

## 수동변속기 헬리컬 기어치의 접촉력 평가를 통한 변형간섭 해석

박 수 진<sup>1)</sup> · 유 완 석<sup>2)</sup>

부산대학교 기계설계공학과 대학원<sup>1)</sup> · 부산대학교 기계공학부<sup>2)</sup>

## Tooth Load Sharing and Deformation Overlap of Helical Gear Pairs for the Manual Transmission of Automobile

Sujin Park<sup>1)</sup> · Wansuk Yoo<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>Graduate School, Department of Mechanical Design Engineering, Pusan National University, Busan 609-735, Korea

<sup>2)</sup>School of Mechanical Engineering, Pusan National University, Busan 609-735, Korea

(Received 16 May 2003 / Accepted 22 August 2003)

**Abstract :** The load sharing and teeth deflection of helical gear system are analyzed to investigate the deformation overlap. The deformation overlap, which is calculated by the results of displacement analysis, is suggested as the basis for the tooth profile modification. Helical gear systems are formulated as contact problems, and solved by elastic contact theory and FEM. The developed computer program, which offers gear teeth deflection and deformation overlap, will be of much help to the improved design of manual transmissions for automobiles.

**Key words :** Manual transmission(수동변속기), Helical gear(헬리컬 기어), Teeth deflection(기어치의 흡변형), Deformation overlap(변형간섭), Contact force(접촉력)

### 1. 서 론

자동차의 변속기에서 원활하고 정숙한 동력 전달을 위해 기어의 진동 및 소음이 설계시에 중요하며, 이러한 진동과 소음은 탄성 변형이 야기하는 기어치의 접촉에서의 오차와 관련이 있다.<sup>1-4,10)</sup> 따라서 변속 기어의 치형 곡선으로 사용되는 인벌류트 곡선을 수정하여 사용하는데,<sup>9)</sup> 변형에 기인하는 접촉 위치에 대한 오차로서, 기어치 접촉쌍의 최초 접촉 상태에서 계산되는 변형간섭을 정의하여, 변형에 대한 치형수정의 근거로 제시하고자 한다. 이러한 변형간섭은 변형해석 결과로 알 수 있으며,<sup>5)</sup> 변형해석을 위해서는 기어치 접촉쌍에서의 정확한 접촉력이 필요하다.

\* To whom correspondence should be addressed.  
psijjk@pusan.ac.kr

수치 해석 방법으로 유한 요소 해석을 이용하며, 접촉 이론을 사용하여 기어치의 접촉쌍에서의 신뢰성 있는 접촉력을 계산하고, 변형해석에 이용한다. 변형 후의 변형간섭 조사에는 접촉 문제에서 사용한 접촉 조건식을 활용하여 간단하면서도 효율적인 계산을 수행하였다.

기본 제원을 입력하여 헬리컬 기어쌍에 대한 변형 간섭량을 제공하는 통합 전산 프로그램을 작성하여 차량 변속기 기어 설계에 활용할 수 있도록 하였다.

### 2. 접촉 문제

맞물려 동력을 전달하고 있는 기어쌍은 접촉 문제로 설정할 수 있으며, 변형 해석을 위해서는 먼저 접촉부의 접촉력이 계산되어야 한다. 기어쌍의 접

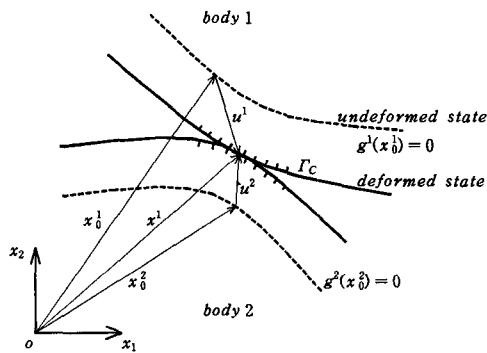


Fig. 1 Contact between two bodies

축력 계산을 위해 탄성 접촉 문제를 다음과 같이 헬리컬 기어쌍에 적용한다.<sup>11)</sup>

두 변형체가 경계의 일부에서 접촉되어 있을 때, 탄성 영역에서 접촉 영역의 크기와 접촉 압력의 분포, 물체의 변위, 응력을 구하는 문제가 접촉 문제이다.<sup>7)</sup> 두 물체들을 Fig. 1과 같이 물체 1, 2로 구분하며, 기어쌍의 접촉 문제에서는 구동 기어를 물체 1, 피동 기어를 물체 2로 한다. 변형 변위  $u_i$ 와 변형률  $\epsilon_{ij}$ 을 미소 변위, 미소 변형률로 가정하고, 응력  $\sigma_{ij}$ 는 Hooke's law를 적용하면 다음과 같다.

$$u = X - X_0 \quad (1)$$

$$\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (3)$$

$X_0$ 와  $X$ 는 각각 변형 전후의 위치이고,  $u_{i,j}$ 는  $u_i$ 를 공간 좌표계  $x_j$ 로 편미분한 것을 의미하며,  $\sigma_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}$ ,  $C_{ijkl}$ 은 각각 응력, 변형률, 탄성 계수를 의미한다. 접촉 문제의 평형 방정식은

$$\sigma_{ii,j} + b_i = 0 \quad (4)$$

이고,  $b_i$ 는 물체력으로서 헬리컬 기어쌍에서는 무시한다.

경계 조건은 변위 경계 조건, 하중 경계 조건과 접촉부의 접촉 경계 조건이 있다. 접촉 경계 조건은 접촉면에서 마찰을 무시하고, 비접촉 접촉인 경우에 접촉 경계  $\Gamma_c$ 에서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$S \geq 0 \quad \text{on } \Gamma_c \quad (5)$$

$$g^{(k)} \leq 0 \quad \text{on } \Gamma_c \quad (6)$$

$$S \cdot g^{(k)} = 0 \quad \text{on } \Gamma_c \quad (7)$$

여기서,  $S$ 와  $g^{(k)}$ 는 각각 접촉력, 접촉 조건식<sup>7)</sup>이며, 상첨자  $k$ 는 물체 번호를 나타낸다. 또한, 변위  $u_i$ 와 하중  $F_i$ 에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_U \quad (8)$$

$$\bar{F}_i = \sigma_{ij} n_j^{(k)} \quad \text{on } \Gamma_F \quad (9)$$

여기서,  $\Gamma_U$ ,  $\Gamma_F$ 는 각각 변위 경계 구간, 하중 경계 구간이고,  $n_i$ 는 외향 단위 법선 벡터이다. 기어쌍의 접촉 문제를 해석하는 방법으로 유한 요소 해석을 채택하여, 유한 요소 수식으로 접촉 문제의 차례 방정식을 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \min J(u^1, u^2) \\ & \text{subject to } g^{(2)} \leq 0 \quad \text{on } \Gamma_c \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 변형에너지  $J$ 와  $g^{(2)}$ 는 각각

$$\begin{aligned} J &= \int (1/2) \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_F} \bar{F}_i^1 u_i^1 d\Gamma - \int_{\Gamma_F} \bar{F}_i^2 u_i^2 d\Gamma \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &= (1/2) U^1{}^T K^1 U^1 + (1/2) U^2{}^T K^2 U^2 \\ &\quad - R^1{}^T U^1 - R^2{}^T U^2 \end{aligned} \quad (12)$$

$$g^{(2)} = M^1 U^1 + M^2 U^2 - G \leq 0 \quad \text{on } \Gamma_c \quad (13)$$

이다.  $K$ 는 강성행렬,  $M$ 은 접촉 간극의 감소량 계산 행렬,  $G$ 는 초기 간극,  $R$ 은 절점 하중 벡터이다. 유한 요소 수식으로 표현된 접촉 문제는 그 특성상 비선형 문제이므로 이 문제를 해석하는 방법으로 쌍대 문제(dual problem)를 이용하여 정리하면, 쌍대 변수로 라그란지 승수 벡터  $P$ 를 도입하여 다음과 같은 이차 계획법 문제가 된다.<sup>7)</sup>

$$\begin{aligned} & \max [-(1/2) P^T Q P - R^T P] \\ & \text{subject to } P \geq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$Q = M^1(K^1)^{-1} M^1{}^T + M^2(K^2)^{-1} M^2{}^T \quad (15)$$

$$R = G - M^1(K^1)^{-1} R^1 - M^2(K^2)^{-1} R^2 \quad (16)$$

본 연구에서는 이차 계획법 문제를 Lemke<sup>8)</sup>의 방법으로 수치 해석하였으며, 전산 프로그램은

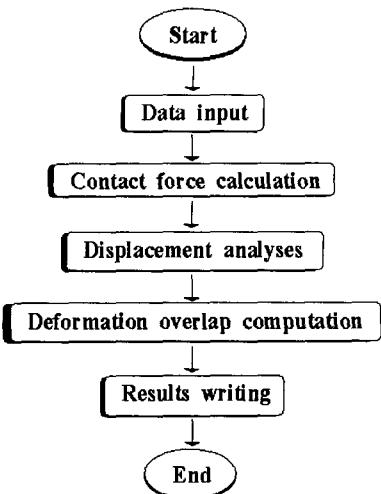


Fig. 2 The flow chart of computer program

FORTRAN 언어를 사용하여 Fig. 2와 같은 절차로 구성하였다.

### 3. 접촉조건과 변형간섭

접촉 조건과 변형간섭의 효율적인 계산을 위해 4 절점 사면체 요소를 이용하여 유한 요소 해석을 수행하고, 구동기어의 접촉 경계면 접촉 조사점을  $p_1$ , 피동기어의 접촉 경계면 요소를 이루는 절점들을  $p_2, p_3, p_4$ 로 둔다. 따라서 Fig. 3과 같이,  $p_1$ 에서 피동기어의 접촉 요소 외부 경계면에 내린 수선을 이용하면, 초기 접촉 간극이 계산되므로 접촉 조사 단계에서의 접촉 조건이 구성된다. 접촉 조건은 접촉 간극 함수  $g^{(k)}$ 가 영이거나 음수일 때이므로, 구동기어의 접촉 여부 조사점과 피동기어의 경계면과의 간극으로 접촉 조건을 확인한다.

경계면에서의 외향 단위 벡터를  $\vec{n}$ , 간극의 크기를  $G$ 라 두면 각각 다음과 같다.

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_2P_4}}{|\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_2P_4}|} \quad (17)$$

$$G = |\overrightarrow{P_5P_1}| = \overrightarrow{P_2P_1} \cdot \vec{n} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \vec{n} \quad (18)$$

경계에 위치한 요소들 중에서 접촉되는 요소는 면적 좌표계를 이용한 다음의 조건들에 의해 결정된다.

$$0 \leq A_1/A \leq 1 \quad (19)$$

$$0 \leq A_2/A \leq 1 \quad (20)$$

$$0 \leq A_3/A \leq 1 \quad (21)$$

$$A_1/A + A_2/A + A_3/A = 1 \quad (22)$$

여기서  $A, A_1, A_2, A_3$ 는 각각 Fig. 4와 같이 표현된 삼각형들의 면적이다.

헬리컬 기어에서의 접촉은 피동기어의 치끝에서 점접촉으로 시작하여 치면 전체로 보아 대각선 방향으로 진행하다가 다시 반대 치점의 점접촉으로 종료된다. 따라서 변형간섭은 기어치의 접촉쌍이 접촉을 시작하는 상황에서 정의한다. 기어치는 변형으로 인하여 이상적인 접촉시기 이전에 이미 접촉하게 되므로, 접촉 시작 시각에서 두 기어에 대한 변형 해석을 각각 수행하여, 접촉 시작 기어치의 상대방 기어치에 대한 중첩 부분을 변형 간섭으로 정의한다.<sup>10)</sup>

계산된 접촉력을 이용하여 변형 해석을 수행한 후, 변형간섭의 정의에 따라 위의 접촉 조건을 다시 계산하면 변형에 의해 중첩된 부분의 깊이가 계산되므로 변형 간섭량을 알 수 있다.

### 4. 수치해석

#### 4.1 유한 요소 모형

헬리컬 기어쌍의 치형은 랙 커터(rack cutter)에 의해 창성되는 인벌류트 곡선과 필렛 곡선을 채택하고<sup>6,9)</sup> 기본 제원을 변화시켜 가며 자동차의 수동 변속기 헬리컬 기어쌍에서 7가지 경우를 수치 해석 대상으로 설정하여 Model 1 ~ Model 7로 구별한다. 이 중, Model 1 ~ Model 5는 전진 기어쌍이며, Model 6과 Model 7은 후진 기어쌍으로서 잇수 24개의 아이들 기어를 포함하고 있다. 먼저 2차원 평면에서 모델링 작업을 수행하고 축방향으로 일정한 비틀림 각에 따라 돌출시켜 3차원 헬리컬 기어 모델을 완성한다. 헬리컬 기어쌍의 주요 제원을 Table 1에 정리하였으며, 대표적으로 Model 4의 유한 요소 모형을 Fig. 5와 6에 나타내었다. Figure 5와 6에서의 번호는 기어치의 각 접촉쌍에 부여한 번호이다.

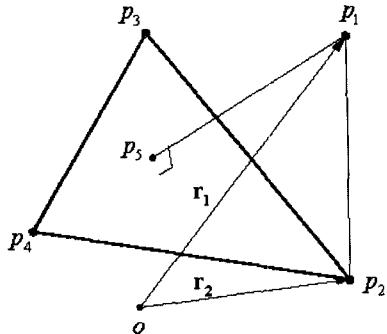


Fig. 3 Node and element in contact boundary

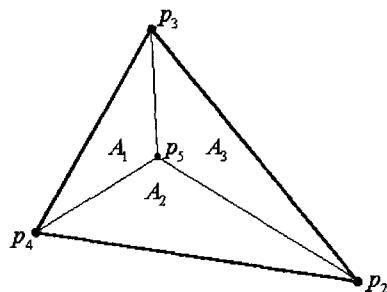


Fig. 4 Compatibility conditions for contact

Table 1 Data of helical gear system

Model	1	2	3	4	5	6	7
Number of teeth	38/15	38/23	33/23	26/30	21/40	35/24/14	
						35/24	24/14
Normal module	2.5	2.0	2.25	2.25	2.0		2.5
Normal pressure angle(°)	22.5	17.5	20.0	17.5	17.5		22.5
Helix angle(°)	23.0	28.26	26.33	26.33	28.26		23.0
Torque			24340.0 kgf·mm				
Young's modulus			21000.0 kgf/mm²				
Poisson's ratio			0.3				

Table 2 Data of finite element model

Gear	Driving gear		Driven gear	
Node	4594		4594	
Element	17640		17640	
Initial displacement boundary condition on the rim( mm )				
Radial	0.0	Radial	0.0	
Circumferential	0.0354	Circumferential	0.0	

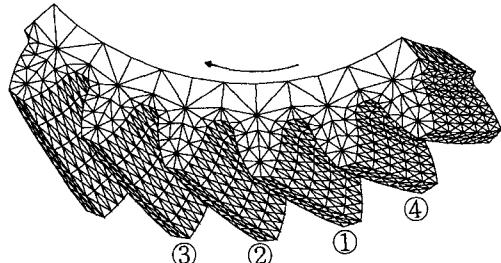


Fig. 5 FE model of driving gear(Model 4)

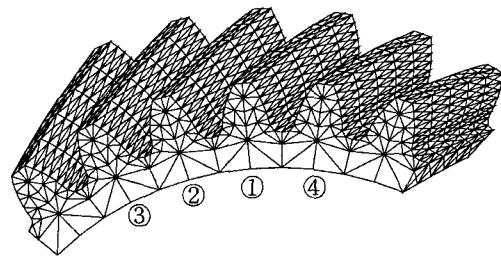


Fig. 6 FE model of driven gear(Model 4)

피동기어 림부위의 변위를 구속하고, 구동기어는 회전 방향으로 일정 변위 경계조건을 적용하여 전달 토크를 실현하였다. 최초 변위를 부여하여, 계산되는 접촉력에 의한 토크가 만족시키고자 하는 전달 토크에 수렴할 때까지 수정하는 반복 계산을 수행하였다. 유한 요소 모형에 대한 정보를 Table 2에 정리하였다.

#### 4.2 전달 하중 해석

연속체인 치면을 이산화하여 유한 요소 해석하였으므로 절점과 절점 사이는 직선으로 표현되나 각 절점은 정확한 인벌류트 곡선상의 위치이므로, 접촉력의 계산에는, 해당되는 절점의 좌표값을 이용하여 인벌류트 치면<sup>6,9)</sup>이 고려된 값을 구한다. 전달 하중을 조사하는 기어치의 접촉쌍은 ①, ②, ③번 접촉쌍이며, ④번 접촉쌍은 접촉을 시작할려는 순간에 있다. Model 4에 대해서 접촉 이론과 유한 요소법을 이용하여 전달 하중을 해석한 결과를 Fig. 7과 Table 3에 나타내었다. 구동 기어의 중심에서부터 측정한 접촉 절점의 반경 방향 거리를 나타내었고, 이뿌리 부분과 치폭 방향의 전면(Fig. 5와 6의 전면)을 각각 0.0으로 하고, 치꼴과 치폭 방향의 후면(Fig. 5와 6의 후면)을 각각 100.0으로 보았을 때의 백분율

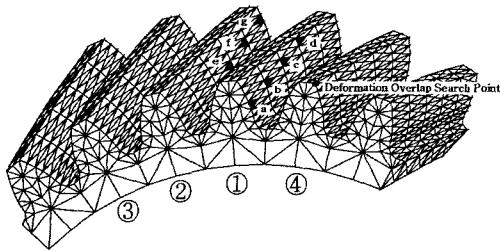


Fig. 7 Contact positions and deformation overlap search point of driven gear

Table 3 Tooth load sharing in Model 4

Model	Contact tooth pair	Contact position in Fig. 7	Contact force (kgf)	Position in body1		
				Radial distance (mm)	whole depth (%)	face width (%)
4	①	a	3.67	35.12	70.37	0.0
		b	245.16	34.24	55.55	20.0
		c	144.30	33.75	47.18	40.0
		d	139.83	33.25	38.82	60.0
	②	e	79.87	36.87	100.0	40.0
		f	130.03	35.12	70.37	80.0
		g	116.67	34.24	55.55	100.0

로 각 접촉쌍에서 접촉이 발생한 영역의 위치를 표시하였다. 나머지 6가지 경우의 기어쌍에 대해서도 같은 방법으로 전달하중을 계산하며, 그 결과는 부록에 나타내었다.

#### 4.3 변형간섭 계산

접촉력으로 계산된 하중 분배량을 하중 경계 조건으로 부여하고, 변형 해석을 수행한다. ④번 기어치가 처음 접촉하기 시작하는 변형간섭량 측정 상황에서 ①, ②번 기어치가 접촉하고 있으므로, 구동 기어와 피동기어의 변형 해석을 따로 수행한 후, 접촉 시작 예정인 ④번 기어치의 중첩 부분을 변형간섭량으로 계산한다.

변형 해석의 결과로 변형간섭은 피동 기어의 최초 접촉 부위인 치꼴 부분에서 발생하였으며, Model 1~7에 대한 변형간섭량은 Table 4와 같다.

#### 4.4 결과 및 고찰

접촉 위치는 접촉쌍 ②가 이높이와 치폭 방향에서 접촉쌍 ①보다 높은 수치가 나타났다. ②번 접촉

Table 4 Gear tooth deformation overlap

Model	Deformation overlap ( $\mu m$ )
1	18.34
2	24.61
3	20.90
4	21.25
5	21.55
6	17.54
7	22.68

쌍은 접촉을 먼저 시작하여, 치폭 방향으로 보았을 때 후반부에서 접촉을 하고 있으며, ①번 접촉쌍은 ②번 접촉쌍보다 나중에 접촉을 시작하여 치폭의 전반부에서 접촉이 진행중이다. ①번 접촉쌍은 접촉의 진행이 많이 되지 않은 상태이므로 전체 치폭에서 0~60 %의 영역과 이높이 중에서 38~70 %의 낮은 부위에서 접촉중이고, ②번 접촉쌍은 치폭 방향으로는 40~100 %의 영역과 이높이 중에서 55~100 %의 높은 부위에서 접촉하고 있다. 이것은 ②번 접촉쌍이 ①번 접촉쌍보다 접촉이 상당히 진전되었음을 잘 보여 주고 있으므로 신뢰성있는 접촉 탐색이 수행되었음을 알 수 있다. ①번 접촉쌍은 4개의 절점에서 접촉이 발생하였으며 전체 전달 하중의 62 %를 담당하고 있고, ②번 접촉쌍에서는 3개의 접촉 절점에 전체 전달 하중의 38 %가 분배되었다. 이것은 접촉이 많이 진행되어 접촉의 종료 시점이 가까워진 기어치이므로 접촉 절점의 수가 줄어들고 하중 분배량도 작아졌기 때문이다.

기어치의 접촉쌍은 정확한 물림 시기 이전에 변형에 의해 접촉을 시작하게 되므로, Table 4와 같이 접촉 시작 피동 기어치의 이끝에서 변형간섭이 발생하였다. 이것은 접촉 지점에서 두 기어 사이에 상대속도를 유발하여 충격 및 소음이 발생하는 원인 중의 하나이므로 변형간섭 부분은 치형 수정을 수행하여 이러한 현상을 개선시켜야 한다.

#### 5. 결 론

수동변속기에서 사용되는 헬리컬 기어치의 탄성 변형에 의한 변형간섭을 조사하여 근거 있는 적절한 치형 수정량을 산출하고자 하였다. 수치해석 방법으로 유한 요소 해석을 채택하고, 두 기어의 동력 전달 시스템은 기어치 사이의 접촉 문제로 해석이

가능하므로 먼저 접촉 이론을 이용한 접촉 문제를 해석하여 정확한 접촉 위치와 기어치의 전달 하중을 구한 후 변형 해석을 수행하였다.

연구 내용으로는 기어치의 치형을 이루는 치형 곡선을 구현하여, 유한 요소 모형을 완성하고, 접촉 이론을 이용하여 접촉 문제의 해석을 수행한 후, 변형 해석의 결과를 바탕으로 변형 간섭량을 계산하는 과정 등이 포함된다.

기어 시스템의 기본 제원을 입력하여, 최종 결과인 변형 간섭량을 제공하는 과정을 통합 전산 프로그램으로 개발하였으며, 변속 기어의 성능 개선을 위한 다른 기법들과 함께, 본 연구에서 계산된 변형 간섭을 이용하면 변속기 기어 설계 단계에서 변형의 영향을 효과적으로 고려할 수 있을 것으로 생각된다.

## 후 기

본 연구는 국가지정연구실(부산대학교 기계공학부 CAE 연구실, M1-0203-00-0017-02J0000-00910)의 지원으로 이루어졌으므로 감사드립니다.

## References

- 1) E. Yau, H. R. Busby, D. R. Houser, "A Rayleigh-Ritz Approach to Modeling Bending and Shear Deformation of Gear Teeth," *Computers & Structures*, Vol.50, No.5, pp.705-713, 1994.
- 2) C. I. Park, J. M. Lee, "Analysis of Load Transmission Characteristics for Automobile Helical Gear," *Transactions of the KSAE*, Vol.3, No.5, pp.1-9, 1995.
- 3) D. B. Wallace, A. Seireg, "Computer Simulation of Dynamic Stress, Deformation, and Fracture of Gear Teeth," *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry*, Vol.95, No.4, pp.1108-1114, 1973.
- 4) P. Gagnon, C. Gosselin, L. Cloutier, "Analysis of Spur and Straight Bevel Gear Teeth Deflection by the Finite Strip Method," *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol.119, pp.421-426, 1997.
- 5) M. E. Stegemiller, "A Three-dimensional Analysis of the Base Flexibility of Gear Teeth," *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol.115, pp.186-192, 1993.
- 6) D. W. South, J. R. Mancuso, *Mechanical Power Transmission Components*, Marcel-Dekker, Inc., pp.511-531, 1994.
- 7) G. J. Huh, B. M. Kwak, "Constrained Variational Approach for Dynamic Analysis of Elastic Contact Problems," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.10, pp.125-136, 1991.
- 8) Van de Panne, A. Whinstone, "The Simplex and the Dual Method for Quadratic Programming," *Operational Research Quarterly*, Vol.15, No.4, pp.355-388, 1964.
- 9) J. R. Colbourne, *The Geometry of Involute Gears*, Springer-Verlag, New York, pp.212-218, 162-163, 1987.
- 10) S. J. Park, W. S. Yoo, "Deformation Characteristics of Gear System with a Profile Shift Coefficient Preserving Center Distance," *Transactions of the KSME, A*, Vol.27, No.1, pp.194-199, 2003.
- 11) S. J. Park, G. J. Huh, "A Study on the Profile Modification of Spur Gears for the Prevention of Gear Tooth Overlap by Deformation," *Journal of the Korean Society of Precision Engineering*, Vol.16, No.3, pp.208-214, 1999. .

## 부 록

Model 1~3, Model 5~7에 대한 전달하중 계산 결과는 다음과 같다.

Table A1 Tooth load sharing in Model 1

Model	Contact tooth pair	Node in body1	Contact force (kgf)	Position in body1		
				Radial distance (mm)	Whole depth (%)	Face width (%)
1	①	3145	103.22	21.27	70.37	0.0
		2812	274.54	20.36	55.55	20.0
		2501	300.23	20.36	55.55	40.0
		1834	189.73	19.31	38.35	60.0
		1561	153.25	19.31	38.35	80.0
	②	3312	244.95	23.08	100.0	60.0
		3011	160.04	22.17	85.18	80.0

Table A4 Tooth load sharing in Model 5

Model	Contact tooth pair	Node in body1	Contact force (kgf)	Position in body1		
				Radial distance (mm)	Whole depth (%)	Face width (%)
5	①	3145	6.41	26.12	70.37	0.0
		3146	27.15	25.41	55.55	0.0
		2812	256.26	25.41	55.55	20.0
		2136	500.50	24.49	38.71	40.0
		1834	123.60	23.79	25.82	60.0
	②	3612	175.40	27.02	85.18	40.0
		2955	255.59	26.21	70.37	60.0
		2647	184.23	25.40	55.55	80.0

Table A2 Tooth load sharing in Model 2

Model	Contact tooth pair	Node in body1	Contact force (kgf)	Position in body1		
				Radial distance (mm)	Whole depth (%)	Face width (%)
2	①	3145	28.55	28.56	70.38	0.0
		2812	194.68	27.76	55.56	20.0
		2136	261.29	26.88	39.37	40.0
		1834	43.15	26.54	32.15	60.0
		1837	26.04	26.17	26.26	60.0
	②	3612	157.52	29.37	85.19	40.0
		2955	230.91	28.56	70.38	60.0
		2647	167.82	27.76	55.56	80.0

Table A3 Tooth load sharing in Model 3

Model	Contact tooth pair	Node in body1	Contact force (kgf)	Position in body1		
				Radial distance (mm)	Whole depth (%)	Face width (%)
3	①	3145	36.26	31.16	70.38	0.0
		2812	222.91	30.29	55.56	20.0
		2136	147.81	29.32	39.29	40.0
		1564	132.31	28.61	27.29	80.0
	②	3609	99.34	32.92	100.0	40.0
		3315	145.31	32.04	85.20	60.0
		2644	117.99	31.16	70.38	80.0
		2343	94.19	30.29	55.56	100.0

Table A5 Tooth load sharing in Model 6

Model	Contact tooth pair	Node in body1	Contact force (kgf)	Position in body1		
				Radial distance (mm)	Whole depth (%)	Face width (%)
6	①	3145	65.28	33.49	70.36	0.0
		2812	167.51	32.59	55.55	20.0
		2501	150.03	32.59	55.55	40.0
		1834	122.20	31.59	39.23	60.0
		1561	112.36	31.59	39.23	80.0
	②	3312	144.31	35.30	100.0	60.0
		3011	116.83	34.40	85.18	80.0

Table A6 Tooth load sharing in Model 7

Model	Contact tooth pair	Node in body1	Contact force (kgf)	Position in body1		
				Radial distance (mm)	Whole depth (%)	Face width (%)
7	①	3145	136.69	19.91	70.37	0.0
		2812	234.24	19.01	55.55	20.0
		2501	436.86	19.01	55.55	40.0
		1834	427.70	17.93	37.89	60.0
		1561	0.331	17.93	37.89	80.0
	②	3312	116.12	21.72	100.0	60.0
		3008	147.08	21.72	100.0	80.0