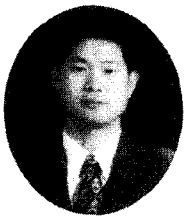
기술기사

Arbirtay Lagrangian Eulerian Finite Element Method



김 재 열*

1. 서 론

본 고에서 다루고자 하는 ALE란 Arbirtay Lagrangian Eulerian의 약자이다. ALE 유한요소법이라는 것은 이른바 ALE 記述法을 이용한 유한요소법이다. ALE 記述法이라는 것은 Mesh 영역(domain)을 고정영역으로 하는 물체의 운동 기술법이다. Lagrangian과 Eulerian 기술법은 각각 고체역학과 유체역학분야에서 자주 이용되어진다. 이에 비해 ALE 기술법은 고체-유체 상호작용, 자유표면, 소성흐름의 큰 문제분야에서 자주 이용되어진다. ALE 기술법이 응용되어지고 있는 분야의 특징 중 하나는 물체의 변형이 극단적으로 커진다라는 것에 있다.

Lagrangian 기술법을 변형이 극단적으로 커지는 문제에 응용하고자 할 때, 메쉬가 극단적으로 작아지거나 커지거나 하는 문제가 발생하며, 이 현상이 해석의 수렴 및 精度에 영향을 준다. 즉, 해의 精度에 문제가 생기거나 동적인 문제를 다룰게 될 경우, 매우 작은 시간스텝을 사용하지 않으면 안되는 문제가 일어날 수 있다. 한편, Eulerian 기술법은 공간영역을 고정영역으로 하는 물체의 운동 기술법으로서 변형이 극단적으로 커지는 문제에 응용할 수 있지만, 경계가 움직이는 문제에서는 대응하기 어렵다. 이상의 문제를 합리적으로 극복 가능한 것 중 하나가 본고에서 다루고자 하는 ALE 유한요소법이다.

2. ALE유한요소법의 개념

ALE유한요소법의 중요한 개념 중 하나는 메쉬영역 R_χ(Mesh domain)이다. Lagrangian 및 Eulerian 유한요소법의 경우는 메쉬영역이 각각 물질영역 R_X(material domain)와 공간영역 R_x(spatial domain)와 일치한다.

R_χ, R_X 및 R_x내에 있는 한 점의 좌표를 각각 χ_i, X_i, x_i (i=1,2,3)로 나타내고 메쉬좌표(mesh coordinates), 물질좌표(material coordinates), 공간좌표(spatial coordinates)라고 하면, 통상적인 좌표계와는 달리 이들의 좌표는 각각 $\chi_1-\chi_2-\chi_3$, $X_1-X_2-X_3$ 및 $x_1-x_2-x_3$으로 표현된다. Lagrangian유한요소법의 경우는 $\chi_i=X_i$ 이고, Eulerian 유한요소법의 경우는 $\chi_i=x_i$이다.

ALE유한요소법의 또 하나 중요한 개념은 메쉬점의 속도에 물질점의 점과 다른 임의의 값을 주는 것이 가능한 것에 있다. 이점을 만들면 요소가 극단적으로 변형하는 Lagrangian 유한요소법에서 발생하는 문제를 해소하는 것이 가능하다. 경계 조건을 만족하는 경계상에 있는 메쉬점의 속도를 결정 할 수 있기 때문에 변형하는 경계에 대응하기 어려운 Eulerian 유한요소법에 있는 문제도 해소 할 수 있다.

물질점과 메쉬점의 상대속도가 일어나기 때문에 Eulerian 유한요소법과 마찬가지로 ALE유한요소법의 경우에도 이류항(convective terms)이 정식화된다. 이 이류항이 존재하는 것에 따라 수치해석 중에 해가 진동(oscillate)

* 협성대학교 건축공학과 전임강사

하는 현상이 일어 날 수 있다는 사실을 특별히 고려할 필요가 있다. 그러나 ALE유한요소법의 경우 메쉬점의 속도를 임의로 주는 것이 가능하기 때문에 이류항의 영향을 적게 하는 것이 가능하다. 이 메쉬점 속도를 주는 방법은 해석에 있어서 중요한 1단계를 차지한다.

위에 기술한 것처럼 ALE기술법은 메쉬영역 R_χ를 고정영역으로 하는 물체의 운동기술법이다. 유한요소법을 이용하는 경우, 초기형상를 유한요소 메쉬로 분할하고 이산화 모델을 작성하기 때문에 메쉬 영역과는 이러한 유한요소영역과 일치한다. 초기형상의 메쉬 교차점 및 요소내에 있는 점을 합쳐서 메쉬점이라고 부르고, 그 위치를 메쉬 좌표 χ_i으로 표시한다. 물체가 외력을 받아 변형할 때, 현 시각 t의 변형형상를 공간좌표 x_i로 표시하자. 유한요소법에서는 물체를 유한요소의 집합으로써 근사하고 있으므로 공간좌표 x_i는 메쉬의 현시각 t에 대한 위치를 나타낸다.

이것을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$ {}^{t}x_j = x_i({}^{t}\chi, t) \tag{1} $$

단, ${}^{0}\chi = ({}^{0}\chi_1, {}^{0}\chi_2, {}^{0}\chi_3)$로 표시하고, 초기형상 위의 메쉬점을 의미한다. 식(1)의 좌측 위의 첨자는 시각을 나타내고, 어느 시각에 대응하는 양인가를 명기하기 위한 기호이다. 해석의 대상이 되는 것은 물질점으로 구성되어진 물체이다. 물질점의 집합으로 정의된 물질영역은 변형 후 어디에 있는가를 알 필요가 있다. 왜냐하면, 해석에 이용되는 변형도 및 응력등의 양은 물체가 변형하는 것에 의해 일어나는 양이기 때문이다. 식(1)에서 나타내는 공간좌표에 어떠한 물질점이 오고 있는가를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$ {}^{t}_{0}X_j = X_i({}^{t}\chi, t) \tag{2} $$

단, ${}^{t}\chi = ({}^{t}\chi_1, {}^{t}\chi_2, {}^{t}\chi_3)$을 표시하고 공간중의 한 점을 의미한다. 다시 초기 상태 위에 메쉬점 ${}^{0}\chi$에 어떤 물질점이 오고 있는가를 식으로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$ {}^{0}_{0}X_j = \hat{X}_i({}^{0}\chi, 0) \tag{3} $$

식(2), (3) 의 물질좌표 X_i의 좌측아래의 첨자는 같은 시각을 표시하고, 형태에 있어서 어느 시각의 X인가를 명기하기 위한 기호이다. Lagrangian 기술법에서는 ${}^{t}_{0}X = {}^{0}_{0}X$ 이다. 하지만 ALE기술법은 메쉬영역 R_χ를 고정영역으로 하는 물체의 운동 기술법이고, 다시 그 위에 메쉬점이 임의의 속도로 움직일 수 있기 때문에 ${}^{t}_{0}X \neq {}^{0}_{0}X$이 성립한다. 이것은 각 시각 (혹은 증분스텝)에 있어서, 그때의 요소 내에 들어가 있는 물질점 집합이 다른 것을 의미한다. 즉, ALE기술법을 이용할 경우, 초기단계, $t = t_0$ 부터 최종단계 $t = t_E$까지 既知의 영역은 $t = t_0$에 의해서 정의되어진 메쉬영역 R_χ이다. 임의의 시각 $t = t$에 있어서 R_χ가 차지하는 공간영역 R_x와 그 R_x에 들어가 있는 물질영역 R_X는 미지이고 시간과 함께 변화해간다. 이것은 해석상에 있어서 다음 스텝을 의미한다. 즉, 예를 들면 유한요소법에서 접선강성 매트릭스나 요소절점력 벡터등을 구할 때 적분영역이 R_X혹은 R_x의 경우, 시각(혹은 증분스텝)마다 갱신해야만 된다는 것을 나타내며, 적분영역이 R_χ라면 바꿀 필요가 없음을 나타낸다. 이 「적분영역 R_χ를 갱신할 필요가 없다는 것」은 지금까지 몇 번이나 기술하였던 「메쉬영역을 고정영역으로 하는 것」과 같은 의미이다. R_X및 R_x를 바꾸는 것을 식으로 나타내면, 각각 다음과 같이 된다.

$$ {}^{t+\Delta t}_{0}X_j = {}^{t}_{0}X_i + {}_{0}X_i \tag{4} $$

$$ {}^{t+\Delta t}_{0}x_i = {}^{t}x_i + x_i \tag{5} $$

식(4), (5)의 Δt 는 증분의 크기를 나타낸다.

여기까지 ALE기술법에 있어 물체의 운동을 기술하기 위한 기하학 관계식을 알아 보았다. 다음은 ALE 기술법에 있어서의 量의 시간에 대응하는 변화율을 나타내는 식을 설명한다. 여기에서 말하는 量이란 온도, 속도, 변위, 응력등을 의미한다. 量의 변화율은 가상일의 변화율을 구할 때에 필요하며, 가상일의 변화율은 증분해석에 필요한 증분평형식을 구할 때에 필요하다. 양은 물질점에 있는 것이므로 양의 변화율을 구할 때에 동일한 물질점을 주목하고, 그 물질점의 시간에 대응하는 변화를 구하지 않으면 안된다. 같은 물질점을 주목하는 것은, 계산상 물질점의 좌표 X를 고정하고, 양의 시간에 대한 편미분을 구하는 것을 의미한다. 이러한 미분은 물질시간 미분(material timederivative)이라고 부르고 다음의 기호로 나타낸다.

$$ \text{material time derivative} = \frac{\partial A}{\partial t}\int_x \tag{6} $$

단, A는 임의의 양을 나타낸다. ALE기술법을 이용하는 경우 A는 메쉬좌표 χ와 시간 t의 함수이므로 식(6)의 물질시간 미분을 구하면 다음 식처럼 된다.

$$\frac{\partial A}{\partial t}\int_x = \frac{\partial A}{\partial t}\int_x + \frac{\partial A}{\partial \chi_1}\frac{\partial \chi_1}{\partial t}\int_x \tag{7}$$

식(7)의 우변 제1항은 기준시간 미분(referential time derivative)또는 메쉬시간 미분(mesh time derivative), 제 2항은 이류항(convective term)이라고 불린다. 후자의 이류항의 발생은 메쉬점과 물질점과의 상대속도가 존재하는 것에 유래한다. 식(7)의 A에 공간좌표 ${}^t x_i (i=1,2,3)$을 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial {}^1x_i}{\partial t}\int_x = \frac{\partial {}^1x_i}{\partial t}\int_x + \frac{\partial {}^1x_i}{\partial \chi_j}\frac{\partial \chi_j}{\partial t}\int_x \tag{8}$$

위 식의 좌변 및 우변 제1항은 각각 물질점의 속도 ν_i와 메쉬점의 속도 $\hat{\nu}_i$ 이다. 식(8)의 우변 제2항의 이류속도성분이다. 이 이류속도성분의 제2편미분은 메쉬좌표계로부터 측정한 물질점 X의 속도 성분이다. 이것들의 속도성분을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial {}^1x_i}{\partial t}\int_x = w_j \tag{9}$$

여기서, 식(9)는 아래 식과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^t\nu_i = {}^t\hat{\nu}_i + \frac{\partial {}^tx_i}{\partial \chi_j} w_j$$

혹은,

$$\frac{\partial {}^tx_i}{\partial \chi_j} w_j = {}^t\nu_i - {}^t\hat{\nu}_i \tag{10}$$

미분연속법칙을 이용해 식(9)까지 고려하면 식(7)의 좌변 제2항을 다음과 같다.

$$\frac{\partial A}{\partial \chi_i}\frac{\partial \chi_i}{\partial t}\int_x = \frac{\partial A}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial \chi_i} w_i$$

식(10)을 고려하면 위의 식은 아래 식과 같이 된다.

$$\frac{\partial A}{\partial t}\int_X = \frac{\partial A}{\partial t}\int_x + \frac{\partial A}{\partial \chi_j}(\nu_j - \hat{\nu}_j) \tag{11}$$

식(11)을 이용하여 메쉬좌표와 시간 t의 함수인 임의의 양의 물질시간 미분을 구할 수 있다. 식(11)의 우변에 있는 $(\nu_j - \hat{\nu}_j)$은 이류속도(convective velocity)라고 불리며 다음과 같이 나타낸다.

$$c_j = \nu_j - \hat{\nu}_j \tag{12}$$

3. ALE법에 의한 가상일방정식(virtual work equation)

구조해석에 필요한 기본식은 평형식, 변형도-변위관계식 및 응력-변형도 관계식(혹은 구성식)이다. 여기에서 평형식을 구하기 위한 가상일방정식을 살펴보도록 한다. 비선형 문제를 풀 경우 증분법을 이용하는 경우가 많다. 증분법이라는 것은 목표하는 스텝을 몇 회에 나누어 Δt씩 문제를 풀어 나가는 수치해석법이다. 해석하고자 하는 문제의 시각 t까지의 변형상태을 알고, 다음의 시각 $t+\Delta t$에 대한 변형 상태를 구하도록 하는 것이다. 여기에서 말하는 변형상태는 변형형상, 응력상태, 온도분포 등을 의미한다. ALE유한요소법 뿐 아니라 Lagrangian 혹은 eulerian 유한요소법의 경우라도 가장 최초의 출발점이 되는 것은 다음의 식이다.

$$\begin{aligned}&\int_{t+\Delta t_{Rx}} \delta \frac{\partial u_i}{\partial {}^{t+\Delta t}} \, {}^{t+\Delta t}\tau_{ij} \, d^{t+\Delta t} V \\ &= \int_{t+\Delta t_{Rx}} \delta u_i \, {}^{t+\Delta t}b_i \, d^{t+\Delta t} V \\ &\quad + \int_{t+\Delta t_{\partial Rx}} \delta u_i \, {}^{t+\Delta t} t_i \, d^{t+\Delta t} A\end{aligned} \tag{13}$$

이것은 변형후의 형상이 이용된 가상일의 방정식이다. 식(13)의 좌변은 내부 가상일식 우변은 외부가상일식이다. 여기에서 내부가상일식에 대해서 설명한다. 이제 식(13)의 좌변만을 다음과 같이 쓴다.

$$\begin{aligned}&\delta \, {}^{t+\Delta t} W_{INT} \\ &= \int_{t+\Delta t_{Rx}} \delta \frac{\partial u_i}{\partial {}^{t+\Delta t} x_j} \, {}^{t+\Delta t}\tau_{ij} \, d^{t+\Delta t} \nu\end{aligned} \tag{14}$$

식(14)의 적분 영역은 시각 $t+\Delta t$ 에 있어서 공간 영역이다. 이 공간 영역은 아직 모르기 때문에 기지의 상

태를 이용하여 식을 고쳐 쓰지 않으면 안된다. 시각 t 까지의 상태는 알고 있기 때문에, 그중 어느 것을 이용해도 이론상에서는 가능하다. 그러나 ALE유한요소법의 경우 초기형상에서 정의된 메쉬영역 R_χ를 旣知이며 고정이기 때문에 이 R_χ를 이용한다. 식(14)는 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\delta\, {}^{t+\Delta t}W_{INT} = \int_{Rx} \delta \frac{\partial u_i}{\partial {}^0\chi_k} \frac{\partial {}^0\chi_k}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij}\, \hat{J}\, d\, {}^0\hat{V} \tag{15}$$

식(15)의 $\hat{J}$는 시각 ${}^{t+\Delta t}R_X$와 ${}^0R_\chi$에 있는 미소체적의 체적변화율이며 다음의 식에서 부여된다.

$$\hat{J} = \frac{d\, {}^{t+\Delta t}V}{d\, {}^0\hat{V}}$$

$$\hat{J} = det\left[\frac{\partial\, {}^{t+\Delta t}x_i}{\partial\, {}^0\chi_j}\right] \tag{16}$$

식(15)는 비선형식이므로 식을 직접 푸는 것은 어렵다. 여기에서 식(15)의 선형화를 수행한다. 이 선형화에서 얻어지는 식은 증분해석의 기본식이 된다. 식(15)를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta({}^t W_{INT} + W_{INT}) = \int_{Rx} \delta \frac{\partial u_i}{\partial {}^0\chi_k} \frac{\partial {}^0\chi_k}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij}\, \hat{J}\, d\, {}^0\hat{V}$$

$$\delta({}^t W_{INT} + W_{INT}) = \int_{Rx} \delta \frac{\partial u_i}{\partial {}^0\chi_k} \frac{\partial {}^0\chi_k}{\partial {}^t x_j} {}^t\tau_{ij}\hat{J}\, d\, {}^0\hat{V}$$

$$\delta({}^t W_{INT} + W_{INT}) = \int_{Rx} \delta \frac{\partial u_i}{\partial {}^0\chi_k} \frac{\partial {}^0\chi_k}{\partial {}^t x_j} {}^t\tau_{ij}\hat{J}\, d\, {}^0\hat{V} + \delta\left(\partial^t \frac{W_{INT}}{\partial t}\Delta t\right) \tag{17}$$

식(17)의 W_{INT}는 시각 t에서 $t+\Delta t$의 사이에서 발생되는 내부일의 증분이다. 식(17)의 우변 제 2항의 시각 t에 의한 가상일의 시각 t에 대한 편미분을 주목하자. ALE의 유한요소법에서는 메쉬영역을 고정영역으로 한다. 이것은 식의 독립변수가 메쉬좌표가 χ_i인 것을 의미한다. 따라서 식 (17) 우변 제2항의 시각 t에 의한 가상일의 시간 t에 대한 편미분은 χ_i가 고정된 편미분이다. 이러한 편미분은 다음의 기호로 나타내어진다.

$$\frac{\partial()}{\partial t}\int_\chi = ()^* \tag{18}$$

식(17)부터

$$\delta\, {}^t W_{INT} = \int_{Rx} \delta \frac{\partial u_i}{\partial {}^0\chi_j} \frac{\partial {}^0\chi_k}{\partial {}^t x_j} {}^t\tau_{ij}\, \hat{J}\, d\, {}^0\hat{V}$$

이기 때문에

$$\delta({}^t W_{INT})^* = \int_{R_x} \delta \frac{\partial u_i}{\partial {}^t x_k}\left[\left(\frac{\partial {}^0\chi_k}{\partial {}^t x_j}\right)^* {}^t\tau_{ij}\, \hat{J} + \frac{\partial {}^0\chi_k}{\partial {}^t x_j}({}^t\tau_{ij})^*\hat{J} + \frac{\partial {}^0\chi_k}{\partial {}^t x_j} {}^t\tau_{ij}\,(\hat{J})^*\right] d\, {}^0\hat{V} \tag{19}$$

가된다. 식(19)의 우변[ ]안에 있는 괄호( ) 3개를 다음과 같이 고쳐쓸 수 있다.

$$\left(\frac{\partial {}^0\chi_{m,}}{\partial {}^t x_j}\right)^* = -\frac{\partial {}^0\chi_m}{\partial {}^t x_k}\frac{\partial {}^t\hat{\nu}}{\partial {}^t x_j} \tag{20}$$

$$({}^t\tau_{ij})^* = -\,{}^t\tau_{ij,k}\, c_k + C_{ijkl}\,\nu_{(k,l)} + S_{ijkl}\,\nu_{[k,l]} \tag{21}$$

단,

$$\nu_{(k,l)} = 1/2(\nu_{k,l} + \nu_{l,k}) \tag{22a}$$

$$\nu_{(k,l)} = 1/2(\nu_{k,l} - \nu_{l,k}) \tag{22b}$$

$$({}^t\hat{J})^* = \frac{\partial {}^t\hat{\nu}_i}{\partial {}^t x_i}\, {}^t\hat{J} \tag{23}$$

식(21)의 C_{ijkl}, S_{ijkl}은 재료상수와 응력을 포함하는 식이다. 먼저 식 (20)과 (23)을 식 (19)에 대입하면

$$\delta({}^t W_{INT})^* = \int_{R_x} \delta \frac{\partial u_i}{\partial {}^0\chi_k}\left[-\frac{\partial {}^0\chi_k}{\partial {}^t x_n}\frac{\partial {}^t\hat{\nu}_n}{\partial {}^t x_j}\, {}^t\tau_{ij}\, {}^t\hat{J} + \frac{\partial {}^0\chi_k}{\partial {}^t x_j}({}^t\tau_{ij})^*\, {}^t\hat{J} + \frac{\partial {}^0\chi_k}{\partial {}^t x_j}\, {}^t\tau_{ij}\frac{\partial {}^t\hat{\nu}_n}{\partial {}^t x_n}\, {}^t\hat{J}\right] d\, {}^0\hat{V}$$

가 된다. $d\,{}^{t}V = {}^{t}\hat{J}\,d\,{}^{0}\hat{V}$를 고려하면, 위의 식은 다음과 같이 ${}^{t}R_x$에 대한 적분으로 변환이 가능하다.

$$\delta({}^{t}W_{INT})^{*} = \int_{t_{R_x}}\Big[-\delta\frac{\partial u_i}{\partial {}^{t}x_n}\frac{\partial {}^{t}\hat{\nu}_n}{\partial {}^{t}x_j}\,{}^{t}\tau_{ij} + \delta\frac{\partial u_i}{\partial {}^{t}x_j}({}^{t}\tau_{ij})^{*} + \delta\frac{\partial u_i}{\partial {}^{t}x_j}\,{}^{t}\tau_{ij}\frac{\partial {}^{t}\hat{\nu}_n}{\partial {}^{t}x_n}\Big]d\,{}^{t}V$$

$$\delta({}^{t}W_{INT})^{*} = \int_{t_{R_x}}\Big[-\delta\frac{\partial u_i}{\partial {}^{t}x_l}\frac{\partial {}^{t}\hat{\nu}_l}{\partial {}^{t}x_j}\,{}^{t}\tau_{in} + \delta\frac{\partial u_i}{\partial {}^{t}x_j}({}^{t}\tau_{ij})^{*} + \delta\frac{\partial u_i}{\partial {}^{t}x_j}\,{}^{t}\tau_{ij}\frac{\partial {}^{t}\hat{\nu}_n}{\partial {}^{t}x_n}\Big]d\,{}^{t}V$$

$$\delta({}^{t}W_{INT})^{*} = \int_{t_{R_x}}{}_{t}\delta u_{i,j}\big[({}^{t}\tau_{ij})^{*} - {}^{t}\tau_{in}\,{}^{t}_{t}\hat{\nu}_{j,n} + {}^{t}\tau_{ij}\,{}^{t}_{t}\hat{\nu}_{n,n}\big]d\,{}^{t}V \tag{24}$$

식(23)의 유도과정에 있어 다음의 식 및 기호가 사용되어졌다.

$$\partial\frac{\partial\delta u_i}{\partial {}^{t}x_j} = \delta\frac{\partial u_i}{\partial {}^{t}x_j},\quad \frac{\partial\delta u_i}{\partial {}^{t}x_n}\frac{\partial {}^{t}x_n}{\partial {}^{t}x_j}\,{}^{t}\tau_{ij},\quad \frac{\partial()}{\partial {}^{t}x_j} = {}_{t}()_{,j}$$

상대속도 ${}^{t}c_i$는

$${}^{t}c_i = {}^{t}\nu_t - {}^{t}\hat{\nu}_i \tag{25}$$

이기 때문에 메쉬속도 ${}^{t}\hat{\nu}_i$는 다음의 식으로 된다.

$${}^{t}\hat{\nu}_i = {}^{t}\nu_t - {}^{t}c_i \tag{26}$$

식(26), (21)과 (22b)를 식(24)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\delta({}^{t}(W_{INT}) = \int_{t_{R_x}}{}_{t}\delta u_{i,j}\,{}_{t}C_{ijkl}\,{}^{t}_{t}\nu_{k,l}\,d\,{}^{t}V + \int_{t_{R_x}}{}_{t}\delta u_{i,j}\,{}^{t}\tau_{ij}\,{}^{t}_{t}\nu_{i,l}\,d\,{}^{t}V + \int_{t_{R_x}}{}_{t}\delta u_{i,j}({}^{t}\tau_{ik}\,{}^{t}_{t}c_{j,k} - {}^{t}\tau_{ij}\,{}^{t}_{t}c_{k,k} - {}^{t}c_k\,{}^{t}_{t}\tau_{ij,k})\,d\,{}^{t}V \tag{27}$$

식(27)을 가상일은 3개의 부분에 나눠져 있는 것을 나타내고 있다. 그 3개의 부분이라는 것은 각각 물질의 응답(material response), 초기응력(initial stress)과 물질의 변환 (transport of material)에 의한 부분이다.

3. 1 증분가상일식의 이산화

앞 절에서 내부 가상일 식을 유도했다(식(27)). 이 식에 시간 증분 dt를 대입하면, 다음에 나타나는 내부 가상일의 증분식을 얻을 수 있다.

$$\delta(W_{INT}) = \int_{t_{R_x}}{}_{t}\delta u_{i,j}\,{}_{t}C_{ijkl}\,{}^{t}_{t}u_{k,l}\,d\,{}^{t}V + \int_{t_{R_x}}{}_{t}\delta u_{i,j}\,{}^{t}\tau_{ij}\,{}_{t}u_{i,l}\,d\,{}^{t}V + \int_{t_{R_x}}{}_{t}\delta u_{i,j}({}^{t}\tau_{ik}\,\bar{u}_{j,k} - {}^{t}\tau_{ij}\,\bar{u}_{kk} - \bar{u}_k\,{}^{t}\tau_{ij,k})\,d\,{}^{t}V \tag{28}$$

단, $c_j\,dt = \bar{u}_j$, $\delta(W_{INT})^{*} = \delta(W_{INT})^{*}dt$이다. 통상의 유한요소법으로 식(28)을 이산화한다.

상세한 유도과정을 생략하고, 결과만을 보면 식(28)로 부터 다음과 같은 접선강성식을 얻을 수 있다.

$$({}^{t}_{t}K_L + {}^{t}_{t}K_{NL})u + {}^{t}_{t}K_{ALE}\,\bar{u} \tag{29}$$

통상의 유한요소법과 비교해 보면, ${}^{t}_{t}K_L$, ${}^{t}_{t}K_{NL}$은 각각 선형, 비선형강성매트릭스이고, ${}^{t}_{t}K_{ALE}$가 ALE유한요소법에 새로 추가되는 매트릭스이다. u는 절점의 증분변위, $\bar{u}$는 u와 절점의 증분변위 $\hat{u}$사이에 발생하는 상대변위이다. ${}^{t}_{t}K_L$, ${}^{t}_{t}K_{NL}$는 통상 updated lagrangian 정식화에서 구해지는 것과 같고, ${}^{t}_{t}K_{ALE}$는 $\bar{u}$가 발생하는 것에 의해 나타나는 것이다.

식(29)를 이용해 선형화 증분 평형식은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$({}^{t}_{t}K_L + {}^{t}_{t}K_{NL})u + {}^{t}_{t}K_{ALE}\,\bar{u} = {}^{t+\Delta t}P - {}^{t}F \tag{30}$$

${}^{t+\Delta t}P_0$ ${}^{t}F$는 제각기 절점 외력 및 내력 Vector 이다. $\bar{u}$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{u} = u - \hat{u} \tag{31}$$

식(31)을 고려하면, 식(30)을 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$({}^{t}_{t}K_L + {}^{t}_{t}K_{NL} + {}^{t}_{t}K_{ALE})u = {}^{t+\Delta t}P - {}^{t}F + {}^{t}_{t}K_{ALE}\,\bar{u} \tag{32}$$

식(32)를 보면 알 수 있듯이 통상 Lagrangian 유한

요소법과 비교하면, 접선강선 및 불평형력 Vector에 각각 ${}_t^tK_{ALE}$와 ${}_t^tK_{ALE}\overline{u}$가 새롭게 추가되게 된다. 이 ${}_t^tK_{ALE}$와 ${}_t^tK_{ALE}\overline{u}$ 는 상대변위 $\hat{u}$가 생기는 것에 의해 생기는 힘이다.

4. 결 론

이상으로 ALE 유한요소법에 대한 개념과 강성매트릭스 구성에 대해 간단히 알아보았다. 이 방법은 통상적인 기하학적 비선형 유한요소법의 정식화 과정과 유사한 접근 방식임을 알 수 있다. 본 고에서 소개한 ALE 유한요소법은 지금까지 많이 응용되어 왔던 분야인 내압에 의해 팽창되어지는 탱크, 댐의 붕괴 과정등 뿐 아니라, 건축구조물에서도 구조물의 변형에 따른 요소의 변이를 고려한 구조물을 해석해야 할 때 응용이 가능하리라 사료된다.