구조적 시계열모형을 이용한 자산포트폴리오 관리의 개선 방안[1)]

이창수
숭실대학교 정보통계학과

A Study on the Way to Improve Quality of Asset Portfolio Management Using Structural Time-Series Model

Changsoo Lee
Department of Statistics, Soongsil University

Key Words : Asset Portfolio Management, Mean-Variance Analysis, Structural Time-Series Model

Abstract

Criteria for the comparison of quality of asset portfolio management are risk and return. In this paper a method to use structural time-series model to determine an optimal portfolio for the improvement of quality of asset portfolio management is suggested. In traditional mean variance analysis expected return is assumed to be time-invariant. However, it is more realistic to assume that expected return is temporally dynamic and structural time-series model can be used to reflect time-varying nature of return. A data set from an insurance company was used to show validity of suggested method.

1. 서 론

자산포트폴리오의 관리에서 품질의 비교 기준은 수익성과 위험의 정도라고 할 수 있다. 같은 수준의 위험 하에서 가장 높은 수익률을 달성할 수 있는 자산포트폴리오가 보다 나은 품질을 가진 자산포트폴리오라 할 수 있는 것이다. 최적의 품질을 가진 자산포트폴리오를 결정하기 위한 방법으로 Markowitz가 1987년에 제안한 평균분산분석법(Mean Variance Analysis; 이하 MV분석)이 사용되고 있다. MV분석법은 간편하면서도 효과적인 방법으로 재무 분야의

1) 본 연구는 숭실대학교의 연구비 지원으로 수행되었음.

전문가들 사이에서 오랫동안 사용되고 있으며 그 이론을 기초로 한 다양한 응용분야를 갖고 있다. 하지만 MV 분석은 여러 가지 장점에도 불구하고 몇 가지 문제점과 그 적용에 대한 한계점들이 지적되어 왔다.

자산포트폴리오의 최적화를 위해 MV분석법을 적용하기 위해서는 입력변수로 사용되는 수익률의 평균, 분산, 공분산 등의 모수에 대한 추정치의 정확성이 확보되어야 한다. MV분석을 통해 결정되는 최적 자산 포트폴리오의 구성은 이러한 모수 추정치의 오차에 민감하게 영향을 받는다. Chopra와 Ziemba(1993)는 수익률의 평균에 대한 추정치의 오차가 최적 자산 포트폴리오의 구성에 큰 변화를 야기할 수 있다는 것을 보여주었다. 그러나 그들은 최적의 자산 포트폴리오 결정에 있어서 가장 중요한 요소라 할 수 있는 수익률의 평균을 보다 정확하게 추정할 수 있는 방법에 대해서는 아무런 대안도 제시하지 않고 있다. 단순히 과거의 수익률 자료가 충분히 주어진다고 해서 미래의 수익률 평균이 정해진 오차의 범위 내에서 추정될 수 있을까? 만약 자산에 대한 수익률의 평균이 시간의 경과에 따라 변화하는 속성을 가진다면 과거의 수익률 자료를 이용한 단순 평균에 의해 본질적으로 변동하는 수익률 평균값을 추정하는 것은 구조적으로 상당한 오차를 포함할 수 있을 것이다 .

본 논문에서는 자산에 대한 수익률의 평균이 시간의 경과에 따라 변화할 수 있다는 판단에 근거하여 이러한 속성을 반영할 수 있는 모형으로 구조적 시계열모형의 적용을 제안하였다. 또한, 구조적 시계열모형을 기초로 미래의 수익률 평균에 대한 최적의 예측치를 구하여 MV분석에서의 수익률의 평균에 대한 추정치로 이용하는 방법을 통하여 자산포트폴리오의 품질을 개선할 수 있는 방안을 제시하고 있다. 제3장에서는 제안된 방법의 타당성을 입증하기 위해 국내한 보험사의자산운용과 관련한 자료를 이용한 실증분석 결과를 제시하였다.

2. 분석방법론

2.1 최적 포트폴리오 결정의 기준

투자자의 효용함수를 $U(W)$라 하고 개별 자산 종목에 대한 수익률을 $r_i(i=1,2,\cdots,N)$라 하자. 투자자의 최적 포트폴리오는 다음의 최적화 문제의 해를 구함으로써 결정될 수 있다.

$$\text{Maximize} \quad Z(\underline{x}) = E[U(W_0 \sum_{i=1}^{N} r_i * x_i)]$$
$$\text{such that} \quad x_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1. \quad (1)$$

위 식에서 $Z(\underline{x})$는 선택된 자산 포트폴리오에 대한 투자자의 기대효용을 나타내고, W_o는 투자되는 초기 자산총액을 나타내며, $x_i(i=1,2,\cdots,N)$는 선택된 자산 포트폴리오에서의 개별 자산 종목별 투자비율을 나타낸다. $\underline{x}$는 x_i로 구성되는 벡터를 나타낸다.

투자자의 효용함수를 다음과 같은 형태로 가정하자.

$$U(W) = K - \exp(-aW). \quad (2)$$

또한, 수익률 $r_i(i=1,2,\cdots,N)$는 다중정규분포(multivariate normal distribution)를 따른다고 가정하자. 이러한 효용함수의 가정 하에서 우리는 앞에서 제시한 최적화 문제가 다음의 비선형계획법 문제와 동등하다는 것을 보일 수 있다. 즉, 최적 자산 포트폴리오에 대한 개별 종목별 투자비율 $x_i(i=1,2,\cdots,N)$는 다음의 비선형계획법 문제에 대한 해가 된다는 것이다.

$$\text{Maximize } Z(x) = \sum_{i=1}^{N} E[r_i]x_i - \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$$

$$\text{such that } x_i \rangle 0,\ \sum_{i=1}^{N} x_i = 1. \qquad (3)$$

위의 식에서 $E[r_i]$는 i번째 개별자산의 기대수익률을 나타내며, σ_{ij}는 i번째 자산의 수익률과 j번째 자산의 수익률간의 공분산을 나타낸다. i값과 j값이 같은 경우에는 σ_{ij}가 해당 개별 자산 종목에 대한 분산이 된다. 위 식에서 t는 투자자의 상대적인 위험허용정도(risk tolerance)를 나타내는 계수로서 t값이 작으면 투자자의 위험을 회피하는 속성이 강하다는 것을 의미한다.

위의 포트폴리오 최적화 문제에서 우리는 다음과 같은 문제를 자연스럽게 제기 할 수 있을 것이다. 만약 수익률 분포의 모수인 평균, 분산, 공분산의 값으로 정확한 값이 아니라 오차를 갖는 추정치가 사용된다면, 이런 오차로 인하여 투자자의 최적 자산 포트폴리오의 최적성은 얼마나 영향을 받을까? 이것은 실질적인 MV분석에서 중요하게 고려해야 할 사항이다. 왜냐하면 수익률에 대한 정확한 분포는 비록 설정된 모형이 타당하다고 하더라도 과거의 제한된 자료만으로는 정확하게 추정될 수 없고 따라서 모수 추정에서 발생하는 표본오차는 피할 수가 없기 때문이다.

2.2 자산포트폴리오의 현금가치

두 개의 자산 포트폴리오를 비교하기 위한 기준이 되는 척도(measure)로 각 포트폴리오에 대한 현금가치(Cash Equivalent: CE)를 사용할 수 있을 것이다. 개별 자산 종목별 구성비 $x_i(i=1,2,\cdots,N)$에 의해 결정되는 한 포트폴리오의 현금가치(Cash Equivalent: CE)는 다음과 같이 정의된다.

$$CE_x = U^{-1}[Z(\underline{x})]. \qquad (4)$$

위 식에서 $Z(\underline{x})$는 포트폴리오 $\underline{x}$ 의 기대효용을 나타낸다. 위 식을 변환하면 아래의 식으로 표현할 수 있다.

$$U(CE_x) = Z(\underline{x}). \qquad (5)$$

위 식을 통해서 알 수 있듯이 현금가치(CE)란 주어진 자산 포트폴리오의 기대효용과 같은 효용을 가지는 현금가치를 의미한다. 위에서 제시한 현금가치는 $Z(\underline{x})$를 정의할 때 투자자의 위험허용정도와 수익률의 잠재적인 불확실성이 반영되어 있기 때문에 현실적인 타당성을 가진다고 할 수 있다. 만약 선택된 자산 포트폴리오가 위험이 없는(risk free) 것이라면 이 포트폴리오에 대한 현금가치(CE)는 확정적인 수익이 된

다.

개별 자산에 대한 수익률 분포의 모수 값이 주어지고 투자자의 위험허용정도 t가 정해지면 자산의 포트폴리오들 중에서 가장 큰 CE 값을 가지는 포트폴리오가 최적의 포트폴리오가 된다. 따라서 최적 포트폴리오(optimal portfolio; 이하 O로 표기)가 아닌 다른 임의의 포트폴리오 x 를 선택함에 따르는 손실을 다음의 식으로 표현 할 수 있을 것이다.

$$CE_O - CE_x. \qquad (6)$$

위의 손실을 최적 포트폴리오를 선택할 경우의 현금가치 CE_o에 대한 비율로 표현한 현금가치 손실비율(Cash Equivalent Loss-ratio : 이하 CEL로 표기)을 다음과 같이 정의하자.

$$CEL = \frac{CE_o - CE_x}{CE_o} \qquad (7)$$

여기서 CE_o와 CE_x는 각각 최적 포트폴리오 (o)와 임의의 포트폴리오 (x)의 현금 가치를 나타낸다.

2.3 구조적 시계열모형의 적용

본 논문에서는 먼저 Chopra와 Ziemba(1993)의 접근방법을 국내 자료에 적용하여 평균과 분산, 공분산 등의 모수에 대한 추정오차가 MV분석을 통한 최적의 자산 포트폴리오에 미치는 영향을 평가한 결과를 제시하였다. 이러한 내용은 이창수와 이광봉이 2002년도에 발표한 논문에서 제시한 바와 같다. 그러나 본 논문의 주안점은 구조적 시계열모형을 기초로 수익률의 평균에 대한 최적의 예측치를 구하여 MV 분석에서의 수익률의 평균에 대한 추정치로 이용하는 방법을 통하여 자산포트폴리오의 품질을 개선할 수 있다는 것을 보이는데 있다. 구조적 시계열모형은 시계열자료의 분석을 위해 사용될 수 있는 일반적인 모형으로 그 기본적인 형태는 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= \theta(t) + \gamma(t) + \varepsilon_t, \\
&\qquad \varepsilon_t \sim iid\ N(0,\ \sigma^2), \\
\theta(t) &= \theta(t-1) + \beta(t-1) + \eta_t, \\
&\qquad \eta_t \sim iid\ N(0,\ q_1\sigma^2), \\
\beta(t) &= \beta(t-1) + \xi_t, \\
&\qquad \xi_t \sim iid\ N(0,\ q_2\sigma^2), \\
\gamma(t) &= -\sum_{j=1}^{s-1}\gamma(t-j) + \psi_t, \\
&\qquad \psi_t \sim iid\ N(0,\ q_3\sigma^2),\ t=1,2,\ldots T
\end{aligned} \qquad (8)$$

구조적 시계열모형은 상태공간모형의 특수한 경우로서 이러한 모형을 근거로 하는 모수의 추정과 예측치의 결정을 위해서 Kalman-filter(1960)를 이용할 수 있다. 구조적 시계열 모형에 대한 상세한 설명과 모수의 추정 및 예측치의 결정 방법에 관해서는 Harvey의 1984년 논문을 참고하기 바란다. 구조적 시계열모형에서 계절요인과 추세요인이 배제된 경우 위의 모형은 아래와 같이 단순화 될 수 있으며 이를 변동수준모형(local-level model)이라 한다.

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= \theta(t) + \varepsilon_t, \\
&\qquad \varepsilon_t \sim iid\ N(0,\ \sigma^2), \\
\theta(t) &= \theta(t-1) + \eta_t, \\
&\qquad \eta_t \sim iid\ N(0,\ q\sigma^2),\ t=1,2,\ldots T
\end{aligned} \qquad (9)$$

본 논문에서는 자산에 대한 수익률의 평균이 시간의 경과에 따라 변화하는 속성을 반영하기 위해 위의 변동수준모형을 적용하였다. 이 경우 위 모형에서 $\delta(t)$는 관측기간 t의 자산수익률을 나타내며 $\theta(t)$는 미지인 t기간의 수익률의 평균을 나타낸다. 이 모형에서는 수익률의 평균이 시간의 경과에 따라 확률보행 형태로 변화한다고 가정하고 있다. 이러한 가정은 많은 자산 형태에 대해 현실적 타당성을 가진다고 할 수 있다. 변동수준모형의 적용에 따라 MV분석에서 미래의 수익률 평균에 대한 추정치는 과거 수익률의 단순평균이 아니라 최근 수익률에 더 많은 가중치가 부여되는 가중평균 형태로 대체된다.

3. 실증분석 결과

3.1 자료에 대한 설명

분석에 사용된 자료는 국내 한 보험사의 2001년도 기간 중 주식 형태의 자산 포트폴리오의 대부분을 차지하는 20개 주요 종목의 종목별 수익률 자료이다. 아래 표는 이들 20개 종목의 내용을 보여준다.

<표 1> 주식포트폴리오의 구성

x1-유한양행	x2-금강고려	x3-태평양	x4-SK	x5-신세계
x6-농심	x7-효성	x8-롯데칠성	x9-포항제철	x10-풍산
x11-LG전선	x12-LG건설	x13-대덕전자	x14-전기초자	x15-한국전력
x16-SK텔레콤	x17-한라공조	x18-한국통신	x19-신한금융	x20-국민은행

먼저 이들 20개 주식 종목에 대한 주당 수익률(weekly return) 자료를 이용하여 수익율의 평균과 표준편차에 대한 추정치를 구하고 종목들간의 공분산의 추정치를 구하였다. 아래 <표 2>는 이들 모수에 대한 추정결과를 보여준다.

<표 2> 입력변수들과 최적의 기본포트폴리오

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
Mean	0.098	0.223	0.275	0.047	0.407	0.072	0.262	0.413	0.196	0.199
(%)										
Std.	1.817	1.901	2.456	1.981	2.290	1.584	2.522	1.957	1.946	1.984
(%)										
corr.										
x1	1.000									
x2	0.410	1.000								
x3	0.407	0.410	1.000							
x4	0.461	0.277	0.271	1.000						
x5	0.305	0.348	0.343	0.372	1.000					
x6	0.380	0.389	0.296	0.240	0.447	1.000				
x7	0.424	0.271	0.413	0.358	0.310	0.321	1.000			
x8	0.245	0.222	0.197	0.094	0.186	0.262	0.072	1.000		
x9	0.347	0.288	0.340	0.526	0.362	0.198	0.392	0.149	1.000	
x10	0.420	0.322	0.284	0.333	0.379	0.361	0.311	0.200	0.327	1.000
x11	0.426	0.348	0.397	0.359	0.398	0.339	0.593	0.034	0.515	0.324
x12	0.552	0.372	0.439	0.425	0.345	0.394	0.517	0.176	0.398	0.409
x13	-0.006	0.088	0.171	0.172	0.238	0.062	0.093	0.221	0.175	0.261
x14	0.329	0.286	0.393	0.264	0.252	0.172	0.293	0.187	0.290	0.314
x15	0.375	0.253	0.303	0.426	0.283	0.188	0.432	0.101	0.550	0.358
x16	0.142	0.140	0.203	0.383	0.077	0.035	0.162	0.039	0.240	0.147
x17	0.419	0.377	0.356	0.368	0.253	0.231	0.505	0.309	0.422	0.384
x18	0.210	0.192	0.250	0.578	0.306	0.115	0.264	0.141	0.441	0.282
x19	0.448	0.356	0.374	0.398	0.390	0.288	0.488	0.146	0.448	0.316
x20	0.387	0.242	0.352	0.351	0.312	0.213	0.381	0.092	0.341	0.280

	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x20
Mean	0.210	0.160	0.156	0.517	0.057	0.152	0.225	0.034	0.133	0.273
(%)										
Std.	2.539	2.359	2.479	2.683	1.780	2.062	2.417	1.771	2.188	2.774
(%)										
corr.										
x1										
x2										
x3										
x4										
x5										
x6										
x7										
x8										
x9										

x10										
x11	1.000									
x12	0.486	1.000								
x13	-0.010	0.093	1.000							
x14	0.299	0.376	0.148	1.000						
x15	0.524	0.431	0.006	0.324	1.000					
x16	0.190	0.190	0.198	0.233	0.309	1.000				
x17	0.381	0.484	0.293	0.425	0.413	0.231	1.000			
x18	0.390	0.277	0.245	0.371	0.445	0.634	0.348	1.000		
x19	0.512	0.500	-0.085	0.363	0.493	0.198	0.345	0.311	1.000	
x20	0.394	0.394	-0.072	0.293	0.371	0.251	0.297	0.273	0.675	1.000

3.2 전통적 MV분석법에서의 모수에 대한 추정오차의 영향

우리는 모수의 참값을 이용하여 결정된 기본적인 최적 포트폴리오와 추정오차가 포함된 모수 값을 이용하여 결정된 새로운 최적 포트폴리오의 현금가치(CE)를 계산하여 비교하였다. 이 두개의 현금가치 값으로부터 현금가치 손실비율(Cash Equivalent Loss-ratio : CEL)을 구해보면 모수에 대한 추정오차의 영향을 평가할 수 있다.

먼저 수익률의 평균에 대한 추정오차의 영향을 측정하기 위해 수익률 평균의 참값으로 설정한 $\overline{r_i}$의 값을 $\overline{r_i}(1+kz_i)$로 바꾸어 최적 포트폴리오를 결정해 보았다. 여기서 z_i는 표준정규분포를 따르는 난수를 나타낸다. 추정오차의 크기에 따른 영향을 평가하기 위해서 우리는 변수 k의 값을 0.05에서 0.20까지 0.05간격으로 변화시켜 보았다. 변수 k의 값이 크면 클수록 추정오차가 커질 가능성이 높아지게 되는 것이다.

이 과정에서 평균에 대한 추정오차에 의한 영향만을 분리하여 평가하기 위해서 분산과 공분산의 값에는 변화를 주지 않고 고정된 값을 분석 시에 사용하였다. 수익률의 평균값에 대한 추정치로 $\overline{r_i}(1+kz_i)$를 사용한 경우의 최적 자산 포트폴리오와 평균을 $\overline{r_i}$를 사용하여 결정된 최적 자산 포트폴리오를 비교하기 위하여 CEL 값을 계산하였다.

0.05에서 0.20까지 각각의 고정된 k값에 대하여 표준정규분포를 이용하여 임의로 생성한 2000(20×100)개의 난수를 사용하여 $\overline{r_i}(1+kz_i)$, i=1,...,N의 값을 구하고 이러한 수익률 평균에 대한 추정치에 대응하는 최적포트폴리오의 CE_x의 값 100개를 계산한 다음 각각의 CE_x 값에 대한 CEL 값들을 결정하였다. 아래의 <표 3>은 이들 100개의 CEL 값에 대한 평균과 최소값, 최대값 등을 보여준다.

동일한 방법으로 분산의 추정 오차에 의한 영향을 관찰하기 위하여 우리는 분산의 추정치로 $\overline{\sigma_{ii}}(1+kz_i)$를 사용한 경우의 최적 자산 포트폴리오와 분산의 값으로 $\overline{\sigma_{ii}}$를 사용하여 결정된 최적 자산 포트폴리오를 비교하여 CEL을 계산하였다. 이 경우 역시 분산의 추정오차에 따른 영향만을 평가하기 위하여 평균과 공분산의 값에는 변화를 주지 않았다.

평균의 경우와 마찬가지로 0.05에서 0.20까지 각각의 고정된 k 값에 대하여 표준정규분포를 이용하여 임의로 생성한 2000(20×100)개의 난수를 사용하여 CE_x의 값 100개를 계산한 다음 각각의 CE_x 값에 대한 CEL 값들을 결정하였다. 역시 아래의 <표 3>은 이들 100개의 CEL 값에 대한 평균과 최소값, 최대값 등을 보여준다.

마지막으로 같은 방법을 공분산의 경우에

도 적용하였다. 추정오차에 의한 영향을 관찰하기 위하여 우리는 공분산의 추정치로 $\overline{\sigma_{ij}}(1+kz_i)$를 사용한 경우의 최적 자산 포트폴리오와 공분산의 값으로 $\overline{\sigma_{ij}}$를 그대로 사용하여 결정된 최적 자산 포트폴리오를 비교하기 위하여 CEL 값을 계산하였다.

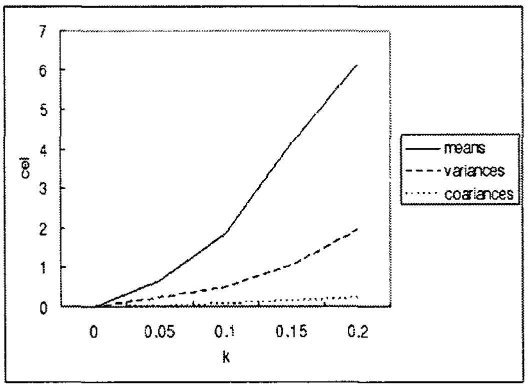
여기서 z_{ij}는 표준정규분포를 따르는 난수 값을 나타낸다. 공분산의 경우 역시 공분산에 대한 추정오차의 영향만을 평가하기 위해 평균과 분산의 값들에는 변화를 주지 않았다. 평균과 분산의 경우와 마찬가지로 0.05에서 0.20까지 각각의 고정된 k 값에 대하여 표준정규분포를 이용하여 임의로 생성한 38000(20×19×100)개의 난수를 사용하여 CE_x의 값 100개를 계산한 다음 각각의 CE_x 값에 대한 CEL 값들을 결정하였다. 역시 아래의 <표 3>은 이들 100개의 CEL 값에 대한 평균과 최소값, 최대값 등을 보여준다.

<그림 1>은 k 값의 변화에 따른 평균 CEL의 변화를 보여주는 그래프이다. 평균에 대한 추정오차에 따른 CEL은 분산에 대한 추정오차에 따른 CEL 보다 약 4배 정도인 것으로 나타났으며, 공분산에 대한 추정오차에 따른 CEL 보다는 24배 이상으로 나타났다.

이러한 결과는 MV 분석법을 적용하여 최적 포트폴리오를 결정하는데 있어서 추정오차의 영향을 보여 주고 있다. 분석결과는 특히 최적포트폴리오의 구성이 수익률의 평균에 대한 추정오차에 가장 크게 영향을 받는다는 사실을 보여준다.

<표 3> 현금가치 손실비율(CEL)의 평균값, 최대값과 최소값

k	모수	평균값	최소값	최대값
0.05	평균	0.66	0.01	3.44
0.05	분산	0.22	0.19	0.55
0.05	공분산	0.03	0.03	0.04
0.10	평균	1.85	0.01	8.36
0.10	분산	0.50	0.34	2.36
0.10	공분산	0.09	0.08	0.13
0.15	평균	4.13	0.11	25.16
0.15	분산	1.05	0.71	4.65
0.15	공분산	0.15	0.13	0.23
0.20	평균	6.12	0.02	26.99
0.20	분산	1.94	1.21	8.68
0.20	공분산	0.22	0.20	0.31



<그림 1> k 값의 변화에 따른 CEL 변화

구체적인 한 예로서 k=0.10일 때, 평균에 대한 추정오차에 따른 CEL은 1.85, 분산에 대한 추정오차에 따른 CEL은 0.50 그리고 공분산에 대한 추정오차에 따른 CEL은 0.09 이다.

이번에는 투자자의 위험회피정도의 변화에 따른 차이를 살펴보기 위하여 t 값을 변화시켜 가면서 위의 분석 과정을 적용해 보았다. <표 4>는 t값이 25, 50, 75일 때의 CEL 값을 k=0.05, 0.10, 0.15, 0.20에 대해 각각 구한 후 평균에 대한 CEL 값과 분산에 대한 CEL 값의 평균의 비율, 평균에 대한 CEL 값과 공분산에 대한 CEL 값의 평균의 비율, 분산에 대한 CEL 값과 공분산에 대한 CEL 값의 평균의 비율을 구한 결과를 보여준다.

<표 4> 평균, 분산, 공분산의 추정오차에 따른 CEL의 평균 비율

위험허용 정도(t)	Errors in Means versus Variances	Errors in Means versus Covariances	Errors in Variances versus Covariances
25	1.88	9.79	9.17
50	2.12	11.37	5.71
75	9.73	23.28	9.67

이 표의 분석결과는 투자자의 위험회피정도에 따라 차이는 있으나, 최적포트폴리오의 구성이 수익률의 평균에 대한 추정오차에 가장 크게 영향을 받는다는 사실을 다시금 확인시켜 준다.

3.3 구조적 시계열모형의 적용결과

3.2절에서는 전통적 MV분석법에서 모수에 대한 추정오차가 최적포트폴리오의 현금가치에 미치는 영향을 평가한 결과를 제시하고 있다. 이러한 결과를 통해 수익률의 평균에 대한 추정치의 오차가 최적 자산 포트폴리오의 구성에 큰 변화를 야기할 수 있다는 것을 보여주었다. 그러나 3.2절에서의 주안점은 모수에 대한 표본오차의 영향이라고 할 수 있다. 만약 자산에 대한 수익률의 평균이 시간의 경과에 따라 변화하는 속성을 가진다면 과거의 수익률 자료를 이용하여 고정된 수익률 평균값을 추정하는 것은 구조적으로 큰 오차를 포함하게 될 수 있을 것이다.

이 절에서는 자산에 대한 수익률의 평균이 시간의 경과에 따라 변화하는 속성을 반영할 수 있는 모형으로 구조적 시계열모형의 특수한 경우인 변동수준모형을 적용한 분석 결과를 제시하고 있다. 분석에 사용된 변동수준모형을 식으로 표현해 보면 아래와 같다.

$$r_t = u_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid\ N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$
$$u_t = u_{t-1} + \eta_t, \quad \eta_t \sim iid\ N(0, \sigma_\eta^2) \tag{11}$$

위 식에서 r_t는 관측기간 t의 개별 자산 수익률을 나타내며 u_t는 t기간의 이 자산에 대한 수익률의 평균을 나타낸다. 이 모형에서는 수익률의 평균이 시간의 경과에 따라 확률보행 형태로 변화한다고 가정하고 있다. ε_t는 개별 자산에 대한 t기간의 실제 수익률과 내재하는 같은 기간에 대한 수익률의 평균간의 차이를 나타내는 관측오차이며 η_t는 단위기간 시간의 경과에 따라 수익률의 평균이 변화하는 정도를 나타내는 항이다.

분석 대상이 된 자산들에 대한 수익률 자료가 계절적인 변동을 보이지 않으며 추세에 의해 크게 영향을 받지 않는 것으로 판단하여 변동수준모형을 적용하였으며 만약 계절적 변동이나 추세에 의한 영향이 존재하는 경우라면 보다 일반적인 구조적 시계열모형을 적용하는 것이 바람직 할 것이다. 적용된 변동수준모형에 대한 모수 추정 및 예측치의 결정을 위해서는 Koopman과 Harvey가 개발한 통계분석 소프트웨어인 STAMP를 이용하였다.

먼저 시뮬레이션 분석을 통하여 실제로는 수익률이 변동수준모형에 따라 결정되나 수익률의 평균을 과거 수익률 자료의 단순평균으로 추정하는 오류가 최적 포트폴리오에 미치는 영향을 평가하였다. 3.2절에서와 같이 자산별 수익률의 분산과 공분산의 값으로는 3.1절의 <표 2>의 값들을 이용하여 구한 값을 적용하였다. 정확한 미래의 수익률 평균값을 구하기 위해서는 아래의 식을 이용하여 추정된 값을 이용하였다.

$$E[r_{T+1}] = \hat{u}_{T|T} + z * \hat{\sigma}_{\eta} \qquad (12)$$

이 식에서 z는 표준정규분포를 이용하여 생성된 난수를 나타내며 $\hat{\sigma}_{\eta}$의 값으로는 실제 자료를 이용하여 추정한 값을 이용하였다. 먼저 단순히 과거 수익률 자료의 평균으로 수익률의 평균을 추정하는 경우에 최적 포트폴리오를 결정하여 CE값을 구하고 다음으로 위의 식에 의해 정확한 수익률의 평균값을 생성한 뒤 그 값을 최적 포트폴리오를 결정하는데 이용하는 경우의 CE값을 각각 구한 뒤 CEL값을 계산하는 과정을 100회 반복하여 아래 <표 5>의 결과를 얻었다. 3.2절의 경우와 차이가 있는 부분은 CEL값을 계산할 때 수익률의 단순평균으로 미래 수익률 평균을 추정한 경우는 CE_x에 해당되며 위 (12)식에 의해 미래 수익률 평균을 추정한 경우는 CE_O에 해당된다. 이러한 분석 과정에서 투자자의 상대적인 위험허용정도(Risk Tolerance)를 나타내는 t값으로는 50을 적용하였다.

<표 5> CEL값의 특성

반복횟수	CEL의 평균	CEL의 최소값	CEL의 최대값
100	8.73645	3.56077	10.17382

위 <표 5>의 결과에서 CEL의 평균값이 3.2절의 분석에서 k=0.2인 경우 보다 오히려 크다는 것을 알 수 있다. 이러한 결과는 실제로는 수익률의 평균이 시간의 경과에 따라 변화함에도 불구하고 이러한 변동성을 무시하고 수익률의 평균을 과거 수익률 자료의 단순평균으로 추정하는 오류가 최적 포트폴리오에 미치는 영향이 매우 크다는 것을 보여준다.

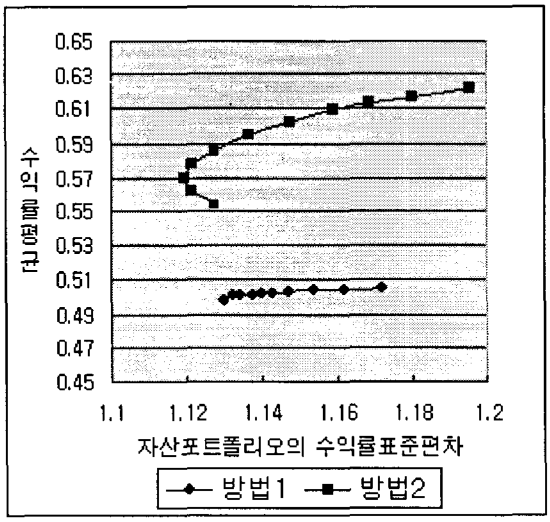
다음으로는 3.1절에서 설명한 20개 상장회사의 주가 자료와 배당 실적자료를 이용하여 미래의 수익률 평균을 과거 수익률 자료의 단순평균으로 추정하여 최적 포트폴리오를 결정하는 방법(방법1)을 사용한 경우와 수익률 자료에 변동수준모형을 적용하여 기간별 평균 수익률의 예측치를 구한 결과를 이용하여 최적 포트폴리오를 결정하는 방법(방법2)을 사용한 경우의 두 가지 방법에 대한 평가를 사후적 시뮬레이션 기법을 적용하여 평가해 보았다. 이러한 분석을 위해서 증권전산원의 협조를 얻어 확보한 자료를 이용하였다.

아래의 <표 6>은 위험허용정도 t의 값을 25에서 75까지 변화해가며 방법1과 방법2에 의해 결정된 포트폴리오에 대한 8주간의 실제 수익률의 평균과 표준편차를 구한 결과를 보여주고 있다. 이 때 포트폴리오의 구성이 일정기간 마다 바뀌는 것을 감안하여 매월 초마다 방법1과 방법2를 각각 적용하여 최적포트폴리오의 구성을 변경하여 분석하였다. 이러한 분석을 위해 2001년-2002년 기간의 <표 1>의 종목들에 대한 주사 및 배당 실적자료를 이용하였다. 아래의 <그림 2>는 <표 6>의 분석결과를 efficient frontier곡선 형태로 표현한 것이다.

<표 6> 최적포트폴리오 결정방법별 수익률의 평균과 표준편차 (단위:%)

위험허용정도(t)	방법1		방법2	
	mean	std.	mean	std.
25	0.49755	1.13005	0.55450	1.12737
30	0.49781	1.13006	0.56228	1.12125
35	0.50094	1.13254	0.57006	1.11920
40	0.50145	1.13458	0.57784	1.12124
45	0.50143	1.13779	0.58583	1.12731
50	0.50184	1.14012	0.59463	1.13693
55	0.50252	1.14272	0.60247	1.14756
60	0.50320	1.14724	0.60968	1.15902
65	0.50388	1.15368	0.61335	1.16889
70	0.50456	1.16199	0.61688	1.18031
75	0.50520	1.17198	0.62229	1.19515

<그림 2> 포트폴리오 구성방법에 따른 Efficient Frontier곡선의 비교



이러한 결과는 방법2가 방법1에 비해 주어진 위험허용정도의 범위 내에서 보다 높은 기대수익률을 제공하고 있음을 보여주고 있어 방법2의 실효성을 입증하고 있다.

4. 결론 및 향후 연구방향

MV분석의 문제점 중 하나는 주요 입력변수로 사용되는 수익률의 평균에 대해 추정오차가 최적포트폴리오의 결정에 상당한 영향을 미친다는 것이다. 그러나 보다 근본적인 문제는 일반적으로 사용되는 MV분석에서는 자산에 대한 수익률의 평균이 여러 여건의 변화에 따라 변동할 수 있는 속성을 반영하지 못한다는 점이다.

본 논문에서는 자산에 대한 수익률의 평균이 시간의 경과에 따라 변화할 수 있다는 판단에 근거하여 이러한 속성을 반영할 수

있는 모형으로 구조적 시계열모형의 적용을 제안하였다. 본 논문에서 실증분석에 적용된 모형은 구조적 시계열모형의 특수한 경우인 변동수준모형이었으며 이러한 모형의 적용에 따라 MV분석에서 미래의 수익률 평균에 대한 추정치는 과거 수익률의 단순 평균이 아니라 최근 수익률에 더 많은 가중치가 부여되는 가중평균 형태로 대체되는 효과를 가지게 된다. 제안된 방법의 타당성을 입증하기 위해 국내 한 보험사의자산운용과 관련한 자료를 이용한 실증분석 결과를 제시하였다. 분석결과는 본 논문에서 새롭게 제안된 방법이 주어진 위험허용정도의 범위 내에서 보다 높은 기대수익률을 제공하고 있음을 보여주고 있어 적용의 타당성을 입증하고 있다..

본 논문에서 자산 수익률의 시간의 경과에 따른 변동성을 반영하기 위해 채택된 구조적 시계열 모형은 모형의 형태가 단순하며 해석이 용이한 장점을 가지고 있어 경제 시계열 자료의 분석에 많이 사용되고 있다. 그러나 보다 엄밀한 분석을 위해서는 모형의 적용 타당성에 대한 검정 작업이 필요하다고 생각한다. 또한, 본 논문에서는 실증분석을 위하여 개별 자산 수익률 자료에 변동수준모형은 단변량적으로 적용하였으나 다변량적 분석을 통해 분석결과의 정밀성이 개선될 수 있을 것이다. 본 논문의 주제와 관련한 추가적인 과제로 분산과 공분산의 시간의 경과에 따른 변동성을 반영하기 위한 모형을 MV분석의 개선을 위해 적용하는 방안에 대해 계속 연구하고자 한다.

참고문헌

[1] 성내경(2001), 「SAS/IML 행렬 연산」, 자유아카데미.

[2] 이창수 · 이광봉(2002), 모수추정치의 오차가 포트폴리오의 최적성에 미치는 효과에 관한 연구, 금융공학연구, pp. 169-178

[3] Casdagli, M. and Eubank, S.(1998), *Nonlinear Modeling and Forecasting, Santa* Institute, Addison-Wesley.

[4] Chopra, Vijay K. and Ziemba, William (1998), *The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances of Optimal Portfolio Choice*, Worldwide Asset and Liability Modeling, Publication of the Newton Institute.

[5] Hartmann, Wolfgang M., *The NLP Procedure* : Release 6.10 Nonlinear Programming Extended User's Guide, SAS Institute, Inc.

[6] A. C. Harvey(1984), A Unified View of Statistical Forecasting Procedures, Journal of Forecasting, pp.245-275

[7] Kalman, R.E.(1960), A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Transactions ASME Journal of Basic Engineering, 82, pp. 35-45

[8] Kwan, Clarence C. Y.(1984), Portfoilio Analysis using Simple Index, Multi-Index, and Constant Correlation Models: A Unified Treatment, *Journal of Finance*, Vol. 39, No. 5, pp. 1469-1484

[9] Markowitz, H. M.(1959), *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley & Sons, New York.

[10] Remaley, William.(1973), Suboptimization in Mean-Variance Efficient Set Analysis, *Journal of Finance*, No. 2 , pp. 397-403.

[11] Siem Jan Koopman, Andrew C. Harvey, Jurgen A. Doornik and Neil Shephard, Stamp 5.0(Structural Time Series Analyser, Modeller and Predictor), Chapman & Hall