

## 구조해석과 최적설계를 위한 웨이블릿기반 다중스케일 패러다임



김 윤 명

### 1. 서 론

공학이나 과학분야에서 취급하는 신호나 함수를 적절하게 잘 표현하면, 그것들 속에 내재된 의미있는 물리적 현상을 쉽게 파악할 수 있다. 지난 10여년 동안 비약적 발전을 해온 '웨이블릿'이라는 것도 신호나 함수를 표현하는 도구인데, 이것은 전통적인 방법으로 다루기 어려운 신호나 함수를 아주 효과적으로 표현할 수 있다. 이러한 이유로 웨이블릿은 새로운 수학적 도구로 여러 학문분야에서 각광을 받고 있다. 사실 웨이블릿이 갖는 특징을 여러 관점에서 살펴볼 수 있으나, 소고에서는 다중스케일 다중해상도 분석과 맞물려 그것의 특성과 역할을 논의하고자 한다. 다중스케일 방법이 성공적으로 적용된 예로서, 다중스케일 웨이블릿-갤러킨 방법, 다중스케일 다중해상도 위상최적화, 웨이블릿 수축법을 이용한 힌지 제거 기법을 소개 하고자 한다.

### 2. 다중스케일 표현과 웨이블릿

먼저 보간법을 이용하여 곡선을 근사하는 과정을 통해 다중스케일 개념을 설명하고자 한다. 그림 1(a)는 다양한 해상도 수준에서 가장 낮은 차수의 모자형 보간 함수에 의해서 보간된 곡선을 보여주고 있다.<sup>1)~3)</sup> 여기서 모자형 보간 함수는 전통적인 유한 요소법에서 사용되는 선형기저함수와 동일하다.

그림 1(a)에서 사용된 보간 정밀도보다 두배 더 정밀한 보간을 가장 쉽게하는 방법은 단순히 지지구간을  $d$ 에서  $d/2$ 로 줄임과 동시에 보간 기저의 수를 증가시키는 것이다(그림 1(b) 참조). 여기서 주목할 점은 그림 1(b)의 보간에서는 그림 1(a)에서 이미 사용된 낮은 정확도의 보간이 전혀 사용되지 않았다는 것이다.

하지만, 그림 1(b)에서 표현된 정확도와 동일한 정확도로 그림 1(c)처럼 표현하는 방법을 다중스케일 기반의 보간이라고 한다. 두 표현법의 중요한 차이는, 그림 1(b)가  $d/2$  크기의 지지구간을 갖는 7개의 보간 함수로 표현되는 반면, 그림 1(c)는 지지구간  $d$ 의 4개의 모자형 보간 함수와 지지구간  $d/2$ 의 3개의 보간함수로 표현된다는 것이다. 여기서, 그림 1(b)와 1(c)의 보간 방법의 차이점을 다시 한번 정리해 두고자 한다.

- 1) 그림 1(b)와 그림 1(c)에서 사용된 보간 기저들은 같은 함수공간을 표현한다.
- 2) 그림 1(b)는 모두  $d/2$ 의 지지구간만을 갖는 기저함수만으로 구성되는 단일스케일 표현을 나타내는 반면, 그림 1(c)는  $d/2$ 뿐만 아니라  $d$ 의 지지구간을 갖는 기저함수로 구성되는, 다중 스케일 표현을 나타낸다.

두 가지 기저들이 같은 함수 공간을 표현한다면, 왜 굳이 다중스케일 표현이 필요할까? 다중스케일 표현을 사용하는 주 동기는 보간의 정밀도를 적응적으로 그리고

\* 서울대학교 기계항공공학부 교수, 멀티스케일설계 창의사업단 단장

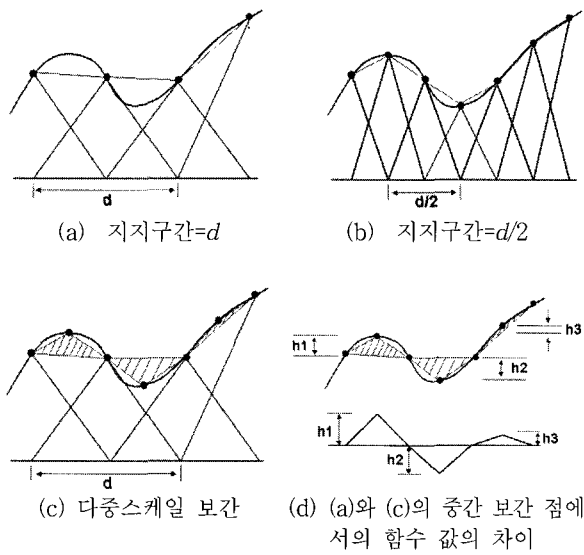


그림 1 다중스케일 보간 개념

효율적으로 높여가기 위함이다. 즉, 적응적 보간을 효율적으로 수행하기 위해서는 다중스케일 보간에 기반한 다중 해상도 해석을 할 필요가 있기 때문이다. 다중 해상도 보간은 그림 1(a)에서처럼 초기에 특정스케일을 갖는 보간 함수를 이용하여 한 해상도로 곡선을 보간한 후 여기에 작은 스케일을 갖는 보간 함수를 점진적으로 더해 나가면서 그 해상도를 증가시켜 나가는 것을 말한다. 그림 1(c)는 이러한 과정의 결과이다.

그림 1(d)은 그림 1(a)와 그림 1(c)의 차이를 보여주고 있는데, 이것은 그림 1(a)의 표현에서 새롭게 추가된 부분만을 표현하고 있다. 그림 1(d)에 사용된 보간 함수의 지지구간은 그림 1(a)에서 사용된 함수의 지지구간의 절반인데, 이와 같이 차이를 나타내는 함수를 보간 웨이블릿이라 한다. 즉, 웨이블릿은 차이를 표현하는데 사용되는 함수이다. 만약 더 높은 해상도가 필요하다면,  $d/4$ 의 지지구간을 갖는 웨이블릿을 추가로 사용하면 된다.

그림 1은 다중스케일로 곡선을 보간할 때, 보간 웨이블릿이 어떻게 사용되는지를 보여주고 있다. ‘차이’에 초점을 두고 있는 웨이블릿 개념을 명확히 하기 위해, 지금부터 Haar 웨이블릿<sup>(3,4)</sup>을 소개 하고자 한다. 이를 위해 그림 2에 있는 것처럼 부분적 상수 함수, 또는 이산데이터  $f$ 를 활용하고자 한다. 그림 2(a)는 단일스케일로  $f$ 를 표현한 반면, 그림 2(b)는  $f$ 를 다중스케일로 표현한 것이다. 그림 2(b)에서  $\{1,1,1,1\}^T$ 는 평균을 나타내는 항을 Haar 스케일링 함수라 하고, 나머지 차이를 나타내는 것을 Haar 웨이블릿이라 한다. 그림 2(b)는

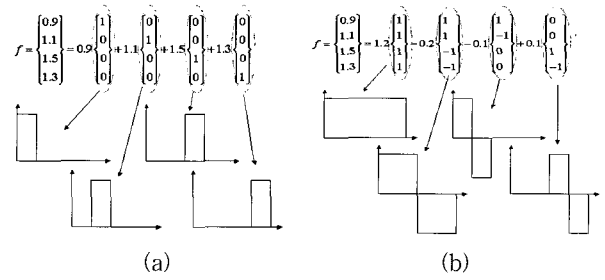


그림 2 부분적 상수함수(또는 이산 데이터)의 표현 (a) 단일 스케일의 Haar 스케일링 함수에 의한 표현 (b) 하나의 Haar 스케일링 함수와 다중 스케일의 3개의 Haar 웨이블릿에 의한 표현

하나의 평균을 나타내는 함수, 즉 하나의 큰 스케일 웨이블릿과 두개의 작은 스케일 웨이블릿으로 구성되어 있는 웨이블릿 시스템이다.

그림 2(b)에서 알 수 있듯이, 모든 웨이블릿은 다른 웨이블릿의 축소나 확장, 그리고 병진으로 항상 만들 수 있다. 이것이 웨이블릿이 효율적인 수학적 도구로 사용되는 중요한 특징 중의 하나이다. 즉, 어느 스케일에서의 하나의 웨이블릿이 정의되면, 다른 스케일에서의 모든 웨이블릿도 결정된다. Haar 웨이블릿의 또다른 중요한점은 그것의 평균값이 0이라는 것이다(보간 웨이블릿을 제외한 모든 웨이블릿의 평균은 0이다). 따라서 웨이블릿은 함수의 차이를 매우 효과적으로 표현할 수 있으며, 그렇기 때문에 어떤 함수의 국부적 변화를 적은 수의 웨이블릿 기저만으로 표현할 수 있게 된다.

### 3. 다중해상도 분석

앞에서 언급했듯이 웨이블릿은 다중스케일로 함수를 표현하도록 만들어진 수학적 도구이다. 웨이블릿을 사용하는 궁극적 목적은 다중해상도로 함수를 표현 하는 것이다. 다중해상도 해석(Multi Resolution Analysis, MRA)<sup>(3-6)</sup> 개념을 설명하기 위해 그림 3에서 도시된 연속하는 부분공간을 고려해보자. 그림 3에서 각 타원의 크기는 해당되는 함수공간의 크기를 나타낸다.

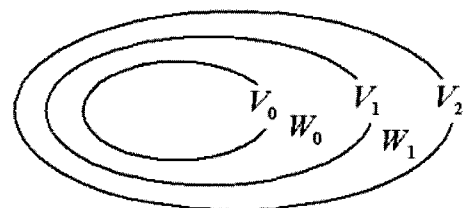


그림 3 MRA에 사용되는 부분공간의 계층적 특성

여기서  $V_j$ 는 해상도 수준  $j$ 에서의 부분 공간을  $W_j \cdot V_{j+1}$ 와  $V_j$ 의 차이를 나타내는 부분공간이다. 유한 에너지성을 갖는 함수 또는 신호로 이루어진  $L^2$  함수 공간에서 MRA는 다음과 같은 공식들로 설명된다.

$$\begin{aligned} & \{0\} \subset \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset L^2, \\ & \text{If } f(x) \in V_j \text{ then } f(2x) \in V_{j+1}, \\ & \text{If } f(x) \in V_j \text{ then } f(x-k) \in V_j, \\ & V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $j$ 와  $k$ 는 정수이다.  $V_0$ 와  $W_0$ 의 기저를 형성하는 스케일링 함수  $\phi(x)$ 와 웨이블릿 함수  $\psi(x)$ 가 정의되면,  $V_j$ 와  $W_j$ 는 식  $\phi_{j,k}(x) = \phi(2^j x - k)$ 와  $\psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k)$ 에 의해서  $\phi(x)$ 와  $\psi(x)$ 의 확장 및 병진으로 자동적으로 생성된다.

웨이블릿에 관련된 이론을 더 설명하기 전에, '다중 스케일', '웨이블릿' 그리고 'MRA'의 관계를 명확히 할 필요가 있다. MRA는 다중해상도에 기반한 해석을 의미하므로, 사실상 웨이블릿을 사용하지 않는다 하더라도 어떤 주어진 함수나 신호를 MRA 체계로 표현할 수 있다. 그러나 MRA를 효율적으로 구축하기 위해서는 다중스케일 개념이 절대적인데, 웨이블릿은 이와 같은 다중스케일 표현을 위한 강력하고 아마도 최선의 수학적 도구이다.

지금부터 모 웨이블릿  $\psi$ ·스케일링("j")과 병진("k") 연산을 적용하여 만들어지는 웨이블릿 기저를 이용하여  $L^2$  함수  $f$ 를 다중스케일로 전개하는 방법을 살펴보자.

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \\ &\equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_j[k] \psi_{j,k} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ 는  $f$ 와  $\psi_{j,k}$ 의 내적을 의미한다. 먼저 (1)을 이용하면 다음과 같이  $\phi(x)$ 와  $\psi(x)$ 에 대한 이중스케일 방정식을 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2x - n), \\ \psi(x) &= \sqrt{2} \sum_n g_n \phi(2x - n) \end{aligned} \quad (3)$$

식(3)에서  $h_n$ 와  $g_n$ 는 통상 각각 저주파 대역 필터, 고주파 대역 필터라하며, 두 필터 사이에 서로

$g_n = (-1)^{1-n} h_{1-n}$ 의 관계가 있다.  $h_n$ 와  $g_n$ 는 선택된 웨이블릿 시스템의 특징을 결정하기 때문에, 웨이블릿의 설계는 필터의 설계를 의미한다.

길이  $N=2^J$ 를 갖는 이산 신호  $a_j[k] (k=0, \dots, 2^J-1)$ 가 주어졌을 때,  $a_j[k]$ 를  $a_j[k] = \langle f, \phi_{j,k} \rangle$ 로 해석하면, 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} a_{j-1}[p] &= \sum_k h[k-2p] a_j[k], \\ d_{j-1}[p] &= \sum_k g[k-2p] a_j[k] \end{aligned} \quad (4)$$

작은 스케일의 스케일링 계수로부터 큰 스케일의 웨이블릿 계수와 스케일링 계수를 계산하는 과정은 이산 웨이블릿 변환(DWT)이라 한다. 웨이블릿 계수로부터 원래의 이산 신호를 복원하는 과정은 역웨이블릿 변환(IWT)이라 하고 아래와 같이 쓴다.

$$a_j[p] = \sum_k h[p-2k] a_{j-1}[k] + \sum_k g[p-2k] d_{j-1}[k] \quad (5)$$

식(4)와 (5)의 정변환과 역변환은 극히 효율적인 알고리즘인 Mallat 알고리즘<sup>3)</sup>으로 쉽게 구현된다. 그림 4는 DWT와 IWT가 길이 4의 이산 신호에 어떻게 적용되는지를 도시하고 있다. 이 그림에서는 독자의 이해를 쉽게 하기 위해서 가장 단순한 Haar 웨이블릿 기저를 도입하였다.

지금까지 Haar 웨이블릿을 이용하여 다중스케일, 다

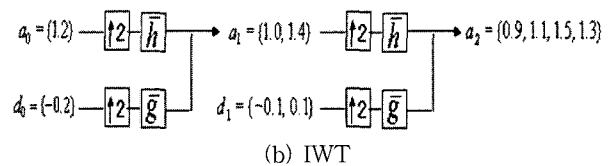
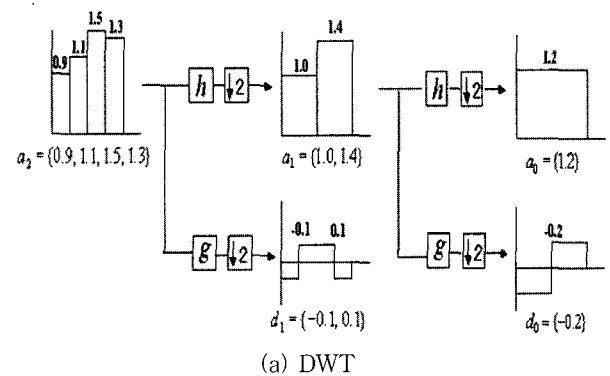


그림 4 길이 4의 이산 신호에 적용된 Haar 웨이블릿 변환 ( $h = (1/2, 1/2)$ ,  $g = (1/2, -1/2)$ )

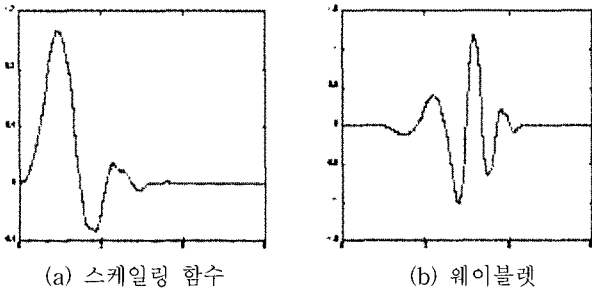


그림 5 Daubechies 웨이블릿 시스템

중해상도해석을 설명하였다. 그러나, Haar 웨이블릿 이외에도 수많은 종류의 웨이블릿이 존재하기 때문에 주어진 문제에 가장 적절한 웨이블릿 시스템을 선택할 수 있다. 웨이블릿을 선택할 때 세가지 중요한 인자는 소멸모멘트의 차수, 지지구간의 크기, 직교성 또는 이중직교성이다. 소멸모멘트 특성은 표현의 효율성과 관련되어 있다. 지지구간의 크기는 계산효율 뿐만 아니라 국소화와 연관이 있다. 그러나, 우리는 두 특성이 모두 뛰어난 웨이블릿 시스템을 가질 수는 없다. 직교성은 또한 계산의 효율과 관련이 있다. 그림 5에 예시된 웨이블릿은 Daubechies 웨이블릿으로 주어진 차수의 소멸모멘트를 가지는 웨이블릿 중에서 가장 짧은 지지구간을 갖는 웨이블릿이다.

### 3. 응용

#### 3.1 수치 해석

웨이블릿을 수치 해석에 이용하는 가장 큰 장점은 역시 적응해석을 효율적으로 할 수 있다는 것이다. 지금까지는 주로 Daubechies 웨이블릿과 같은 직교 또는 쌍직교 웨이블릿이 수치해석의 기저함수로 사용되어 왔으나, 이런 웨이블릿으로는 일반적인 형상을 갖는 영역에서 정의된 문제를 다루기 쉽지 않다.

이러한 문제점을 극복하기 위해 직교, 쌍직교 웨이블릿보다는 보간 웨이블릿을 이용한 연구<sup>14),15)</sup>가 수행된 바 있는데, 이 방법의 가장 큰 특징은 일반 형상에서의 문제를 비교적 쉽게 다룰 수 있다는 것이다. 그림 6은 2차원 모자형 보간 스케일링 함수와 웨이블릿 함수를 보여준다. 모자형 보간 함수는 모양이 간단할 뿐 아니라, 관심 있는 물리량을 직접 보간하는 특성을 가지고 있기때문에, 곡선 경계에서의 경계조건에 부가하기가 용이하다. 참고문헌<sup>14)~16)</sup>에서는 가상 영역 법(그림 7 참조)

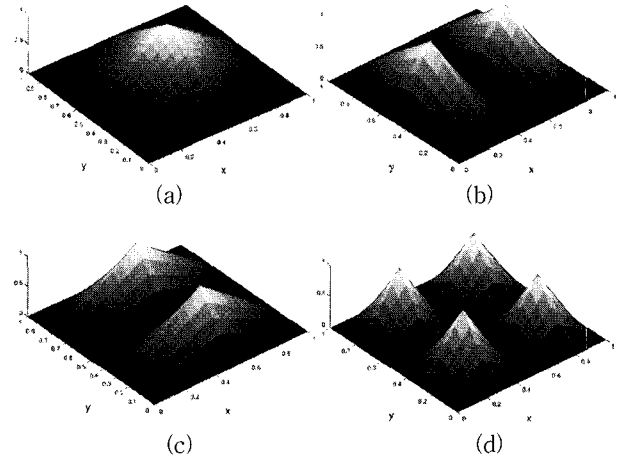


그림 6 2차원 모자형 보간 함수의 웨이블릿 ; (a) 스케일링 함수, (b-d) x방향, y방향, 그리고 대각선 방향의 차이를 나타내는 웨이블릿

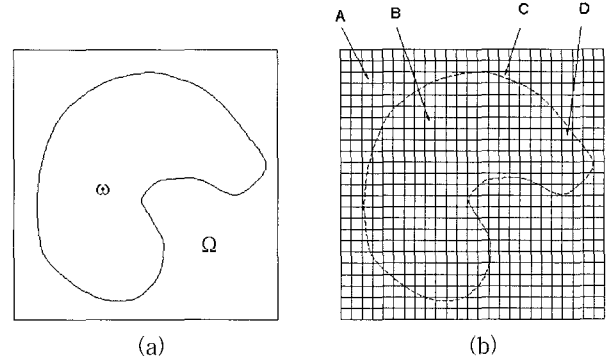


그림 7 (a) package domain  $\omega$ 를 포함하는 단순 형상의 가상영역, (b) 고정 격자 매쉬

을 이용한 보간 웨이블릿 기반 갤러킨 방법을 제시한 바 있다.

멀티스케일 적응 보간 웨이블릿-갤러킨 기법을 이용하여 해석한 예제의 하나로 그림 8에 있는 평판 탄성 문제를 살펴보자.<sup>15)</sup> 그림 9는 웨이블릿 계수를 이용한

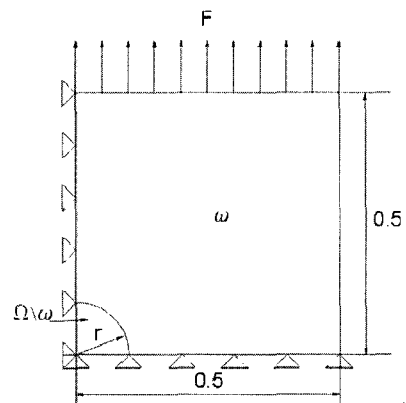


그림 8 응력 집중 문제 : 가운데 구멍이 있는 직사각형 평판의 4분의 1 모델

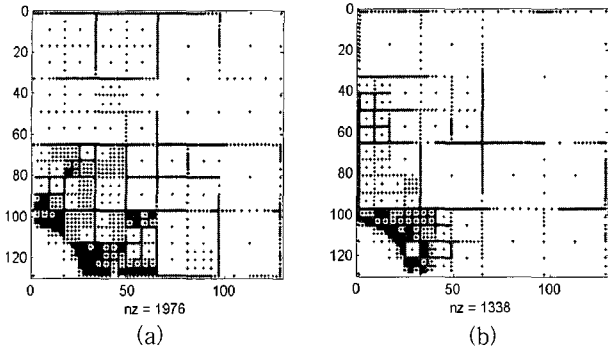


그림 9 웨이블릿기반 적응해석에 의해 삽입된 보간점의 분포 (왼쪽 : 수평 변위, 오른쪽 : 수직 변위)

적응 해석법을 사용했을 때, 보간 노드가 해석 가상영역 Ω에 어떻게 들어가는지를 보여주고 있다. 그림 9를 보면 응력 집중이 일어나는 곳에 더 많은 웨이블릿이 선택적으로 들어가게 된다.

### 3.2 최적화

최적화 문제에서도 웨이블릿이 사용될 수 있다. 위상최적설계, 형상최적설계, 유전알고리즘 등 여러 경우에 웨이블릿이 적용된 바 있으나, 지면상 위상 최적설계<sup>17)~19)</sup>에 웨이블릿이 어떻게 사용되는지를 간단히 설명하고자 한다. 웨이블릿을 위상 최적설계에 적용한 방법을 다중해상도 다중스케일 위상최적 기법(MTOP)이라고 부른다.<sup>20)</sup> 이 방법의 핵심 아이디어는 단일 해상도에서가 아니라 낮은 해상도에서 높은 해상도로 순차적으로 설계 최적화를 수행하는 것이다. 다중해상도 개념을 적용하기 위해서 전형적인 밀도 변수 영역이 아닌 웨이블릿 기반 변수 영역에서 위상최적설계가 수행된다.

다중해상도 다중스케일 해석을 이해하기 위해서 화가가 그림을 그리는 순서를 생각해보도록 하자. 처음에는 물체의 윤곽을 두꺼운 붓(긴 스케일)으로 스케치하고 자세한 부분들은 세밀한 붓(짧은 스케일)으로 그리게 된다. 이렇게 그림을 그리는 개념은 다중 해상도 다중스케일 위상최적화 개념과 동일하다. 즉, 순차적으로 물체를 그리는 개념이 구조 위상최적화에서 동등하게 적용된다. 이 방법에서는 가장 높은 해상도에서 최종해가 얻어질 때까지 해상도가 올라가게 된다. 이러한 설계개념을 그림 10으로 간략하게 도식화하였다.

그림 11의 미셀 벤치마킹 문제에 MTOP이 적용되는 과정을 살펴보자. 이 문제의 목적은 질량 구속 조건 37.5%를 만족하고 최소 컴플라이언스를 가지는 구조를

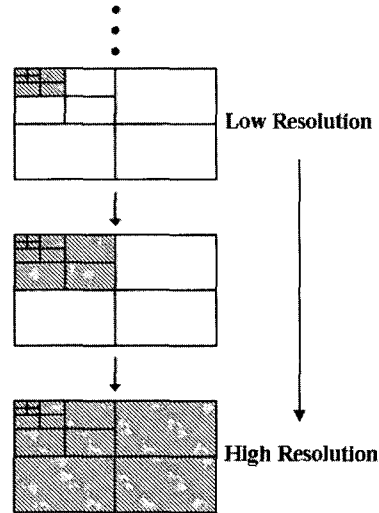


그림 10 다중해상도 설계 과정(회색 영역의 크기는 설계 영역의 크기와 같다.)

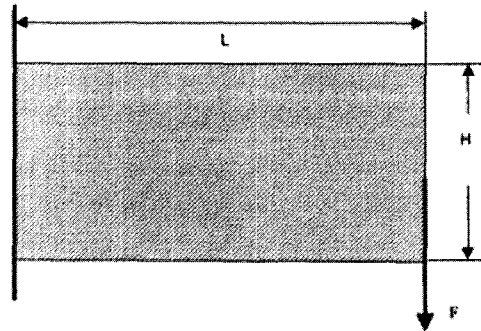


그림 11 미셀 벤치 마킹 문제(L=16, H=10, 포아송 비=0.3)

찾는 것이다. 그림 12는 MTOP을 이용한 설계가 진행되는 과정을 보여준다.<sup>20)</sup> 그림 12(f)의 최종결과를 밀도법을 이용한 전형적인 해들보다 구조적으로 단순하다. MTOP이 제공하는 중요한 성질은 최종 해석 해상도에 관계없이 구조적으로 간단한 해를 얻을 수 있다는 것이다.

웨이블릿 기반 위상최적화 방법은 힌지-프리 위상 최적설계에도 이용될 수 있다.<sup>21)</sup> 힌지는 설계 해석상의 이산화 과정에서 나타나는 수치 문제이다. 이것은 체커보드와 유사하나, 그 구조가 반복되지 않는다. 그림 13(a)는 B점에서  $U_{out}$ 를 최대화 시키는 것을 목적으로 하는 하중 변환기 설계 문제를 보여주고 있다. 그림 13(b)는 어떤 필터도 사용하지 않을 때 얻을 수 있는 전형적인 결과이다.

그림 13(b)의 결과에서는 체커보드 뿐만 아니라 힌지 패턴도 얻어지고 있다. 그림 13(b)에서 원으로 표시된 부분은 힌지를 가리키고 있다. 이런 힌지는 두 요소가 1절점에서만 연결되기 때문에 물리적으로 구현할

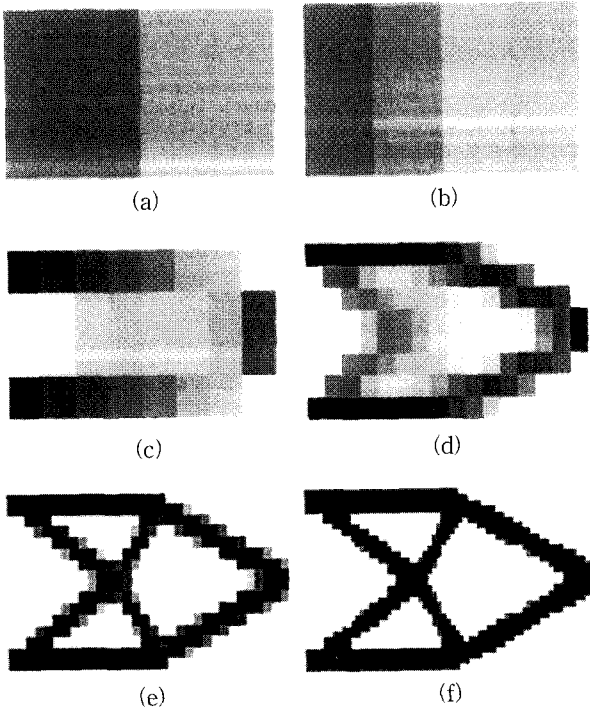


그림 12 MTOP을 이용한 각각의 다중해상도 진화 단계에서의 최적화 결과. (a)부터 (e)까지의 결과는 중간단계이고 (f)는 최종 설계 결과이다.

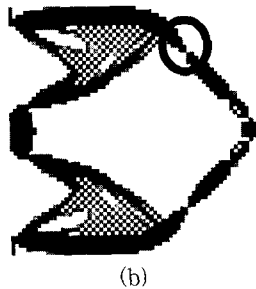
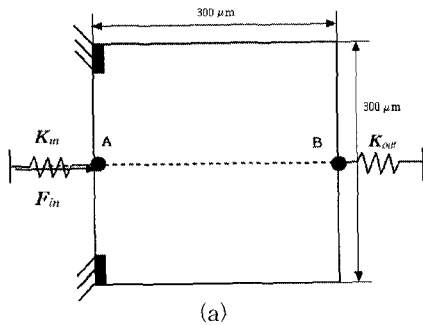


그림 13 (a) 힘 변환기 설계 ( $K_{in}=40N/mm$ ,  $K_{out}=4N/mm$ ,  $F_{in}=100mN$ , 질량 구속조건=30%, 종탄성 계수=200GPa, 포아송 비=0.3). (b) 필터링 등을 적용하지 않은 전형적 결과

수도 없으며 이를 인위적으로 조절하면 목적 함수 값이 크게 나빠진다. 따라서 이런 힌지가 최적설계의 결과로 나타나지 않도록 하기 위해서는 멀티스케일 기저를

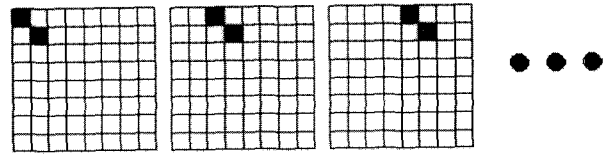


그림 14 가장 짧은 대각선 차이를 나타내는 2차원 하-웨이블렛. 요소의 경우, 이런 종류는 총 16가지가 있다. (Black : +1; Gray : -1, White : 0)

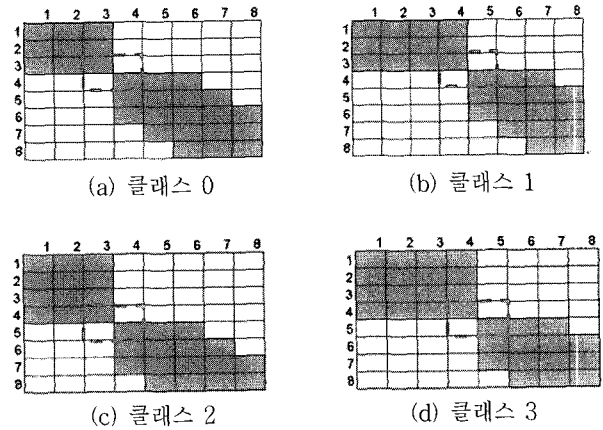


그림 15 힌지 패턴의 4가지 클래스

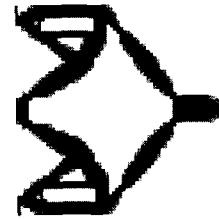


그림 16 이동불변 웨이블렛축소를 이용한 최적화 결과

이용한 이동불변 웨이블렛 축소 기법을 사용할 수 있다.

설계 변수를 표현하기 위한 웨이블렛 기저는(그림 14 참조), 기저 함수 1개로 힌지 패턴을 표현 할 수 있는 것을 알 수 있다. 하지만 그림 14에 표현된 웨이블렛만으로는 모든 힌지를 묘사할 수는 없다. 즉, 그림 15에 나온 4가지 힌지 패턴 중 (b-d)에 있는 패턴을 그림 14에 있는 기저로 간단히 표현할 수 없다. 이 문제를 해결하기 위해 멀티스케일 기반 웨이블렛 축소기법을 적용하면<sup>21)</sup> 그림 16에 있는 결과를 얻을 수 있다.

### 3.3 기타 최적화 관련 문제

지금까지 위상최적설계와 관련하여 멀티스케일 파라다임이 어떻게 적용되는지를 살펴보았다. 위상최적 설계에 멀티스케일을 적용하였던 원리를 확장하면 형상

최적화도 멀티스케일 기반으로 수행할 수 있다. 또한 유전 알고리즘에도 멀티스케일 개념을 적용할 수 있다. 이러한 문제들에 멀티스케일 개념을 적용하면 매우 효율적으로 최적화를 수행할 수 있다(참고문헌 [22, 23, 24]를 참고하기 바람).

참 고 문 헌

1. Donoho, D. L., *Interpolating wavelet transforms*, Technical Report. Department of statistics, Stanford University, 1992
2. Beylkin, G. and Saito, N., "Multiresolution representations using the auto-correlation functions of compactly supported wavelets", *IEEE Trans. Signal Processing* Dec. 41, 1993, pp.3584~3590
3. Mallat, S, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, New York, 1998
4. Stollnitz, E. J., DeRose, T. D. and Salesin, D. H., *Wavelets for Computer Graphics: Theory and Applications*, Morgan Kaufmann Publishers, Inc, San Francisco, 1996
5. Strang, G. and Nguyen, T., *Wavelets and Filter Banks*, Cambridge Press, Boston, 1996
6. Daubechies, I., *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, PA., 1992
7. Amaratunga, K. and Williams, J. R., "Wavelet-Galerkin solutions of boundary value problems", *Archives of Computational Methods in Engineering*, 4, 1997, pp.243~285
8. Bertoluzza, S. and Naldi, G., "A wavelet collocation method for the numerical solution of partial differential equations", *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 3, 1996, pp.1~9
9. Bertoluzza, S., An adaptive collocation method based on interpolating wavelets, *Multiscale Wavelet Methods for PDEs*, Dahmen, W., Kurdila, A. J., Oswald, P. (eds), Academic Press, San Diego, 1997, pp.109~135
10. Christon, M.A. and Roach, D. W., "The numerical performance of wavelets for PDEs: the multi-scale finite element", *Computational Mechanics*, 25, 2000, pp.230~244
11. Cohen, A., Dahmen, W. and DeVore, R., *Adaptive wavelet methods for elliptic operator equations - convergence rates*, RWTH Aachen, IGPM Preprint No. 165, 1998
12. Cohen, A. and Masson, R., "Wavelet methods for second order elliptic problems-preconditioning and adaptivity", *SIAM J. Sci. Comp.*, 21, 1999, pp. 1006~1026
13. Dahmen, W., "Wavelet methods for PDEs - some recent developments", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 128, 2001, pp.133~185
14. Jang, G. W., Kim, J. E. and Kim, Y. Y., "Multiscale-Galerkin method using interpolation wavelets for two-dimensional elliptic problems in general domains", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, to appear 2003
15. Kim, J. E., Jang, G. W. and Kim, Y. Y., "Adaptive multiscale wavelet-Galerkin analysis for plane elasticity problems and its applications to multiscale topology design optimization", *International Journal of Solids and Structures*, to appear 2003
16. Kwon, K. and Kim, Y. Y., "Decay characteristics of the hat interpolation wavelet coefficients in the two-dimensional multiresolution representation", submitted, 2003
17. Bendsøe, M. P., *Optimization of Structural Topology, Shape and Material*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1995
18. Bendsøe, M. P. and Sigmund, O., *Topology Optimization-Theory, Methods and Applications*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2003
19. Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method", *Comput. Meth Appl. Mech. Engrg.*, 71, 1988, pp.197~224
20. Kim, Y. Y. and Yoon, G. H., "Multi-resolution multi-scale topology optimization - a new paradigm", *Int. J. Solids and Struct.*, 37, 2000, pp.5529~5559
21. Yoon, G. H., Kim, Y. Y., Bendsøe, M. P. and Sigmund, O., "Hinge-free topology optimization with embedded translation invariant wavelet shrinkage", *Struct. Multidis. Opt.*, to appear 2003.
22. Kim, Y. Y. "Multiscale Paradigm for Mechanics

- and Design”, *Proceedings of the Japan Society of Computational Engineering and Science*, pp.19~28(May 18-20, 2003, Tokyo, Japan)
23. Kim, J. E., Kim, Y. Y. and Choi, K. K., “Shape optimization using multiscaled design velocity field,” *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems*(Nov.4-8, 2002, Pusan, Korea)
24. Kim, Y. Y. and Jung, D. H. “Multiscale Paradigm in genetic algorithm,” *Proceedings of the 9<sup>th</sup> AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*(Sept, 4-6, 2002, Atlanta, U.S.A) 