

# 붓스트랩 방법을 이용한 로버스트 관리도<sup>†</sup>

송서일 · 조영찬 · 박현규

동아대학교 산업시스템공학과

## Robust Control Chart using Bootstrap Method

Suh-Il Song · Young-Chan Jo · Hyun-Kyu Park

Dept. of Industrial Systems Engineering, Dong-A University

Statistical process control is intended to assist operators of a stable system in monitoring whether a change has occurred in the process, and it uses several control charts as main tools. In design and use of control chart, it is rational that probability of false alarm is minimized in stable process and probability of detecting shifts is maximized in out-of-control.

In this study, we establish bootstrap control limits for robust M-estimator chart by applying the bootstrap method, called resampling, which could not demand assumptions about pre-distribution when the process is skewed and/or the normality assumption is doubt. The results obtained in this study are summarized as follows : bootstrap M-estimator control chart is developed for applying bootstrap method to M-estimator chart, which is more robust to keep ARL when process contain contaminate quality characteristic .

**Keywords :** bootstrap, robust control chart, SPC, M-estimator

### 1. 서 론

좋은 품질의 제품이란 어떠한 경우든 고객이 요구하는 수준에서 설계되고 생산되어야 하므로 그 품질을 일정한 수준으로 유지하기 위해서는 고객의 요구품질 수준을 정확하게 파악하는 것이 무엇보다 중요하다. 그러나 고객의 요구조건이나 품질수준을 정확하게 파악했다고 해도 이를 설계품질에 담아내 생산·공급할 수 있는 기술과 능력을 확보하지 못하면 품질은 관리되었다고 할 수 없다. 품질이 관리된다는 것은 품질의 균일함을 의미하며, 이는 안정된 공정에서 확립된다. 품질이 균일하지 못한 정도는 산포의 크기로 측정되는데 이 산포 발생의 형태와 정도를 이해하는 일이 곧 통계적 공정관리(SPC : statistical process control)의 기본이다.

통계적 공정관리의 주요한 도구로써 사용되고 있는 관리도는 일반적으로 안정된 시스템의 작업자들이 공

에 어떤 변화가 발생하였는지 여부를 모니터링할 수 있게 해주며, 좋은 관리도의 조건은 공정에서 어떤 변화가 발생하였을 때 그것을 빠르게 검출해야 한다는 것이다.

산업현장에서는 공정의 평균을 관리하기 위한 관리도로  $\bar{x}$ -관리도가 널리 사용된다. 이 전형적인 관리도의 관리한계선은 관리되어야 할 품질특성치가 정규분포한다는 가정 위에서 설정된 것이다. 그러나 만약 실제 공정 분포를 모르거나, 몇몇 이상점을 가지게 된다면 실제로 관리도 설계시 고려한 제I종 오류나 제II종 오류에 있어서 심각한 영향을 받게 된다. 실제 현실에서 얻은 데이터들은 정규분포보다도 좀더 두꺼운 꼬리를 가지는 분포를 따르는 경우가 많고, 때로는 한쪽으로 치우친 분포를 갖는 데이터도 흔히 접하게 되므로 기존의 관리도들이 기초하고 있는 정규성 가정을 만족할 수 없게 되는 경우가 많다.

특히, Shewhart에 의하면 모든 공정의 품질특성치가

<sup>†</sup> 본 연구는 2001년도 동아대학교 학술연구조성비(공모과제)에 의하여 연구되었음

정규분포를 따르는 것은 아니며, 실제 부딪치게 되는 공정 품질특성치들의 분포중 상당수가 정규분포보다도 꼬리부분이 더 두꺼울 것이라는 것을 제시하였다[1]. 또한 Noble은 이상원인이 경제적인 면에서 항상 제거되는 것이 아니기 때문에 두꺼운 꼬리 분포에 대한 유도를 제시하고 있다[2]. 이러한 측면에서 로버스트 추정량과 비모수적 추정량은 두꺼운 꼬리 분포에 대해서는 전통적인 추정량보다 더 좋은 수행도를 보여준다.

이러한 관점에서 품질특성치의 분포 또는 이상점에 보다 둔감한(robust) 통계량을 이용하거나 비모수적 통계 방법을 이용한 로버스트 관리도에 관한 연구가 몇몇 학자들에 의해서 수행되었다.

Farnum과 Stanton는 부호검정에 기초를 둔 관리도를 제안하였고[3], 부호검정에 기초를 둔 관리도의 경제성 평가가 Arnold에 의하여 연구되었다[4][5]. 순서통계량을 이용한 비모수적 EWMA 관리도는 Peter에 의해서 제안되었는데 제시된 관리도는 공정평균의 갑작스러운 변화에 민감하고, 이상점에 대해서 로버스트한 관리한계를 제시하는 것으로 나타났다[6].

로버스트 추정량의 R-추정량에 해당하는 Hodges-Lehmann 통계량에 기초한 중심위치 관리도는 Alloway 등에 의해서 제안되었는데, 두꺼운 꼬리를 가지는 대칭 분포로부터 샘플 수가 많은 경우에 대해서 좋은 결과를 제공하는 것으로 나타났다[7]. 특히 그들이 제안한 비모수적 방법은 계산의 편의성도 함께 제공하고 있다.

그러나 Alloway 등에 의해서 제시된 비모수적 로버스트 관리도는 안정상태에서의 오보확률은 잘 유지하나 공정의 이상상태를 감지하는 기준으로 사용되는 ARL (average run lengths)이 너무 길게 나온다는 단점을 가지고 있다[7]. 이와 같은 Hodges-Lehmann 통계량을 이용한 비모수관리도의 단점을 보완하기 위한 관리도가 Pappanastos와 Adams에 의해서 제안되었는데, 그의 연구에서는 Hodges-Lehmann 통계량을 이용한 관리도의 단점을 보완하여  $\bar{X}$  관리도에 비해 로버스트한 성질을 갖춘 2가지 대안을 제시하였다[8]. 하지만 여기서 제시된 2가지 로버스트 관리도도 공정이 이상상태를 벗어나는 것을 감지하는 수행도 측면에서는 전통적인 관리도보다 우수하지 못한 결론을 제시하고 있다.

그러나 Abu-Shawiesh 등은 샘플 평균과 샘플 표준편차보다는 일반적인 Hodges-Lehmann 통계량과 Shamos-Bickel-Lehmann(SBL) 추정량을 사용하여 위치모수와 척도모수를 로버스트 통계량으로 함께 추정함으로써 보다 개선된 결과를 제시하고 있는데, 여기에서 제안된 로버스트 관리도는 비정규 분포의 측면이나 데이터 획득상의 오류가 있을 때 전통적인 관리도보다 우수한 수행도를 나타낸다는 결론을 얻었다[9]. 또한 공정의 비정규성

에 대한 로버스트 성질은 전통적인  $\bar{x}$  관리도보다 EWMA 관리도가 훨씬 우수하다는 것을 증명하였다. 따라서 일반적으로 로버스트 관리도를 사용하지 않는 경우에는  $\bar{x}$  관리도보다 EWMA 관리도를 사용하는 것을 추천한다.

로버스트 통계량으로써 가장 널리 알려져 있는 중심 위치의 로버스트 추정량인 Huber's M-통계량을 이용한 관리도가 남호수 등에 의해서 제안되었는데, 이 관리도는 오염된 정규분포에서 공정의 변화를 탐지하는 능력이 전통적인  $\bar{x}$ 보다 훨씬 우수한 것으로 나타났다[10].

비모수적 방법으로 제안되고 있는 붓스트랩 기법을 적용한 관리도에 관한 연구로 Bajgier는 하위 그룹화된 관측치에 대한 붓스트랩 관리도를 제안하였다[11]. 표준 Shewhart 관리도와 그가 제안한 붓스트랩 관리도의 평균 런 길이 ARLs의 모의실험된 분포들을 그래프화해서 비교함으로써 관리도의 수행도를 평가하였다. 그리고 Seppala 등은 관측치의 하위집단의 평균 또는 표준편차를 감시하는데 사용될 수 있는 하위집단 붓스트랩이라 불리는 기법을 제안하였으며, 하위집단 붓스트랩의 수행도를 평가하는데 모의실험된 포함확률(simulated coverage)이라 불리는 척도를 사용하였다[12].

Liu 와 Tang은 하위집단화된 관측치에 대한 관리도를 설계하는데 유사한 기법을 제시하였다. 그들은 실제 관리도와 붓스트랩 관리도에서의 차이점을 살펴봄으로써, 이들 관리도의 수행도를 평가하였다[13].

그리고 Jones 와 Woodall은 이전의 학자들이 제시하는 붓스트랩 관리도 절차에서 잔차의 합이 0이 되지 않으므로 잔차의 분산을 수정한 수정된 붓스트랩 관리 절차를 제시하였고, Bajgier, Seppala 등과 Liu와 Tang 등이 제시하는 하위그룹 붓스트랩 관리도의 수행도를 비교·평가하였다[14].

그들의 시뮬레이션 결과에 의하면 안정상태에서는 붓스트랩 방법이 표준 방법보다 좋지 못한 수행도를 제시하나, 극한적으로 치우친 모집단의 분포일 경우에는 표준 Shewhart 방법보다 붓스트랩 방법이 참값에 근사함을 보여준다. 따라서 그들은 안정상태라고 예측되는 경우에는 붓스트랩 방법이 좋지 못한 수행도를 나타내므로, 품질담당자가 비모수적인 붓스트랩 관리도를 사용하고자 할 때에는 공정이 안정상태인지 아닌지 주의해야 한다고 지적하고 있다.

따라서 본 연구에서는 먼저 중심위치에 대한 대표적인 로버스트 추정량인 Huber-M 추정량을 이용하여 관리도를 설계하는데 있어서 비모수적 방법인 붓스트랩 과정을 이용하게 된다. 그리고 설계된 관리도가 공정에 몇몇 이상치가 존재하는 경우에 기존의 M 추정량을 이용한 관리도와 비교하여 보다 로버스트 성질을 가지고 있다는 것을 가지고 있다는 것을 증명하고, 공정중심의

이동이 있는 경우에 제시한 관리도가 공정중심이동을 감지하는데 우수한 결과를 도출한다는 것을 증명하고자 한다.

## 2. M-추정량을 이용한 붓스트랩 관리도의 설계

### 2.1 M-추정량을 이용한 $\bar{x}$ 관리도

Huber가 M-추정량을 제안한 이래 많은 연구자들에 의하여 M-추정량의 표본평균에 대한 로버스트성 및 효율성에 관한 연구가 이루어졌다. 일반적으로 식 (1)과 같은 단일표본 위치문제(one-sample location) 모형이고,

$$x_i = \mu + \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots\dots\dots (1)$$

위치모수에 대한 Huber의 M-추정량의 목적함수는 식 (2)와 같다.

$$Q(\mu) = \sum_{i=1}^n \rho(x_i - \mu) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$Q(\mu)$ 를 최소화하는  $\hat{\mu}$ 는 식 (2)의 우변항에서 음방정식(implicit equation)이 식 (3)과 같이 되는  $\hat{\mu}$ 로 정의된다.

$$\sum_{i=1}^n \psi(x_i - \mu) = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

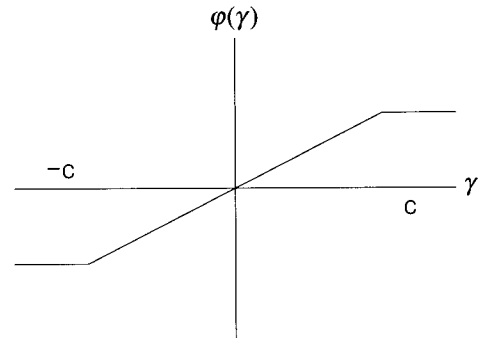
여기서,  $\rho$ 가 볼록함수이고 미분가능할 때는  $\rho' = \psi$ 가 된다. 예컨대 M-추정량은  $\rho$ -함수 또는 대응되는  $\psi$ -함수의 형태에 따라 추정량이 달라지며, Huber가 제안한  $\psi$ -함수의 형태는 식 (4)와 같다.

$$\psi(r) = \begin{cases} x & |x| \leq c \\ c \cdot \text{sign}(r) & |x| > c \end{cases} \quad \dots\dots\dots (4)$$

여기서  $c$ 는 조율상수(tuning constant)이고,  $c = 1.5$ 는 많은 모의실험을 통하여 합리적인 값으로 사용되는 상수중의 하나이다.  $c$ 의 값이 작아지면 로버스트 추정량을 구할 수 있으나 효율이 떨어지게 되고, 반면 큰  $c$ 의 값에 대하여 효율은 높아지지만 이상점의 영향을 제어하기 힘들어진다.

Huber가 제안한 M-추정량의 동기는 일반적으로 오염된 자료(contaminated data), 또는 길고 두터운 꼬리를 가지는 분포(long and heavy-tailed distribution)의 표본에서

표본평균  $\bar{x}$ 가 갖는 비로버스트성(non-robustness)에 있다. 즉, 표본에 이상점이 있을 경우, 표본평균은 이상점에 심각하게 영향을 받는다. 그러나  $\psi$ -함수의 구조에서 볼 수 있듯이 Huber의 M-추정량에서는 이상점의 영향이 감소되므로 이상점에 대하여 둔감한 로버스트 추정량을 구할 수 있다. Huber가 제안한  $\psi$ -함수는 Fig. 1과 같다.



<Fig. 1>  $\psi$ -function of Huber

M-추정량을 이용한 평균관리도는 남호수 등에 의해서 제안되었는데 각 하위그룹에서 타점되는 통계량으로써 M-추정량은 식 (5)와 같다.

$$\sum_{i=1}^n \psi\left(\frac{x_i - \mu}{s}\right) = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

여기서  $i = 1, \dots, n$ 이고  $s$ 는 척도( $\sigma$ )의 로버스트한 추정량으로서, 절대편차중앙값(median absolute deviation : MAD)에 기초한 추정량으로 식 (6)이 흔히 사용된다

$$s = 1.483 \text{median}[ |x_i - T| ] \quad \dots\dots\dots (6)$$

여기서  $T = \text{median}(x_j), j = 1, 2, \dots, k$  이고, 1.483은 정규분포에서  $s$ 가  $\sigma$ 의 일치추정량이 되도록 하는 상수이다.

식 (5)의 해는  $\mu$ 의 초기추정치  $\hat{\mu}_0$ 에 대하여 일차 테일러 급수전개를 한 다음, 반복법에 의하여 얻을 수 있으며, 초기추정치로는 중앙값이 흔히 사용된다. 즉, M-추정량을 얻기 위한 추정식은 식 (7)과 같다.

$$\hat{\mu}_m = \hat{\mu}_{m-1} + s \cdot \frac{\sum \psi[(x_i - \hat{\mu}_{m-1})/s]}{\sum \psi'[(x_i - \hat{\mu}_{m-1})/s]} \quad \dots\dots\dots (7)$$

여기서  $m = 1, 2, \dots$

$\sigma^2$ 은 일단계 M-추정량을 사용할 경우 식 (8)과 같이 추정될 수 있다

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 \cdot \frac{\frac{1}{n} \sum \phi^2[(x_i - \hat{\mu}_0)/s]}{\left[\frac{1}{n} \sum \phi'[(x_i - \hat{\mu}_0)/s]\right]^2} \dots\dots\dots (8)$$

M-추정량을 이용한 로버스트 관리도의 중심선으로 k개의 부분군에 속한 n개의 데이터에 기초하여 M-추정량을 구하게 되고, 중심선은 식 (9)와 같이 이들의 평균이 된다.

$$CL = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \hat{\mu}_{(j)} \dots\dots\dots (9)$$

여기서  $\hat{\mu}_{(j)}$ 는 j번째 부분군에서 얻어진 M 추정량이다. 관리한계를 구하기 위해서 추정하는 데이터 산포는 식 (10)과 같다.

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 \cdot \frac{\frac{1}{N} \sum \phi^2[(x_l - \text{median}(x_j))/s]}{\left[\frac{1}{n} \sum \phi'[(x_l - \text{median}(x_j))/s]\right]^2} \dots\dots (10)$$

여기서  $s = 1.483 \text{median}_l[|x_l - \text{median}_l(x_j)|]$ ,  $l = 1, 2, \dots, N$  이다. 식 (9)와 식 (10)에 근거하여 관리도의 관리한계는 식 (11)과 같다.

$$UCL = CL + c \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \dots\dots\dots (11)$$

$$LCL = CL - c \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

여기서 c는 공정이 안정상태에서의 설계된 ARL 값을 가지는 관리한계계수이다.

**2.2 M-추정량을 이용한 붓스트랩  $\bar{x}$  관리도**

M추정량의 붓스트랩 신뢰구간을 이용한 관리도의 설계는 다음 절차와 같다.

- [단계 1]  $n \cdot k$  총 관측치들에 대한 n 크기의 k 하위집단을 관측한다.
- [단계 2] 경험분포함수(EDF)  $\hat{F}(x)$ 를 각각의  $x_1, \dots, x_n$  점에서 확률  $1/n$ 로 구하게 된다.
- [단계 3]  $\hat{F}(x)$ 로 부터 샘플 크기 n을 재샘플링한다.
- [단계 4] 다음식을 이용하여  $\hat{m}^*$ 를 계산한다.

$$\hat{m}_j^* = \hat{m}_{j-1}^* + s^* \cdot \frac{\sum \phi[(x_i^* - \hat{m}_{j-1}^*)/s^*]}{\sum \phi'[(x_i^* - \hat{m}_{j-1}^*)/s^*]}$$

[단계 5] 큰 숫자 B 회 만큼 [단계 3]-[단계 4]를 반복한다.

[단계 6] B 붓스트랩 예측치들  $\hat{m}_1^*, \hat{m}_2^*, \dots, \hat{m}_B^*$ 을 소트한다.

[단계 7]  $\alpha/2 \cdot B$ 와 같은 값들이 그 값 아래 있게 되는 가장 적은  $\hat{m}^*$ 을 찾는다. 이것이 붓스트랩 하한 관리한계이다.

[단계 8]  $(1 - \alpha/2) \cdot B$ 와 같은 값이 그 값 아래 있게 되는 가장 적은  $\hat{m}^*$ 값을 찾는다. 이것이 붓스트랩 상한 관리한계이다.

여기서  $\alpha$ 는 관리도에서 제 1종 오류확률이다.

제안된 붓스트랩 관리도의 로버스트성을 평가하기 위하여 공정이 안정상태인 경우의 오보확률을 0.0027로 두고, 몇몇 이상치들을 가지는 분포인 오염정규분포에서 ARL을 구하여 그 결과를 Table 1 과 Table 2에 나타내었다.

Table 1 과 Table 2 는 설계된 붓스트랩 관리도가 샘플 크기  $n = 5, 10$ 인 경우 하위그룹 크기  $k = 20$ 인 경우에 관리도의 오보확률을  $\alpha = 0.0027$ 로 두고 공정이 정규분포에서 오염된 데이터가 존재하는 경우에 오염율과 오염데이터의 표준편차를 변화시켜 가면서 모의실험에 의해서 나온 관리상한, 관리하한과 ARL을 나타낸 것이다.

<Table 1> Control Limit and ARL for bootstrap M-chart (n=5, k=20,  $\alpha=0.0027$ )

distribution	UCL	LCL	ARL
N(0,1)	1.4290	-1.4384	387.605
CN(0.1,2)	1.6211	-1.6215	386.576
CN(0.1,3)	1.8868	-1.8848	371.435
CN(0.1,4)	2.2181	-2.2092	360.044
CN(0.1,5)	2.5671	-2.5613	364.924
CN(0.2,2)	1.8012	-1.8042	375.282
CN(0.2,3)	2.2923	-2.3045	317.826
CN(0.2,4)	2.8599	-2.8761	306.422
CN(0.2,5)	3.4563	-3.4786	315.797

<Table 2> Control Limit and ARL for bootstrap M-chart (n=10, k=20, α=0.0027 )

distribution	UCL	LCL	ARL
N(0,1)	0.96781	-0.97229	367.9510
CN(0.1,2)	1.07336	-1.07846	360.2154
CN(0.1,3)	1.18672	-1.19336	411.1812
CN(0.1,4)	1.30403	-1.30961	465.1618
CN(0.1,5)	1.42094	-1.42699	529.6548
CN(0.2,2)	1.18299	-1.19132	362.4696
CN(0.2,3)	1.43696	-1.44476	386.4566
CN(0.2,4)	1.71162	-1.71931	415.1116
CN(0.2,5)	1.99803	-2.00617	443.9816

<Table 3> Control Limit and Control Limit Factor for under N(0,1)

n	k	M-chart	Bootstrap
4	20	3.1340	3.0902
	30	3.1275	3.0038
	50	3.1215	3.0038
5	20	3.1532	3.0038
	30	3.1490	3.0038
	50	3.1433	3.0038
10	20	3.0585	3.0038
	30	3.0585	3.0038
	50	3.0505	3.0902

Table 1 과 Table 2의 결과를 보면, 제안된 붓스트랩 관리도는 샘플 크기 n과 하위 그룹 크기 k에 따라서 N(0,1)에서의 ARL<sub>0</sub> = 370.4에 다소 변화가 있는 것으로 보인다. 그렇지만 제안된 관리도는 대부분의 경우에 있어서 오염된 데이터에 대해서 안정상태의 ARL을 잘 유지함으로써 공정이 관리상태인 경우 관리안된 상태로 판정하는 오보확률을 최소화할 수 있다는 것을 알 수 있다.

본 연구에서 제안한 붓스트랩 관리도의 로버스트성을 평가하기 위하여 M-추정량을 이용한 로버스트 통계량에 의한 관리도와 안정상태의 ARL<sub>0</sub>를 비교하게 된다. 이를 위하여 먼저 N(0,1)분포를 공정이 안정상태인 경우 품질특성치의 분포라고 가정하고, 이때 설계된 관리도와 M-추정량을 이용한 관리도가 ARL<sub>0</sub> = 370.4을 가지는 관리한계를 설정할 필요가 있다. ARL<sub>0</sub> = 370.4은  $\bar{x}$  관리도가 공정이 안정상태 일 때 관리도의 오보확률 α = 0.0027을 가지는 경우 ARL과 동일한 값을 가지도록 설정하기 위한 것으로서, 이때 관리한계 계수값 c는 샘플 크기 n과 하위그룹 수 k의 변화에 따라서 FOTRAN을 이용하여 10000번 시뮬레이션하여 결정하였고, 그 결과를 정리하면 Table 3과 같다.

Table 3의 결과를 보면 붓스트랩을 이용한 관리한계와 M-추정량을 이용한 관리도는 관리한계 계수가 크게 차이가 없는 것으로 나타났고, 실제 실험에서도 M-추정량을 이용한 관리도의 관리한계 계수를 붓스트랩 관리도에 그대로 적용해도, 안정상태의 ARL과는 크게 오차가 나지 않는 것으로 나타났다.

### 3. M-추정량을 이용한 붓스트랩 EWMA 관리도의 설계

#### 3.1 M-추정량을 이용한 로버스트 EWMA 관리도

M-추정량의 지수가중이동평균(EWMA) 관리도는 남호수 등에 의해서 제안되었고, 그 기본개념은 M-추정량을 이용한 Shewhart 관리도와 비슷하다.

즉, 각 하위 그룹에 속한 n개의 데이터에 기초하여 M-추정량을 구하여 EWMA 통계량에서 사용되는  $\bar{x}$  대신 사용하는 것이다. 즉, n개의 하위 그룹 크기를 가지는 k개의 하위 그룹이 존재하는 경우, 각 하위 그룹에 속한 n개의 데이터에 기초하여 k개의 M-추정량들이 얻어지게 되고, 이들을  $\hat{\mu}^{(1)}, \hat{\mu}^{(2)}, \dots, \hat{\mu}^{(k)}$ 이라 할 때, EWMA 관리도에서는 이 M-추정량들을 이용하여 식 (12)와 같은 지수가중 이동평균값들을 관리도에 타점하게 된다.

$$M_j = \lambda \cdot \hat{\mu}^{(j)} + (1 - \lambda) \cdot M_{j-1} \\ = \lambda \sum_{l=0}^{j-1} (1 - \lambda)^l \cdot \hat{\mu}^{(j-l)} + (1 - \lambda)^j \cdot M_0 \dots (12)$$

여기서, λ는 0과 1사이의 값을 갖는 상수이고, M<sub>0</sub>는  $\hat{\mu}^{(j)}$ 들의 평균이다. λ의 값이 작을 수록 공정 평균의 변화를 더 빨리 탐지할 수 있게 된다.

관리한계선을 설정하기 위한 표준오차는 식 (13)과 같은 점근분산을 사용한다.

$$Var(M_j) \approx \frac{\sigma^2}{n} \left( \frac{\lambda}{2-\lambda} \right) [1 - (1-\lambda)^{2j}] \dots\dots\dots (13)$$

여기서 식 (12)에서의  $\sigma$ 의 추정치는 식(14)을 이용하게 된다.

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 \cdot \frac{\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \phi^2 \left( \frac{x_m - \text{median} \{x_m\}}{s} \right)}{\left[ \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \phi \left( \frac{x_m - \text{median} \{x_m\}}{s} \right) \right]^2} \dots\dots (14)$$

여기서

$$s = 1.483 \cdot \text{median}_m [|x_m - \text{median}_m \{x_m\}|],$$

$m = 1, 2, \dots, N$ 이고,  $\{x_m\}$ 은 하위 그룹의 구분없이 통합된 데이터이다. 이때 M-추정량을 이용한 EWMA 관리도의 관리한계선은 식 (15)와 같이 설정할 수 있다.

$$UCL = CL + c^* \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \left( \frac{\lambda}{2-\lambda} \right) [1 - (1-\lambda)^{2j}] \dots\dots (15)$$

$$LCL = CL - c^* \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \left( \frac{\lambda}{2-\lambda} \right) [1 - (1-\lambda)^{2j}]$$

여기서  $c^*$ 는 공정이 안정상태에서의 설계된 ARL 값을 가지는 관리한계계수이다. 중심선 CL은  $j$ 가 증가함에 따라 관리한계선의 폭은 점점 늘어나다 시료 군의  $j$ 가 어느 수준 이상 커지면  $[1 - (1-\lambda)^{2j}]$ 가 1로 수렴하므로 식 (16)과 같이 일정해지게 된다.

$$CL = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \hat{\mu}^{(j)} \dots\dots\dots (16)$$

### 3.2 붓스트랩 관리도

EWMA 관리도에서 M추정량의 붓스트랩 신뢰구간을 이용한 관리도의 설계는 다음의 절차와 같다.

[단계 1]  $n \cdot k$  총 관측치들에 대한  $n$  크기의  $k$  하위집단을 관측한다.

[단계 2] 경험분포함수(EDF)  $\hat{F}(x)$ 를 각각의  $x_1, \dots, x_n$  점에서 확률  $1/n$ 로 구하게 된다.

[단계 3]  $\hat{F}(x)$ 로부터 샘플 크기  $n$ 을 재샘플링한다.

[단계 4] 다음식을 이용하여  $\hat{m}^*$ 를 계산한다.

$$\hat{m}_j^* = \hat{m}_{j-1}^* + s^* \cdot \frac{\sum \phi[(x_i^* - \hat{m}_{j-1}^*)/s^*]}{\sum \phi'[(x_i^* - \hat{m}_{j-1}^*)/s^*]}$$

[단계 5] [단계 4]에서 구한  $m_j^*$ 를 가지고 EWMA 통계량값  $Z_i^* = \lambda \bar{x}_i^* + (1-\lambda)Z_{i-1}^*$ 을 구한다.

[단계 6]  $B$  만큼을 [단계 3]~[단계 5]를 반복한다.

[단계 7]  $B$  붓스트랩 예측치들  $Z_1^*, Z_2^*, \dots, Z_B^*$ 을 소트한다.

[단계 8]  $\alpha/2 \cdot B$ 와 같은 값들이 그 값 아래 있게 되는 가장 적은  $Z^*$ 을 찾는다. 이것이 붓스트랩 하한 관리한계이다.

[단계 9]  $(1-\alpha/2) \cdot B$ 와 같은 값이 그 값 아래 있게 되는 가장 적은  $Z^*$ 값을 찾는다. 이것이 붓스트랩 상한 관리한계이다.

여기서  $\alpha$ 는 관리도에서 제 1종 오류확률이다.

Table 4 ~ Table 7은 설계된 붓스트랩관리도가 공정이 안정상태인 경우 ARL=370.4가 되는 관리계수  $c^*$ 에 대한 정규분포확률값을 사용하여 각 모수  $\lambda$ 의 변화와  $n, k$ 의 변화에 따른 ARL을 모의실험을 통해서 구한 것이다. 공정의 분포는 정규분포  $N(0,1)$ 에서 오염된 데이터가 존재하는 경우의 분포인  $CN(v,0)$ 로 변화시켜가면서 관리도의 로버스트성을 평가하였다.

<Table 4> Control Limit and ARL of Bootstrap EWMA M-chart ( $n=5, k=20, \lambda=0.05$ )

distribution	UCL	LCL	ARL
N(0,1)	0.1868	-0.1862	372.338
CN(0.1,2)	0.2050	-0.2037	374.213
CN(0.1,3)	0.2210	-0.2193	376.678
CN(0.1,4)	0.2364	-0.2337	375.362
CN(0.1,5)	0.2500	-0.2469	381.953
CN(0.2,2)	0.2237	-0.2219	374.007
CN(0.2,3)	0.2591	-0.2561	396.577
CN(0.2,4)	0.2930	-0.2892	393.332
CN(0.2,5)	0.3263	-0.3213	401.553

<Table 5> Control Limit and ARL of Bootstrap EWMA M-chart ( $n=10, k=20, \lambda=0.05$ )

distribution	UCL	LCL	ARL
N(0,1)	0.1280	-0.1300	351.598
CN(0.1,2)	0.1392	-0.1414	360.390
CN(0.1,3)	0.1472	-0.1493	361.431
CN(0.1,4)	0.1531	-0.1550	367.492
CN(0.1,5)	0.1576	-0.1596	366.416
CN(0.2,2)	0.1512	-0.1538	363.999
CN(0.2,3)	0.1700	-0.1728	377.878
CN(0.2,4)	0.1858	-0.1885	391.218
CN(0.2,5)	0.1996	-0.2021	389.215

<Table 6> Control Limit and ARL of Bootstrap EWMA M-chart (n=5, k=20, λ=0.15)

distribution	UCL	LCL	ARL
N(0,1)	0.3725	-0.3735	376.625
CN(0.1,2)	0.4102	-0.4094	367.225
CN(0.1,3)	0.4481	-0.4466	373.945
CN(0.1,4)	0.4878	-0.4849	392.979
CN(0.1,5)	0.5273	-0.5240	390.723
CN(0.2,2)	0.4485	-0.4477	367.823
CN(0.2,3)	0.5281	-0.5257	381.861
CN(0.2,4)	0.6117	-0.6086	384.835
CN(0.2,5)	0.6973	-0.6935	387.973

<Table 9> Control Limit and Control Limit Factor (N(0,1) λ = 0.15)

n	k	M-chart	Bootstrap
4	20	2.9025	2.748
	30	2.8963	2.748
	50	2.8910	2.748
5	20	2.9070	2.747
	30	2.9030	2.747
	50	2.8990	2.748
10	20	2.8390	2.748
	30	2.8393	2.748
	50	2.8320	2.748

<Table 7> Control Limit and ARL of Bootstrap EWMA M-chart (n=10, k=20, λ=0.15)

distribution	UCL	LCL	ARL
N(0,1)	0.2546	-0.2569	326.451
CN(0.1,2)	0.2771	-0.2800	335.534
CN(0.1,3)	0.2939	-0.2970	352.661
CN(0.1,4)	0.3076	-0.3102	355.185
CN(0.1,5)	0.3190	-0.3215	370.740
CN(0.2,2)	0.3012	-0.3048	345.445
CN(0.2,3)	0.3414	-0.3457	355.185
CN(0.2,4)	0.3784	-0.3824	363.575
CN(0.2,5)	0.4128	-0.4168	377.840

<Table 10> Control Limit and Control Limit Factor(N(0,1) λ = 0.25)

n	k	M-chart	Bootstrap
4	20	3.0080	2.854
	30	3.0010	2.855
	50	2.9950	2.865
5	20	3.0090	2.865
	30	3.0055	2.865
	50	3.0000	2.870
10	20	2.9360	2.870
	30	2.9360	2.870
	50	2.9280	2.870

Table 4~Table 7의 결과를 보면, 제안된 붓스트랩 관리도는 오염된 데이터에 대하여 안정상태의 ARL을 아주 잘 유지하는 로버스트한 성질을 가지고 있는 것으로 보인다.

<Table 8> Control Limit and Control Limit Factor(N(0,1) λ = 0.05)

n	k	M-chart	Bootstrap
4	20	2.5750	2.352
	30	2.5700	2.352
	50	2.5640	2.352
5	20	2.5863	2.352
	30	2.5840	2.353
	50	2.5790	2.352
10	20	2.5293	2.353
	30	2.5290	2.353
	50	2.5223	2.353

Table 8~Table 10은 모의실험 10000번에서 λ가 0.05, 0.15, 0.25인 경우, 샘플 크기 n을 4, 5, 10으로, 하위 그룹 수 k를 20, 30, 50으로 변화시켜가면서 안정된 상태에서의 ARL인 ARL<sub>0</sub>가 370을 가지는 관리한계수 c\*를 나타낸 것이다.

Table 8 ~ Table 10의 결과를 이용하여 EWMA관리도에서 각 로버스트 관리도가 몇몇 이상치들을 가지는 경우, 안정상태에서의 ARL인 ARL<sub>0</sub>를 유지하는 성질을 알아보기 위하여 최초 공정이 정규분포 N(0,1)을 따르는 경우에서 이상치 비율인 오염비율 0.1, 0.2로 변화시켜가면서 시뮬레이션으로 ARL을 구하였다.

Table 11 ~ Table 13의 결과는 각 관리도에 대해서 n=5, k=25인 경우, λ=0.5, 0.15, 0.25로 변화시켜가면서 N(0,1)인 경우 ARL 370을 가지는 관리계수 c\*을 고정 시킨 후, 오염된 데이터에 대한 로버스트성을 비교하기 위하여 분포를 CN(γ, σ)로 변화 시켜서 ARL을 구한 것이다. 시뮬레이션 결과에서 알 수 있듯이 제안된

관리도는 몇몇 이상치에 대해서 가장 로버스트한 성질을 가지고 있다는 것을 알 수 있다.

<Table 11> Compare of robust EWMA control charts with  $ARL_0$  ( $n=5, k=20, \lambda=0.05$ )

$\gamma$	$\sigma$	M-Chart	BM-Chart
0.1	N(0,1)	370.593	372.338
	2	226.463	374.213
	3	163.025	376.678
	4	129.009	375.362
	5	109.165	381.953
0.2	N(0,1)	370.593	372.338
	2	155.344	374.007
	3	90.649	396.577
	4	62.883	393.332
	5	49.102	401.553

<Table 12> Compare of robust EWMA control charts with  $ARL_0$  ( $n=5, k=20, \lambda=0.15$ )

$\gamma$	$\sigma$	M-Chart	BM-Chart
0.1	N(0,1)	357.395	376.625
	2	188.148	367.225
	3	118.520	373.945
	4	87.229	392.979
	5	70.376	390.723
0.2	N(0,1)	357.395	376.625
	2	113.426	367.823
	3	57.326	381.861
	4	37.948	384.835
	5	29.186	387.973

<Table 13> Compare of robust EWMA control charts with  $ARL_0$  ( $n=5, k=20, \lambda=0.25$ )

$\gamma$	$\sigma$	M-Chart	BM-Chart
0.1	N(0,1)	364.282	375.161
	2	169.721	353.872
	3	102.131	365.559
	4	72.655	401.250
	5	57.892	393.010
0.2	N(0,1)	364.282	375.161
	2	99.694	363.309
	3	47.539	371.660
	4	30.687	362.251
	5	22.855	369.553

### 4. 수치실험 및 비교분석

#### 4.1 Shewhart 로버스트 관리도의 민감도 분석

본 연구에서는 M-추정량을 이용한 관리도에 붓스트랩 방법을 적용하여 관리도의 관리한계를 설정하였다. 제안된 붓스트랩관리도의 수행도를 평가하기 위하여 공정이 관리상태에 있는 경우  $ARL_0 = 370.4$ 로 가정하여 기존의 로버스트관리도와 제안된 관리도의 수행도를 다양한 분포에서 ARL로 비교분석 하였다. 특히 공정이 안정상태에 있는 경우 모의실험에서 고려한 분포는 정규분포 및 오염된 정규분포( contaminated normal distribution ;  $CN(\gamma, \sigma)$ ),를 고려하였고, 오염된 정규분포  $CN(\gamma, \sigma)$ 의 분포함수  $F(x)$ 는 다음과 같다.

$$F(x) = (1 - \gamma)\Phi(x) + \gamma\Phi(x/\sigma)$$

여기서,  $\gamma$  은 표준정규분포에서의 오염비율이라하고,  $\Phi(x)$ 는 표준정규분포의 분포함수이다.

각 관리도의 공정변화에 대한 수행도를 평가하기 위하여 공정이 관리상태에 있는 경우 ARL이 370.4 인 경우에 대하여 기존의 로버스트관리도와 M-추정량을 이용한 관리도 그리고 본 연구에서 제시하는 붓스트랩 관리도를 공정 평균을  $0.00 \sigma \sim 2.5 \sigma$ 까지 변화시켜가면서 ARL을 측정하였다. 공정평균이 변화할 때의 ARL을  $ARL_1$  이라고 할때  $ARL_1$ 을 구하기 위한 시뮬레이션 절차는 다음과 같다.

- [단계 1] FORTRAN IMSL을 이용하여 각 분포에 해당하는  $x_{ij}$ 의 난수를  $n \times k$ 개 발생시킨다.
- [단계 2] 설정된 각 관리도의 관리한계 계수를 이용하여 관리한계를 결정한다.
- [단계 3] 설정된 관리한계에서  $0.00 \sigma \sim 2.5 \sigma$ 변화에 따라 발생하는 난수를  $n$ 개 발생시켜 관리도에 타점하여 ARL을 구한다.
- [단계 4] [단계 3]을 10000번 반복하여 각 ARL을 평균함으로써 ARL을 구한다.

이러한 실험 단계를 통해서 각각의 관리도에 대해서 공정이 정규분포, 오염정규분포, 샘플 크기  $n = 5, 10$ , 하위 그룹 크기  $k = 20, 50$  인 경우로 변화시켜 가면서 시뮬레이션한 결과를 Table 14 와 Table 15과 Fig. 2 과 Fig. 3에 나타내었다.

Table 14는 공정이 정규분포 N(0,1)인 경우, 즉 안정상태의 경우에 공정평균의 변화에 대한  $ARL_1$ 을 나타낸

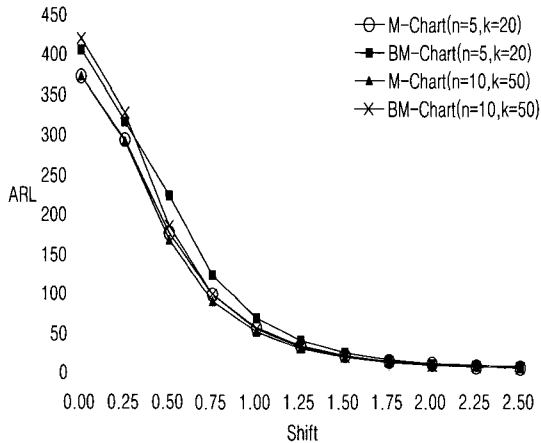


것이다. 실험결과 붓스트랩 관리도는 공정평균 변화가 없는 안정상태인 경우에 다소 높은 ARL을 가지게 된다.

<Table 14> Compare of robust control charts with process shift under N(0,1),

charts limit shift	n=5, k=20		n=10, k=50	
	M-Chart	Bootstrap	M-Chart	Bootstrap
0.00	370.842	403.512	370.649	417.516
0.25	291.958	315.466	289.999	325.274
0.50	173.214	221.314	164.586	182.108
0.75	96.291	121.674	88.537	97.162
1.00	53.919	66.245	48.822	53.180
1.25	31.118	38.194	27.913	30.204
1.50	19.030	22.683	16.887	18.152
1.75	12.250	14.163	10.833	11.542
2.00	7.958	9.254	7.081	7.533
2.25	5.472	6.212	4.938	5.207
2.50	4.004	4.466	3.604	3.775

이것은 붓스트랩 관리도가 공정변화가 없는 경우 ARL 값이 다른 관리도들과 정확하게 같은 값으로 시작하지 않았기 때문에 곡선의 기울기로서 그 탐지력을 예상할 수 있게 된다. Fig. 2의 그래프에서 알 수 있듯이 공정평균 변화에 대한 붓스트랩 관리도의 탐지력은 다른 관리도들에 비해서 떨어지지 않으며, 1.00σ에서는 거의 같은 값의 ARL을 가진다는 것을 알 수 있다.



<Fig. 2> Compare of robust control charts with process shift under N(0,1)

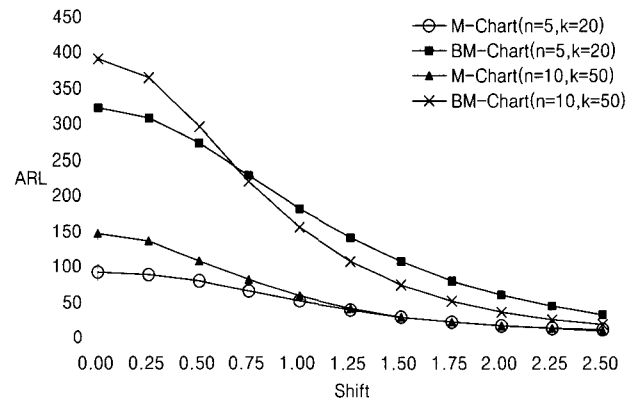
Table 15와 Fig. 3은 공정이 몇몇 이상치를 가지는 오염정규분포를 따르는 경우 공정평균 변화에 대한  $ARL_1$

을 나타낸 것이다.

오염정규분포는 공정의 이상상태를 의미하는 것이 아니므로 0.00σ에서는 ARL이 370.4와 근접하거나 더 크면, 그만큼 오보확률을 줄이게 되는 것이므로 좋다고 할수 있다. 따라서 붓스트랩을 이용한 관리도가 M-추정량을 이용한 관리도보다 안정상태에서  $ARL_0=370.4$ 를 보다 잘 유지한다는 것을 알 수 있다.

<Table 15> Compare of robust control charts with process shift under CN(0.2,3)

charts limit shift	n=5, k=20		n=10, k=50	
	M-Chart	Bootstrap	M-Chart	Bootstrap
0.00	90.205	319.930	144.432	388.032
0.25	86.307	305.903	133.592	362.346
0.50	76.761	270.546	106.305	293.805
0.75	62.633	226.344	79.354	218.290
1.00	48.672	179.617	55.857	152.946
1.25	36.289	138.472	38.859	104.824
1.50	27.006	104.999	27.087	71.468
1.75	19.892	77.936	19.187	48.771
2.00	14.481	57.342	13.588	33.499
2.25	10.721	41.636	9.858	23.351
2.50	8.034	30.103	7.240	16.306



<Fig. 3> Compare of robust control charts with process shift under CN(0.2,3)

붓스트랩 관리도는  $ARL_0$ 가 330~400 사이에서 유지하게되고, 특히 n과 k가 증가할수록 관리도 설계상의 ARL을 아주 잘 유지한다는 것을 알수 있다. 또한 그래프에서 알 수 있듯이 붓스트랩 관리도는 공정평균 변화에 따른 검출력 또한 우수한 것으로 나타났다.

### 4.2 M-추정량을 이용한 EWMA 관리도의 민감도 분석

EWMA 관리도의  $\lambda$  값은 0.25인 경우에 나머지 모수는 Shewhart 관리도와 동일한 것으로 가정하여 공정이 대칭 분포를 따르는 경우에 붓스트랩 방법을 이용한 EWMA 관리도의 수행도를 평가하였다.

Table 16 과 Table 17은 각 모수 변화에 따른 실험결과를 나타내고 있으며, 관리한계계수는  $c^*$  시뮬레이션 결과에 의해 제시된 값을 사용하였다. Table 16은 공정의 안정상태 기준인  $N(0,1)$  분포인 경우 각 관리도의 수행도를 나타낸 것인데, 각 모수의 변화에 따라서 두개의 관리도는 비슷한 수행도를 가지게 된다.

<Table 16> Compare of EWMA robust control charts with process shift under  $N(0,1)$ ,

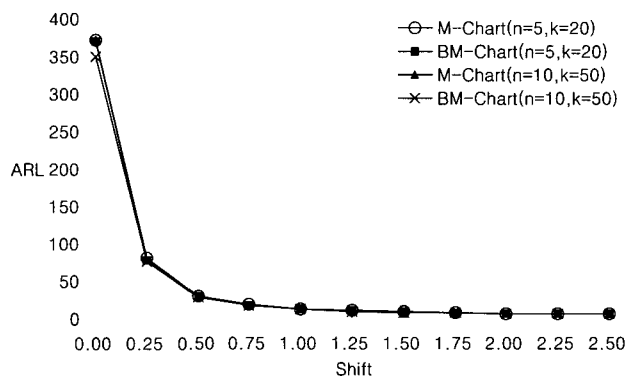
charts limit shift	n=5, k=20		n=10, k=50	
	M-Chart	Bootstrap	M-Chart	Bootstrap
0.00	370.022	368.179	370.269	348.902
0.25	78.915	75.973	75.891	74.234
0.50	28.547	27.832	27.308	26.922
0.75	16.470	16.077	15.884	15.696
1.00	11.505	11.306	11.146	11.016
1.25	8.819	8.684	8.572	8.479
1.50	7.176	7.075	6.992	6.931
1.75	6.046	5.969	5.917	5.865
2.00	5.262	5.196	5.151	5.099
2.25	4.671	4.612	4.564	4.524
2.50	4.206	4.153	4.112	4.073

<Table 17> Compare of EWMA robust control charts with process shift under  $CN(0.2,3)$

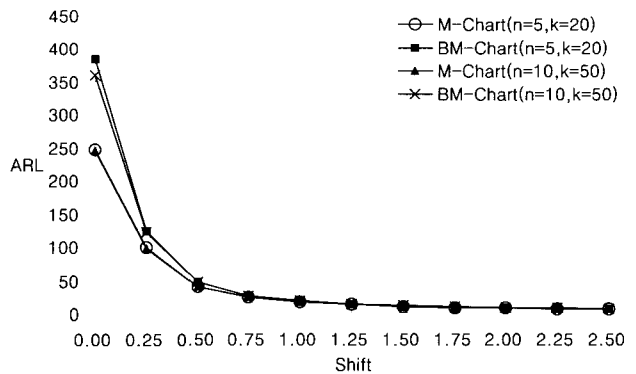
charts limit shift	n=5, k=20		n=10, k=50	
	M-Chart	Bootstrap	M-Chart	Bootstrap
0.00	246.653	383.217	244.136	358.613
0.25	97.968	122.647	96.218	120.458
0.50	39.483	45.619	39.086	44.835
0.75	22.485	25.233	22.297	24.825
1.00	15.428	17.047	15.345	16.782
1.25	11.771	12.896	11.709	12.654
1.50	9.445	10.309	9.408	10.136
1.75	7.906	8.602	7.877	8.462
2.00	6.820	7.412	6.797	7.268
2.25	5.996	6.501	5.975	6.377
2.50	5.354	5.801	5.340	5.695

Table 17은 공정이 몇몇 이상치를 가지는 오염정규분포를 따르는 경우 공정평균 변화에 대한  $ARL_1$ 을 나타낸 것인데, 붓스트랩 관리도는 대부분이 안정상태에서  $ARL$ 이 350근처를 유지하게되는 아주 우수한 결과를 가져온다.

Fig.4와 Fig.5의 결과에서 알 수 있듯이 로버스트 EWMA 관리도에서도 Shewhart 관리도에서와 마찬가지로 공정평균변화에 대한 수행도 측면에서는 그래프에서 알 수 있듯이 붓스트랩 관리도는 공정평균 변화에 따른 검출력 또한 우수한 것으로 나타났다.



<Fig. 4> Compare of EWMA robust control charts with process shift under  $N(0,1)$



<Fig. 5> Compare of EWMA robust control charts with process shift under  $CN(0.2,3)$

## 5. 결 론

통계적 공정관리는 시기 적절하고 효과적인 방법으로 불량 원인을 규명하기 위하여 최종 제품을 검사하는데 그치지 않고 더 나아가 제조 공정을 모니터링한다. 통계적 공정관리는 공정에 내재된 결함을 가급적 조기에 발

혀내기 위하여 품질 관련 변수들을 시간에 따라 도시하는 관리도를 사용한다는 이점이 있다. 관리도는 이러한 품질관련변수들이 따르는 분포에 대한 정확한 지식을 가지고 있는 것이 가장 중요하다고 할 수 있다. 그러나 현실에 있어서의 공정 품질특성치는 몇몇 이상점이나 정규분포를 따르지 않는 경우가 많이 있다.

로버스트 통계분야는 전통적인 방법보다 정확한 결과를 도출하기 위해 개발되었으며, 특히 데이터상에 이상치의 가능성이 있거나 개발된 통계적 과정으로 이를 발견하지 못하거나 부정확한 결과를 나타낼 때 근본적인 추정을 하기 위해 사용된다. 이러한 방법은 추정된 모수적 방법과 마찬가지로 신뢰성있는 결과를 제공한다. 로버스트 접근방법의 근본적인 원리는 데이터 혹은 확률 분포상의 작은 오류는 분석 결과에 유의한 영향을 미치지 않는다는 것이다.

본 연구는 비모수적 방법으로 유용한 도구인 붓스트랩과 이상점에 둔감한 로버스트 통계량을 사용하여 관리도를 설계함으로써 관리도의 기본가정이 기각되는 경우에도 오보확률을 로버스트하게 유지하자는데 그 목적이 있다. 공정이 정규분포를 따르는 경우 각 로버스트 관리도는 기존의 Shewhart 관리도에서나 EWMA 관리도에서 각각 동일한 수행도를 보임으로써, 공정평균을 관리하기 위한 관리도로서 기존 관리도와 동일하게 사용할 수 있다. 또한 몇몇 이상치가 공정에 존재하는 경우에 즉, 공정이 오염된 정규분포를 따르는 경우에는 기존의 로버스트 통계량을 이용한 관리도와 붓스트랩방법을 이용한 로버스트 관리도의 오보확률유지 면을 ARL로 비교하였을 때 붓스트랩 방법을 이용한 관리도가 안정적 ARL을 유지하는데 아주 우수한 결과를 도출하였다.

**참고문헌**

[1] W. A. Shewhart, Statistical Methods from the viewpoint of Quality Control, Republished in 1986 by Dover Publications, New York, NY, (1939).  
 [2] C. E. Noble, "Variations in Conventional Control Charts," Industrial Quality Control, Vol. 8, No. 3, pp. 17-22, (1951).  
 [3] N. R. Farnum and L. W. Stanton, "Using Counts to Monitor a Process Mean," Journal of quality Control, Vol. 9, No. 5, pp. 30-34, (1953).  
 [4] B. F. Arnold, "The Sign Test in Current Control," Statistische Hefte, Vol. 26, pp. 253-262, (1985).  
 [5] B. F. Arnold, "Comparison of the Approximate and Exact Optimum Economic Design of Control Charts Basing on the Sign Test," Statistische Hefte, Vol. 27,

pp. 239-241, (1986).  
 [6] H. Peter and L. Johannes, "A Control Chart Based on Ranks," Journal of Quality Technology, Vol. 23, No. 2, pp. 117-124, (1991).  
 [7] James A. Alloway, Jr. and M. Raghavachari, "Control Chart Based on the Hodges-Lehmann Estimator," Journal of Quality Technology, Vol. 23, No. 4, pp. 336-347, (1991)  
 [8] Edward A. Pappanastos and Benjamin M. Adams, "Alternative Designs of the Hodges-Lehmann Control Chart," Journal of Quality Technology, Vol. 28, No. 2, pp. 213-223, (1996).  
 [9] Moustafa O. Abu-Shawiesh and Mokhtar B. Abdullah, "New Robust Statistical Process Control Chart for Location," Quality Engineering, Vol. 12, No. 2, pp. 149-159, (1999).  
 [10] 이 병근, 정 현석, 남 호수. 공정평균을 관리하기 위한 로버스트 관리도, 공업경영학회지, 21권, 48집, 65-71 (1998).  
 [11] S. M. Bajgier, "The Use of Bootstrapping to Construct Limits on Control Charts," Proceeding of the Decision Science Institute, San Diego, CA., pp. 1611-1613 (1992).  
 [12] T. Seppala, H. Moskowitz, R. Plante and J. Tang, "Statistical Process Control via the Subgroup," Journal of Quality Technology, Vol. 27, No. 2, pp. 139-153 (1995).  
 [13] R. Y. Liu and J. Tang, "Control Charts for Dependent and Independent Measurements Based on Bootstrap," Journal of the American Statistical Association, Vol. 91, No. 436, pp. 1694-1700 (1996).  
 [14] L. A. Jones and W. H. Woodall, "The Performance of Bootstrap Control Charts," Journal of Quality Technology, Vol. 30, No. 4, pp. 362-375 (1998).