 상태(state)를 정확히 알고 있어야 한다는 제약조건이 따른다. 실제 현장에서 모든 상태를 정확히 측정한다는 것은 비현실적인 문제인데, 왜냐하면 모든 상태를 측정하는 것은 대부분의 경우에 매우 어려운 문제이고, 또가능하다고 하더라도 몇몇 센서는 매우 고가이기 때문이다. 따라서 비선형 시스템의 상태를 추정할 수 있는 관측기에 대한 연구가 최근 활발히 수행되었으며[4]-[9], 이를 응용한 출력궤환 제어기의 설계는 매우 중요한 문제이다.

본 논문에서는 앞서 언급한 특별한 형태의 표준형을 이용하여 비최소위상 비선형시스템을 안정화시키는 출력궤환 제어기를 제안하고자 한다. 출력궤환 제어기를 구성하기 위하여 먼저 관측기를 설계하는 것이 필요하며, 제안된 관측기의 특성상 주어진 시스템이 지수적으로 안정함(exponentially stable)을 보이기를 위해서는 시스템의 차수를 적분기를 사용하여 확장하는 것이 필요하다. 또한 시스템의 차수를 확장하기 때문에, 이러한 시스템의 안정화를 위해서는 역진제어기법(Backstepping)기법을 필요로 한다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2장에서는 참고문헌 [3]에서 제안한 비최소위상 비선형시스템을 위한 근사 입출력 선형화 기법에 대해서 알아본다. 3장에서는 출력궤환 제어기를 설계하기 위하여, 주어진 시스템의 차수를 확장하고 이 확장된 시스템에 대한 관측기를 설계한다. 또한, 설계된 관측기와 역진제어기법을 결합한 출력궤환 제어기를 제시하며, 이를 이용할 경우 전체시스템이 지수적으로 안정함을 보인다. 4장에서는 제안된 제어기의 설계방법을 예제를 통하여 설명하였고, 마지막으로 5장에서는 본 논문에 대한 결론을 제시하였다.

II. 비최소위상 시스템의 입출력 선형화

본 논문에서는 다음과 같은 단일입력 단일출력(SISO) 비선형 시스템을 고려한다 :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, $x \in R^n$, $u, y \in R^1$이고 f, g는 원점 근방의

* 책임저자(Corresponding Author)
논문접수 : 2003. 5. 22., 채택확정 : 2003. 7. 30.
조남훈 : 숭실대학교 전기제어시스템공학부(nhjo@ee.ssu.ac.kr)
※ 본 연구는 숭실대학교 교내연구비 지원으로 수행되었음.

평활한 벡터장(smooth vectorfields)이고 $h: R^n \rightarrow R^1$인 평활한 함수이다. 또한, $f(0)=0$, $h(0)=0$를 가정한다.

비최소위상 비선형 시스템(1)을 안정화하기 위하여 참고문헌 [3]에서는 새로운 형태의 표준형(normal form)이 제시되었는데, 이 표준형의 영동특성은 안정한 부분과 불안정한 부분으로 분해되며, 불안정한 부분은 근사적으로 선형으로 주어지면서 안정한 부분으로부터 영향을 받지 않도록 되어 있다. 제시된 표준형을 기반으로 상태궤환을 사용한 비최소위상 비선형 시스템의 안정화 제어기를 설계할 수 있는데, 여기에 그 결과를 간략히 소개하고자 한다.

다음의 두 가지 조건을 가정한다.

(i) 비선형 시스템 (1)의 자코비 선형화(Jacobi linearization) 시스템이 제어가능(controllable)하다.

(ii) 비선형 시스템 (1)이 상대차수(relative degree) r을 갖으며 다음과 같은 상태변환이 존재하여

$$\begin{aligned} z = T(x) &= [\xi_1, \cdots, \xi_r, T_{r+1}, \cdots, T_n]^T \\ &= [h, \cdots, L_f^{r-1}h, T_{r+1}, \cdots, T_n]^T \end{aligned} \tag{2}$$

비선형 시스템 (1)이 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + B[a(\xi,\eta) + b(\xi,\eta)u] \\ \dot{\eta}_1 &= M_1\xi + N_1\eta_1 + O^{k+1}(\xi, \eta_1, \eta_2). \\ \dot{\eta}_2 &= q_2(\xi, \eta_1, \eta_2) \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 (A, B)는 다음과 같은 형태를 갖는 적절한 차원의 Brunovsky 표준형이다.

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

또한, $O^{k+1}(\xi, \eta_1, \eta_2)$는 ξ, η_1, η_2로 구성된 차수가 k보다 큰 임의의 항을 나타내며, N_1과 q_2는 다음을 만족한다.

$$\sigma(N_1) > 0$$
$$\sigma\left(\frac{\partial}{\partial \eta_2} q_2(\xi, \eta_1, \eta_2)\bigg|_{\xi=0,\eta_1=0,\eta_2=0}\right) < 0$$

여기서 $\sigma(\cdot)$는 행렬의 스펙트럼(spectrum)을 나타낸다. 따라서 이 두 조건이 의미하는 것은 비선형 시스템 (3)의 영동특성(zero dynamics)이 불안정한 상태 η_1과 안정한 상태 η_2로 분리할 수 있다는 것이다.

위의 두 가지 조건을 만족하면 시스템 (1)을 지수적으로 안정화시키는 상태궤환 선형화 제어기가 존재하며, 이는 다음과 같이 주어진다. [3]

$$u = \frac{1}{b(\xi,\eta)}\left(-a(\xi,\eta) + \sum_{l=1}^{r} c_{1l}\xi_l + \sum_{m=1}^{j} c_{2m}T_{r+m}\right)$$

여기서 j는 η_1의 차원을 나타내며, $C_1 = [c_{11}, \cdots, c_{1r}]$, $C_2 = [c_{21}, \cdots, c_{2j}]$는 다음 행렬이 Hurwitz가 되도록 선택하는데, 이는 가정 (i)에 의하여 항상 가능하다:

$$\begin{bmatrix} A + BC_1 & BC_2 \\ M_1 & N_1 \end{bmatrix}$$

기존의 입출력 선형화 제어기는 비선형 시스템 (1)을 다음과 같은 일반적인 표준형으로 변환하여 시스템을 안정화 시켰다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + B[a(\xi,\eta) + b(\xi,\eta)u] \\ \dot{\eta} &= q(\xi,\eta) \end{aligned}$$

이와 비교하면, (3)의 영동특성은 안정한 부분과 불안정한 부분으로 분해되어 있다는 것을 알 수 있다. 따라서, [3]의 기법은 (3)의 영동특성과 같은 형태로 변환할 수 있는 상태변환의 존재성이 매우 중요한 문제라는 것을 알 수 있다. 이러한 상태변환을 구하는 체계적이고 일반적인 기법에 대한 결과는 참고문헌 [3]을 참조하도록 하고, 여기서는 자세한 내용은 생략하도록 한다.

III. 출력궤환 제어기의 설계

본 장에서는 상대차수가 r인 시스템 (1)에 대해서 관측기를 설계하고, 이를 이용하여 시스템의 출력 궤환 제어기를 설계한다. 차후에 밝혀지겠지만, 우리가 제시할 관측기는 시스템의 입력의 미분을 알아야만 완벽한 상태추정이 가능하다. 하지만, 시스템 (1)을 안정화할 수 있는 제어입력 u가 결정되었다고 하더라도, 그 미분의 정보를 관측기에서 사용하는 것은 쉽지 않으므로, 우리는 시스템 (1)을 우선 $(n-r+1)$개의 적분기를 사용하여 다음과 같이 확장하도록 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)U_1 \\ \dot{U}_1 &= U_2 \\ &\vdots \\ \dot{U}_{n-r} &= U_{n-r+1} \\ \dot{U}_{n-r+1} &= v \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} U_i &= u^{(i-1)}, \quad i = 1, \cdots, n-r+1. \\ v &= u^{(n-r+1)} \end{aligned}$$

새로운 벡터 U를 다음과 같이 정의하면

$$U := \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{n-r+1} \end{bmatrix} \tag{4}$$

확장된 시스템은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)U_1 \\ \dot{U} &= A_U U + B_U v \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 (A_U, B_U)는 Brunovsky 표준형이다. 만약, (5)를 안정화시킬 수 있는 제어입력이 존재한다면, 비선형 시스템 (1)을 안정화할 수 있는 제어 입력 또한 존재하게 된다. 이제 비선형 시스템 (1)이 상대차수가 r이고 (6)과 같은 좌표변환이 존재하여

$$\begin{aligned} z = T(x) &= [\,\xi_1, \cdots, \xi_r, T_{r+1}, \cdots, T_n] \\ &= [\,h, \cdots, L_f^{r-1}h,\ T_{r+1}, \cdots, T_n] \end{aligned} \tag{6}$$

시스템 (1)이 (7)과 같이 변환된다고 가정하자.

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + B[\,a(\xi,\eta) + b(\xi,\eta)u] \\ \dot{\eta}_1 &= M_1\xi + N_1\eta_1 \\ \dot{\eta}_2 &= q_2(\xi, \eta_1, \eta_2) \end{aligned} \tag{7}$$

여 기 서 $\xi \in R^{r\times 1}, \eta_1 \in R^{j\times 1}, \eta_2 \in R^{(n-r-j)\times 1}$이 고 (A, B)는 적절한 차원의 Brunovsky 표준형이며 N_1과 q_2는 다음을 만족한다.

$$\begin{gathered} \sigma(N_1) > 0 \\ \sigma\left(\frac{\partial}{\partial \eta_2} q_2(\xi, \eta_1, \eta_2)\bigg|_{\xi=0,\,\eta_1=0,\,\eta_2=0}\right) < 0 \end{gathered} \tag{8}$$

본 논문에서는 전개과정을 간략히 하기 위하여 앞서 고려한 비선형 시스템 (3)의 상태 η_1의 동특성에서 $O^{k+1}(\xi, \eta_1, \eta_2)$항이 존재하지 않는 경우를 다룰 것이다. 하지만, 이 항이 존재하는 경우에도 본 논문의 전개과정을 어렵지 않게 적용할 수 있다.

이제 다음과 같은 상태변환을 사용하면,

$$z_c := T_e(x, U) := \begin{bmatrix} T(x) \\ \cdots\cdots \\ U \end{bmatrix}$$

시스템 (5)는 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + B[\,a(\xi,\eta) + b(\xi,\eta)U_1] \\ \dot{\eta}_1 &= M_1\xi + N_1\eta_1 \\ \dot{\eta}_2 &= q_2(\xi, \eta_1, \eta_2) \\ \dot{U} &= A_U U + B_U v \end{aligned} \tag{9}$$

새로운 입력 v를 사용하여 시스템 (9)를 안정화 시키는 입력을 설계하기 위하여 역진제어기법(Backstepping)에 관한 다음 보조 정리가 필요하다.

보조정리 1 : [10] 주어진 시스템 (10)에 대해서

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad f(0) = 0, \tag{10}$$

$(n-r+1)$개의 적분기로 확장한 다음과 같은 시스템 (11)을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)U_1 \\ \dot{U}_1 &= U_2 \\ &\vdots \\ \dot{U}_{n-r} &= U_{n-r+1} \\ \dot{U}_{n-r+1} &= v \end{aligned} \tag{11}$$

만약, 시스템 (10)의 평형점 $x=0$을 지수적으로 안정화(exponentially stable) 시키는 평활한(smooth) 상태궤환 제어법칙 $u=\alpha(x)$, $\alpha(0)=0$이 존재한다면, 시스템 (11)의 평형점 $x=0$, $U=0$을 지수적으로 안정화시키는 평활한 상태에 궤환 제어법칙 $v=\beta(x, U)$가 존재한다.

이제, 시스템 (1)의 자코비 선형화 시스템이 제어가능하다고 가정하고 행렬 $C_1 \in R^{1\times r}$, $C_2 \in R^{1\times j}$을 다음 행렬이 Hurwitz가 되도록 선택하자.

$$\begin{bmatrix} A + BC_1 & BC_2 \\ M_1 & N_1 \end{bmatrix}$$

2장에서 살펴 본 것처럼 제어법칙 (12)는 시스템 (7)의 평형점 $\xi=0, \eta_1=0, \eta_2=0$을 지수적으로 안정화시킨다.

$$\begin{aligned} u &= u_0(\xi, \eta) \\ &= \frac{1}{b(\xi,\eta)}\left(-a(\xi,\eta) + \sum_{l=1}^{r} c_{1l}\xi_l + \sum_{m=1}^{j} c_{2m}T_{r+m}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

따라서, 보조정리 1에 의해서 확장된 시스템 (9)의 평형점 $\xi=0, \eta_1=0, \eta_2=0, U=0$를 지수적으로 안정화시키는 제어입력

$$v = v_0(\xi, \eta, U) \tag{13}$$

가 존재한다. 앞으로의 전개를 간결히 표현하기 위하여 시스템 (9)를 다음과 같이 나타내도록 하자.

$$\dot{z}_c = f_c(z_c) + B_c v$$

여기서

$$f_c(z_c) := \begin{bmatrix} A\xi + B[\,a(\xi,\eta) + b(\xi,\eta)U_1] \\ M_1\xi + N_1\eta_1 \\ q_2(\xi, \eta_1, \eta_2) \\ A_U U \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$B_c := [\,0, \cdots, 0, 1]^T$$

리아프노프 역 정리(Lyapunov converse theorem)[11]로부터 시스템 $\dot{z}_c = f_c(z_c) + B_c v_0(z_c)$에 대한 리아프노프 함수 $W(z_c)$와 $k_1>0, k_2>0, k_3>0, k_4>0$가 존재하여 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} k_1\|z_c\|^2 \le W(z_c) &\le k_2\|z_c\|^2 \\ \frac{\partial W}{\partial z_c}[f_c(z_c) + B_c v_0(z_c)] &\le -k_3\|z_c\|^2 \\ \left\|\frac{\partial W}{\partial z_c}\right\| &\le k_4\|z_c\| \end{aligned} \tag{15}$$

이제, 확장된 시스템 (5)에 대한 관측기를 설계하기 위하여 다음과 같은 함수를 정의한다.

$$\begin{aligned} \phi_1(x, U) &:= h(x) \\ \phi_i(x, U) &:= L_f^{i-1}h(x), \quad i = 2, \cdots, r \\ \phi_{r+1}(x, U) &:= L_f^r h(x) + uL_gL_f^{r-1}h(x) \\ \phi_i(x, U) &:= L_{f+gu}\phi_{i-1}(x, U) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{i-(r+2)} \frac{\partial}{\partial u^{(k)}}\phi_{i-1}(x, U)\,u^{(k+1)}, \\ &\qquad i = r+2, \cdots, n+1 \\ \Psi(x, U) &:= [\,\phi_1(x, U), \cdots, \phi_n(x, U)]^T \\ \Psi_x(x, U) &:= \frac{\partial}{\partial x}\Psi(x, U) \\ \Psi_U(x, U) &:= \frac{\partial}{\partial U}\Psi(x, U) \end{aligned}$$

여기서,

$$L_{f+gu}\psi_i(x,U) := \left[\frac{\partial}{\partial x}\psi_i(x,U)\right](f(x)+g(x)u),\quad i=1,\cdots,n$$

또한, 관측기의 이득에 사용될 상수인 $k_{1,1},\cdots,k_{1,n}$, $k_{2,1},\cdots,k_{2,n-r+1}$를 다음 두 다항식의 모든 근이 음의 실수부를 갖도록 선택한다.

$$s^n + k_{1,1}s^{n-1}+\cdots+k_{1,n}=0$$

$$s^{n-r+1}+k_{2,1}s^{n-r}+\cdots+k_{2,n-r+1}=0$$

임의의 상수 $\varepsilon>0$에 대해서 관측기 이득 $K_1\in R^n$, $K_2\in R^{n-r+1}$를 다음과 같이 정의한다.

$$K_1=\begin{bmatrix}\frac{k_{1,1}}{\varepsilon}\\ \vdots \\ \frac{k_{1,n}}{\varepsilon^n}\end{bmatrix},\quad K_2=\begin{bmatrix}\frac{k_{2,1}}{\varepsilon}\\ \vdots \\ \frac{k_{2,n-r+1}}{\varepsilon^{n-r+1}}\end{bmatrix},$$

(여기서 K_1, K_2는 ε의 함수이지만, 표기를 간단히 하기 위하여 $K_1(\varepsilon)$, $K_2(\varepsilon)$대신 K_1, K_2를 사용한다)

정리 2 : 비선형 시스템 (1)이 다음 세 조건을 만족한다고 하자 :

(i) 자코비 선형화(Jacobi linearization) 시스템이 제어가능(controllable)하다.

(ii) 상대차수(relative degree) r을 갖으며, (8)을 만족하는 시스템(7)로 변환될 수 있는 다음과 같은 상태변환이 존재한다.

$$\begin{aligned} z=T(x) &= [\xi_1,\cdots,\xi_r, T_{r+1},\cdots,T_n]^T \\ &= [h,\cdots,L_f^{r-1}h, T_{r+1},\cdots,T_n]^T \end{aligned}$$

(iii) $$\text{rank}\ \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}h(x)\\ \vdots\\ L_f^{n-1}h(x)\end{bmatrix}\Bigg|_{x=0}=n$$

그러면, 적절한 $\varepsilon^*>0$가 존재하여 $0<\varepsilon<\varepsilon^*$인 ε에 대해서 출력궤환 제어기 (16)과 (17)이 시스템 (5)의 평형점 $(z^T,U^T,e_o^T)^T=(0,0,0)$을 지수적으로 안정화시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= f(\hat{x})+g(\hat{x})\hat{U}_1+\Psi_x^{-1}(\hat{x},\hat{U})K_1(y-h(\hat{x})) \\ &\quad -\Psi_x^{-1}(\hat{x},\hat{U})\Psi_U(\hat{x},\hat{U})K_2(u-\hat{U}_1) \\ \dot{\hat{U}} &= A_U\hat{U}+B_Uv_0(T(\hat{x}),\hat{U})+K_2(u-\hat{U}_1) \end{aligned} \tag{16}$$

$$v=v_0(T(\hat{x}),\hat{U}) \tag{17}$$

증명 : 관측오차의 수렴성을 분석하기 위하여 다음과 같은 상태변환을 정의하자.

$$z_o := \begin{bmatrix} z_{o1}\\ \cdots\cdots \\ z_{o2}\end{bmatrix} := \Theta(x,U) := \begin{bmatrix}\Psi(x,U)\\ \cdots\cdots\\ U\end{bmatrix}. \tag{18}$$

가정 (iii)으로부터

$$\text{rank}\ \Psi_x(0,0)=n$$

를 알 수 있다. 이 조건과 음함수 정리(Implicit Function Theorem)를 사용하면 주어진 z_{o1}, U에 대해서 $\Psi(x,U)=z_{o1}$을 만족하는 해 x가 국소적으로 존재한다는 것을 보일 수가 있으며, 이러한 해를 앞으로

$$\Psi^+(z_{01},U)$$

로 표기하도록 한다. 이제 상태변환 $z_o=\Theta(x,U)$를 사용하면, 시스템 (1)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_o &= \begin{bmatrix}A_o & 0\\ 0 & A_U\end{bmatrix}z_o+\begin{bmatrix}B_o\\0\end{bmatrix}\phi_{n+1}(\Psi^+(z_{o1},U),U) \\ &\quad +\begin{bmatrix}0\\ B_U\end{bmatrix}v_o(\hat{\xi},\hat{\eta},\hat{U}) \\ y &= [C_o\ \ 0]z_o \\ u &= [0\ \ C_U]z_o \end{aligned} \tag{19}$$

여기서 $A_o\in R^{n\times n}, B_o\in R^{n\times 1}$는 Brunovsky 표준형으로 주어지며, $C_o\in R^{1\times n}$, $C_U\in R^{1\times(n-r+1)}$는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} C_o &= [1\ 0\ \cdots\ 0] \\ C_U &= [1\ 0\ \cdots\ 0] \end{aligned}$$

또한, 관측기의 상태변환을 다음과 같이 정의하면

$$\hat{z} = \Theta(\hat{x},\hat{U})$$

관측기 (16)은 (20)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_o &= \begin{bmatrix}A_o-K_1C_o & 0\\ 0 & A_U-K_2C_U\end{bmatrix}\hat{z}_o \\ &\quad +\begin{bmatrix}B_o\\0\end{bmatrix}\phi_{n+1}(\Psi^+(\hat{z}_{o1},\hat{U}),\hat{U}) \\ &\quad +\begin{bmatrix}0\\B_U\end{bmatrix}v_o(\hat{\xi},\hat{\eta},\hat{U})+\begin{bmatrix}K_1 & 0\\ 0 & K_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\u\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

다음을 정의하면

$$\begin{aligned} e_o &:= \hat{z}_o - z_o \\ c(z_1,z_2) &:= \phi_{n+1}(\Psi^+(z_1,z_2),z_2), \end{aligned}$$

(19)와 (20)으로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{e}_o &= \begin{bmatrix}A_o-K_1C_o & 0\\ 0 & A_U-K_2C_U\end{bmatrix}e_o \\ &\quad +\begin{bmatrix}B_o\\0\end{bmatrix}[c(\hat{z}_{o1},\hat{z}_2)-c(z_{o1},z_2)] \\ &:= \begin{bmatrix}A_1(\varepsilon) & 0\\ 0 & A_2(\varepsilon)\end{bmatrix}e_o \\ &\quad +\begin{bmatrix}B_o\\0\end{bmatrix}[c(\hat{z}_{o1},\hat{z}_2)-c(z_{o1},z_2)] \\ &:= A(\varepsilon)e_o+\begin{bmatrix}B_o\\0\end{bmatrix}[c(\hat{z}_{o1},\hat{z}_2)-c(z_{o1},z_2)] \end{aligned}$$

여기서

$$A(\varepsilon)=\begin{bmatrix} -\frac{k_{1,1}}{\varepsilon} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{k_{1,2}}{\varepsilon^2} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{k_{1,n}}{\varepsilon^n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{k_{2,1}}{\varepsilon} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{k_{2,2}}{\varepsilon^2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{k_{2,n-r+1}}{\varepsilon^{n-r+1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

또한, $v_o(z_c)$가 평활한(smooth) 함수이고

$$v_o(z_c) = v_o(T(x), U) = v_o(T(\Psi^+(z_{o1}, u)), U) =: \bar{v}(z_{o1}, U)$$

이므로 다음과 같은 상수 $l_1 > 0$이 존재한다 :

$$\|v_o(\hat{z}_c) - v_o(z_c)\| \le l_1 \left\| \begin{matrix} \hat{z}_{o1} - z_{o1} \\ \hat{U} - U \end{matrix} \right\| = l_1 \|e_o\|$$

따라서, (15)로부터 다음을 얻는다

$$\frac{\partial W}{\partial z_c} B_c [v_o(\hat{z}_c) - v_o(z_c)] \le k_4 l_1 \|z_c\| \|e_o\| \quad (21)$$

마찬가지로, $c(z_1, z_2)$가 평활한 함수이므로, 다음을 만족하는 상수 $l_2 > 0$가 존재한다 :

$$\begin{aligned} \|c(\hat{z}_{o1}, \hat{U}) - c(z_{o1}, U)\| &\le l_2 \left\| \begin{matrix} \hat{z}_{o1} - z_{o1} \\ \hat{U} - U \end{matrix} \right\| \\ &= l_2 \|e_o\| \end{aligned} \quad (22)$$

증명을 계속 진행하기 위하여 다음과 같은 보조정리가 필요하다. 보조정리의 증명은 어렵지 않으므로 생략한다.

보조정리 3 :

(i) $A_1, B_1(\varepsilon), E(\varepsilon)$을 다음과 같이 정의하자 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -k_{1,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_{1,2} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -k_{1,n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{2,2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{2,n-r+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon^n \\ \cdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \varepsilon & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \varepsilon^{n-r-1} \end{bmatrix}$$

이때 $A(\varepsilon)$, B_o는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= \varepsilon^{-1} E(\varepsilon)^{-1} A_1 E(\varepsilon) \\ [B_o^T \ \ 0]^T &= \varepsilon^{-1} E(\varepsilon)^{-1} B_1(\varepsilon) \end{aligned}$$

(ii) P를

$$A_1^T P + P A_1 = -I$$

를 만족하는 해라고 할 때,

$$P(\varepsilon) := E(\varepsilon)^T P E(\varepsilon)$$

은 다음 두 식을 만족한다 :

$$\begin{aligned} A(\varepsilon)^T P(\varepsilon) + P(\varepsilon) A(\varepsilon) &= -\varepsilon^{-1} E(\varepsilon)^T E(\varepsilon) \\ [B_o^T \ \ 0] P(\varepsilon) &= \varepsilon^{-1} B_1(\varepsilon)^T P E(\varepsilon) \end{aligned}$$

(iii) $0 < \varepsilon < 1$일 때 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \|B_1(\varepsilon)\| &= \varepsilon^n \\ \|E(\varepsilon)\| &= 1 \\ \|E(\varepsilon)^{-1}\| &= \tfrac{1}{\varepsilon^{n-1}} \end{aligned}$$

다시, 정리 2의 증명으로 돌아가도록 한다. 먼저 $W(z_c)$의 시간에 대한 미분을 계산한다

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \frac{\partial W}{\partial z_c} \dot{z}_c \\ &= \frac{\partial W}{\partial z_c} [f_c(z_c) + B_c v_o(z_c)] \\ &\quad + \frac{\partial W}{\partial z_c} B_c [v_o(\hat{z}_c) - v_o(z_c)] \end{aligned}$$

(15)와 (21)을 이용하면,

$$\dot{W} \le -k_3 \|z_c\|^2 + k_4 l_1 \|z_c\| \|e_o\| \quad (23)$$

또한, $e_o^T P(\varepsilon) e_o$의 시간에 대한 미분을 계산하면

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e_o^T P(\varepsilon) e_o &= e_o^T (P(\varepsilon) A(\varepsilon) + A(\varepsilon)^T P(\varepsilon)) e_o \\ &\quad + 2[B_O^T \ \ 0] P(\varepsilon) e_o [c(\hat{z}_{o1}, \hat{z}_2) - c(z_{o1}, U)] \end{aligned}$$

보조정리 3의 (ii)의 성질을 사용하면, (24)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e_o^T P(\varepsilon) e_o &\le -\varepsilon^{-1} e_o^T E(\varepsilon)^T E(\varepsilon) e_o \\ &\quad + 2 \tfrac{1}{\varepsilon} B_1(\varepsilon)^T P E(\varepsilon) e_o l_2 \|e_o\| \end{aligned}$$

이다. 이제 $0 < \varepsilon < 1$을 가정하고, 새로운 관측 오차를 다음과 같이 정의하자.

$$e_o^f := E(\varepsilon) e_o \quad (25)$$

보조정리 3의 (iii)과 (25)를 이용하면 (24)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e_o^T P(\varepsilon) e_o &\le -\varepsilon^{-1} (e_o^f)^T (e_o^f) \\ &\quad + 2 \tfrac{1}{\varepsilon} \|B_1(\varepsilon)\| \cdot \|P\| \cdot \|E(\varepsilon) e_o\| \cdot l_2 \|e_o\| \\ &\le -\varepsilon^{-1} \|e_o^f\|^2 \\ &\quad + 2\varepsilon^{n-1} \|P\| \cdot \|e_o^f\| \cdot \|e_o\| l_2 \\ &\le -\varepsilon^{-1} \|e_o^f\|^2 \\ &\quad + 2\|P\| \cdot \|e_o^f\| \cdot \|e_o^f\| l_2 \end{aligned} \quad (26)$$

전체 시스템의 리아프노프 함수를 다음과 같이 선택하면

$$V = W(z_c) + \frac{1}{\varepsilon^{2(n-1)}} e_o^T P(\varepsilon) e_o$$

(23)과 (26)으로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &\le -k_3 \|z_c\|^2 + k_4 l_1 \|z_c\| \|e_o\| \\ &\quad - \tfrac{1}{\varepsilon^{2n-1}} \|e_o^f\|^2 + 2 \tfrac{1}{\varepsilon^{2n-2}} \|P\| \cdot \|e_o^f\|^2 l_2 \\ &\le -k_3 \|z_c\|^2 + \tfrac{k_4 l_1}{\varepsilon^{n-1}} \|z_c\| \|e_o^f\| \\ &\quad - \left(\tfrac{1}{\varepsilon^{2n-1}} - \tfrac{2 l_2 \|P\|}{\varepsilon^{2n-2}} \right) \|e_o^f\|^2 \\ &\le -\tfrac{3}{4} k_3 \|z_c\|^2 - k_3 \left(\tfrac{1}{2} \|z_c\| - \tfrac{k_4 l_1}{k_3} \tfrac{1}{\varepsilon^{n-1}} \|e_o^f\| \right)^2 \\ &\quad - \left(\tfrac{1}{\varepsilon^{2n-1}} - \tfrac{1}{\varepsilon^{2n-2}} \left(2 l_2 \|P\| + \tfrac{k_4^2 l_1^2}{k_3} \right) \right) \|e_o^f\|^2 \end{aligned}$$

$$\le -\frac{3}{4}k_3\|z_d\|^2 - \left(\frac{1}{\varepsilon^{2n-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{2n-2}}\left(2l_2\|P\| + \frac{k_4^2 l_1^2}{k_3}\right)\right)\|e_o^f\|^2$$
$$\le -\frac{3}{4}k_3\|z_d\|^2 - \frac{1}{2\varepsilon^{2n-1}}\|e_o^f\|^2 - \frac{1}{\varepsilon^{2n-1}}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\left(2l_2\|P\| + \frac{k_4^2 l_1^2}{k_3}\right)\right)\|e_o^f\|^2$$

만약, ε을

$$\varepsilon < \frac{k_3}{2(2l_2\|P\|k_3 + k_4^2 l_1^2)} \tag{27}$$

와 같이 선택하면, 최종적으로 다음을 얻을 수 있고

$$\dot{V} \le -\frac{3}{4}k_3\|z_d\|^2 - \frac{1}{2\varepsilon^{2n-1}}\|e_o^f\|^2$$

이로부터 시스템 (5)의 지수 안정성을 보장할 수 있다.

정리 2은 출력궤환 제어기가 시스템을 안정화시킬 수 있는 ε의 존재성을 보장하는 것이며, 일반적으로 (27)을 이용하여 ε을 정할 필요는 없다. 왜냐하면, (27)을 만족하는 ε은 매우 보수적으로 선택된 값으로서, 이를 사용할 경우 관측기의 이득이 매우 높은 값이 된다. 따라서 실제의 경우에는 모의실험을 통하여 시스템의 안정성을 보장하면서 적절한 관측기 이득을 얻을 수 있는 ε을 선택하게 된다.

또한, 정리 2는 적분기 역진제어기법(Backstepping)을 사용하여 제어기를 구성하기 때문에 제어기가 일반적으로 복잡한 형태를 띄게 된다. 이러한 단점은 시스템 (1)에 적분기를 추가하여 확장시스템 (5)를 구성한데 기인한다. 다음 정리는 제어기 (13)대신 (12)를 사용할 경우에 대한 결과를 제시한다.

정리 4 : 비선형 시스템 (1)이 정리 2의 세 조건을 만족한다고 하자. 그러면, 주어진 상수 $\varepsilon>0$에 대해서 다음을 만족하는 상수 $\delta>0$가 존재한다 : $\|x(0)\|<\delta$, $\|\hat{x}(0)-x(0)\|<\delta$일 때 출력궤환 제어기 (28)과 (29)를 사용하면,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}) + g(\hat{x})\hat{U}_1 + \Psi_x^{-1}(\hat{x},\hat{U})K_1(y-h(\hat{x})) \\ &\quad - \Psi_x^{-1}(\hat{x},\hat{U})\Psi_U(\hat{x},\hat{U})K_2(u-\hat{U}_1) \\ \dot{\hat{U}} &= A_U\hat{U} + K_2(u-\hat{U}_1)\end{aligned} \tag{28}$$

$$u = \frac{1}{b(\xi,\eta)}\left(-a(\xi,\eta) + \sum_{l=1}^{r} c_{1l}\xi_l + \sum_{m=1}^{j} c_{2m}T_{r+m}\right) \tag{29}$$

항상 $\|x(t)\|<\varepsilon$, $\forall t>0$이 성립한다.

증명 : 증명은 앞서의 정리 2의 증명과 참고문헌 [12]의 정리 2.4의 증명을 참고하면 어렵지 않게 유도할 수 있으므로 생략한다. ■

정리 2와 정리 4에서 사용된 관측기를 비교하면 관측기 (16)에서는 $\hat{U}$ 추정시 $v_o(T(\hat{x}),\hat{U})$정보를 사용하고 있지만, 관측기 (28)에서는 사용하지 않음을 알 수 있다. 이러한 이유로 정리 4의 제어기를 설계할 때에는 역진제어기법이 필요 없으며, 제어기가 정리 2보다 간단한 형태가 된다.

IV. 예제

제안된 제어기의 설계방법을 설명하기 위하여 다음과 같은 비선형 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_3 + u \\ \dot{x}_2 &= x_2 + \frac{x_2x_3 + x_1}{10 + x_3} \\ \dot{x}_3 &= -x_3 \\ y &= x_1\end{aligned} \tag{30}$$

시스템 (30)은 상대차수 r이 1임을 쉽게 확인 할 수 있다. 또한, 쟈코비안 선형화를 수행하면 영동특성이 불안정함을 쉽게 확인할 수 있고, 따라서 기존의 입출력 선형화기법을 사용할 수 없다. 이제, 시스템 (30)에 제안된 제어기가 적용가능한지 확인하자. (정리 2와 정리 4의 제어기를 설계하는 방법은 기본적으로 동일하므로, 간략한 형태의 제어기를 얻을 수 있는 정리 4의 제어기 설계방법만 설명하도록 한다.) 먼저 가정 (i)이 만족됨은 쉽게 알 수 있으며, 가정 (ii)를 확인하기 위하여 좌표변환 (31)을 시스템 (30)에 적용하면

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 \\ z_2 &= (10+x_3)x_2 \\ z_3 &= x_3\end{aligned} \tag{31}$$

다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \frac{z_2}{10+z_3} - z_3 + u \\ \dot{z}_2 &= z_2 + z_1 \\ \dot{z}_3 &= -z_3\end{aligned} \tag{32}$$

시스템 (30)의 새로운 표현식 (32)은 성질 (8)을 만족함을 알 수 있으므로, 정리 2의 가정 (ii)도 만족함을 알 수 있다. 또한, 간단한 계산으로 다음을 확인 할 수 있으며,

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1}h(x)\end{bmatrix}\Bigg|_{x=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{10} & 1 & 1\end{bmatrix}$$

이로부터 정리 2의 가정 (iii)도 만족함을 알 수 있다. 시스템 (32)을 안정화 시키는 제어기 (12)는 2장에서 설명한 바와 같이 설계할 수 있으며, 다음과 같다.

$$\begin{aligned}u &= \left(-\frac{z_2}{10+z_3} + z_3\right) - 3z_1 - 4z_2 \\ &= -x_2 + x_3 - 3x_1 - 4(10+x_3)x_2\end{aligned}$$

이제 상태 추정기 (28)을 설계하기 위하여

$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3\end{bmatrix} := \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \\ \ddot{u}\end{bmatrix}$를 정의하면, $\Phi(x,U)$는 다음과 같이 계산된다.

$$\Phi(x,U) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_3 + U_1 \\ x_2 + \frac{x_2x_3 + x_1}{10+x_3} + x_3 + U_2\end{bmatrix}$$

또한, 다항식

$$\begin{aligned}s^3 + k_{1,1}s^2 + k_{1,2}s + k_{1,3} &= 0 \\ s^3 + k_{2,1}s^2 + k_{2,2}s + k_{2,3} &= 0\end{aligned}$$

의 근이 모두 음의 실수부를 갖도록 하기 위하여

$$[k_{1,1}\ k_{1,2}\ k_{1,3}] = [3\ 3\ 1]$$
$$[k_{2,1}\ k_{2,2}\ k_{2,3}] = [3\ 3\ 1]$$

로 선택하자. 따라서 관측기 이득은

$$K_1 = \begin{bmatrix} 3/\varepsilon \\ 3/\varepsilon^2 \\ 1/\varepsilon^3 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 3/\varepsilon \\ 3/\varepsilon^2 \\ 1/\varepsilon^3 \end{bmatrix}$$

로 정할 수 있고, 관측기 (28)은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 - \hat{x}_3 + \hat{U}_1 + \tfrac{3}{\varepsilon}(y - \hat{x}_1) \\
\dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_2 + \frac{\widehat{x_2 x_3 + x_1}}{10 + \hat{x}_3} + l_1(\hat{x}, \varepsilon)(y - \hat{x}_1) + l_2(\hat{x}, \varepsilon)(u - \hat{U}_1) \\
\dot{\hat{x}}_3 &= -\hat{x}_3 + l_3(\hat{x}, \varepsilon)(y - \hat{x}_1) + l_4(\hat{x}, \varepsilon)(u - \hat{U}_1) \\
\dot{\hat{U}}_1 &= \hat{U}_2 \\
\dot{\hat{U}}_2 &= \hat{U}_3 + \tfrac{3}{\varepsilon^2}(u - \hat{U}_1) \\
\dot{\hat{U}}_3 &= \tfrac{1}{\varepsilon^3}(u - \hat{U}_1)
\end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
l_1(x, \varepsilon) &= \frac{1}{l_0(x)}\Big[(10 + x_3)\frac{3}{\varepsilon} + (-10x_2 + x_1 \\
&\quad - 100 - 20x_3 - x_3^2)\frac{3}{\varepsilon^2} - (10 + x_3)^2\frac{1}{\varepsilon^3}\Big] \\
l_2(x, \varepsilon) &= \frac{1}{l_0(x)}\Big[(-10x_2 + x_1 - 100 - 20x_3 - x_3^2)\frac{3}{\varepsilon} \\
&\quad - (10 + x_3)^2\frac{3}{\varepsilon^2}\Big] \\
l_3(x, \varepsilon) &= \frac{1}{l_0(x)}\Big[(10 + x_3)\frac{3}{\varepsilon} + 2(5 + x_3)\cdot \\
&\quad (10 + x_3)\frac{3}{\varepsilon^2} - (10 + x_3)^2\frac{1}{\varepsilon^3}\Big] \\
l_4(x, \varepsilon) &= \frac{1}{l_0(x)}\Big[2(5 + x_3)(10 + x_3)\frac{3}{\varepsilon} - (10 + x_3)^2\frac{3}{\varepsilon^2}\Big]
\end{aligned}$$

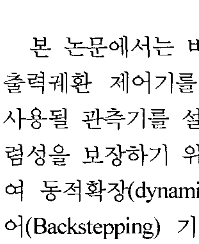
이고,

$$l_0(x) = -10x_2 + x_1 - 200 - 50x_3 - 3x_3^2$$

이다.

V. 결론

본 논문에서는 비최소위상 비선형시스템을 안정화시키는 출력궤환 제어기를 제시하였다. 먼저, 출력궤환 제어기에 사용될 관측기를 설계하고, 이러한 관측기의 관측오차의 수렴성을 보장하기 위하여, 주어진 시스템을 적분기를 사용하여 동적확장(dynamic extension)하였다. 최근 개발된 역진제어(Backstepping) 기법을 사용하여 상태궤환 제어기를 설계하였으며, 앞서 설계한 관측기와 결합하여 사용할 경우 전체 시스템의 안정성을 보장할 수 있다는 것을 보였다.



조 남 훈

1970년 3월 18일생. 1992년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 동대학원 석사(1994). 서울대 대학원 전기공학부 박사(2000). 2000년~2001년 서울대 자동화시스템 공동연구소 연구원. 2001년~2002년 삼성전자 DVS사업부 책임연구원. 2002년~현재 숭실대학교 전기제어시스템공학부 전임강사. 관심분야는 적응제어, 비선형 제어.

참고문헌

[1] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[2] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[3] F. Allgower, "Approximate input-outupt linearization of nonminimum phase nonlinear systems," *in Proc. 4th European Contr. Conf.*, Brussels, Belgium, July 1997.

[4] A. J. Krener, and A. Isidori, "Linearization by output injection and nonlinear observers," *Systems and Control Letters*, vol. 3, pp. 47-52, 1983.

[5] A. J. Krener and W. Respondek, "Nonlinear observers with linearizable error dynamics," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 23, pp. 197-216, 1985.

[6] J. P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman, "A simple observer for nonlinear systems: application to bioreactors," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, pp. 875-880, 1992.

[7] G. Ciccarella, M. Dallamora, and A. Germani, "A luenberger-like observer for nonlinear systems," *Int. J. Contr.*, vol. 57, no. 3, pp. 537-556, 1993.

[8] G. Besancon, "On output transformations for state linearization up to output injection," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 44, pp. 1975-1981, 1999.

[9] N. H. Jo, and J. H. Seo, "Input output linearization approach to state observer design for nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 45, pp. 2388-2393, 2000.

[10] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotovic, *Nonlinear and Adaptive Control Design*, John Wiley & Sons, New York, 1995.

[11] W. Hahn, *Stability of Motion*, A. P. Baartz, tr. New York: Springer-Verlag, 1967.

[12] N. H. Jo and J. H. Seo, "Nonlinear observers and output tracking control of nonlinear systems via output feedback", *Proceedings of the 36th IEEE Conferences on Decision and Control*, Dec. 10-12, 1997, San diego, CA, pp. 2889-2894.