

## 계수자극을 받는 유동체를 포함한 위성체의 자세 안정도 해석

강자영  
한국항공대학교

### ATTITUDE STABILITY OF A SPACECRAFT WITH SLOSH MASS SUBJECT TO PARAMETRIC EXCITATION

Ja-Young Kang

Hankuk Aviation University, Goyang, Gyeonggi-do, 412-791, Korea  
e-mail: jaykang@hau.ac.kr

(Received July 18, 2003; Accepted August 21, 2003)

#### 요 약

회전안정화 로켓 모터를 이용하는 upper stage 위성체의 자세 불안정 현상을 연구하였다. 이 위성체는 대칭형의 본체와 내장된 유동질량으로 구성되며, 유동질량은 구진자로 모델링되었다. 종래의 선형모델이 갖는 단점을 보완하기 위해 정확한 시변 비선형 방정식을 사용하고, 본체 및 구진자 모두 회전 대칭축에 대해 정상상태에 있다고 가정하였다. 본 논문에서는 진자에 대한 준정상해(quasi-stationary solution) 및 공진조건을 파라미터의 함수로 결정하였다. 공진조건 분석 결과 유동질량은 계수자극 및 외부자극을 동시에 받으며, 자극을 받은 유동질량으로부터 에너지가 본체에 유입되면서 위성체는 불안정한 장동운동을 일으키는 것으로 확인되었다. 본 논문에서는 수치시뮬레이션 예시를 통하여 주어진 위성체 모델에 대해 발생가능한 공진조건에서 진자의 운동, 위성체 각운동량 및 섭동모멘트의 관계 규명과 로켓모터 추진 후에 자세운동이 어떻게 변화하는가를 설명하였다.

#### ABSTRACT

The attitude motion of a spin-stabilized, upper-stage spacecraft is investigated based on a two-body model, consisting of a symmetric body, representing the spacecraft, and a spherical pendulum, representing the liquid slag pool entrapped in the aft section of the rocket motor. Exact time-varying nonlinear equations are derived and used to eliminate the drawbacks of conventional linear models. To study the stability of the spacecraft's attitude motion, both the spacecraft and pendulum are assumed to be in states of steady spin about the symmetry axis of the spacecraft and the coupled time-varying nonlinear equation of the pendulum is simplified. A quasi-stationary solution to that equation and approximate resonance conditions are determined in terms of the system parameters. The analysis shows that the pendulum is subject to a combination of parametric and external-type excitation by the main body and that energy from the excited pendulum is fed into the main body to develop the coning instability. In this paper, numerical examples are presented to explain the mechanism of the coning angle growth and how angular momenta and disturbance moments are generated.

*Keywords:* attitude, upper-stage, slag pool, resonance, parametric excitation

## 1. 서 론

일반적으로 회전안정화 위성의 초기 장동운동은 발사체로부터 분리될 때 압축스프링의 불균일한 복원력, 근/원지점 로켓 모터 분리 시에 발생하는 부적정한 반력, 추력벡터의 중심선 이탈 또는 주축(主軸) 이탈 등과 같은 원인으로 인한 비대칭 외력의 작용에 의하여 발생될 수 있다. 이들의 대부분은 설계과정 및 제작과정에서 최소화되거나 제거될 수 있지만, 위성이 운동을 하는 동안 강체형상을 유지하지 못할 경우, 예를들어 위성에 유연 구조물이나 탑재된 유동물질로 인한 섭동운동이 발생할 경우 위성의 장동운동은 증가되고, 위성체의 자세나 안테나 지향성에 문제점이 발생한다.

지금까지 내부에 유동물질을 탑재한 회전 운동체의 자세 불안정성에 대해 여러 가지 연구가 이루어져 왔지만 시스템의 구조적 복잡성 때문에 해석적인 연구는 별로 이루어지지 않았다. 특히 위성이 내부의 유동물질로 인한 섭동과 추력을 동시에 받을 경우 자세공진에 대한 해석적 연구는 소수에 불과하다.

Yam et al.(1997)은 대칭의 강체와 평면운동을 하는 진자로 구성된 위성시스템에 대한 선형안정도 해석을 하였다. 이들은 액체운동을 용수철에 매달린 진자가 위성체 대칭축에 대해 자유스럽게 평면 피봇운동을 하는 것으로 모델링하였다. 위성체가 정상상태의 회전운동을 하고 있을 때, 유동체의 중심이 전체 위성체의 무게중심 아래에 있고, 추력이 충분히 큰 경우에 위성의 장동운동은 커지고 공진에 이르게 된다는 결론을 제시하였다. 그러나 이들의 해석은 상수 파라미터를 가진 선형운동방정식을 이용하였기 때문에 시스템 파라미터들이 크게 변하는 실제 위성시스템의 동력학적 특성을 있는 그대로 예측하는 데에는 한계가 있었다.

Or(1992) 역시 Yam et al.(1997)의 모델과 유사한 시스템 모델을 이용하여 선형안정도 해석을 하였다. 이 연구에서 그는 유동체의 운동을 묘사하기 위해 한개의 구진자 모델과 2개의 평면진자 모델을 모두 시험해 보았는데, 진자의 모델이 실제의 파라미터 값을 갖는 범위내에서는 위성체의 자세가 불안정하지 않았고, 다만 진자의 길이가 비현실적으로 긴 경우에만 공진이 일어나는 것을 관찰하였다. 그러나 이 선형모델은 진자가 동력학적으로 항상 불안정한 수직 평형점에 있을 경우에 대해 유도된 것이기 때문에 회전안정화 상태에서 추진을 하는 위성의 일반적 자세운동 특성을 규명하는 데에는 문제가 있었다.

Meyer(1996)는 로켓모터에 갇힌 액화 slag를 종전의 깊이가 얇은 유체 또는 조석 이론(tidal theory)을 적용한 유체동력학적 모델로 가정하고 회전안정화 위성의 불안정성에 대한 분석연구를 수행하였다. 그는 이 연구에서 유동질량에 의해 발생하는 점성토크는 로켓모터가 작동되는 짧은 시간동안은 무시할 수 있다고 하였다.

본 연구에서는 Yam et al.(1997)과 Or(1992)의 선형모델의 결점을 보완하기 위해서 시스템을 시변 비선형 시스템으로 모델링하고, 불안정 평형점이 아닌 시스템의 정상상태에서 위성체와 유동체의 어떠한 조건이 시간의 경과와 더불어 시스템의 불안정 상태를 유발시키는지를 규명하기로 한다. 이를 위해 non-stationary 비선형시스템 해석에 적합한 multiple scales method를 이용하고, 도출된 조건과 주어진 시스템의 파라미터 값들이 과연 시스템의 불안정 상태를 일으키는지를 검증하기 위해 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하기로 한다.

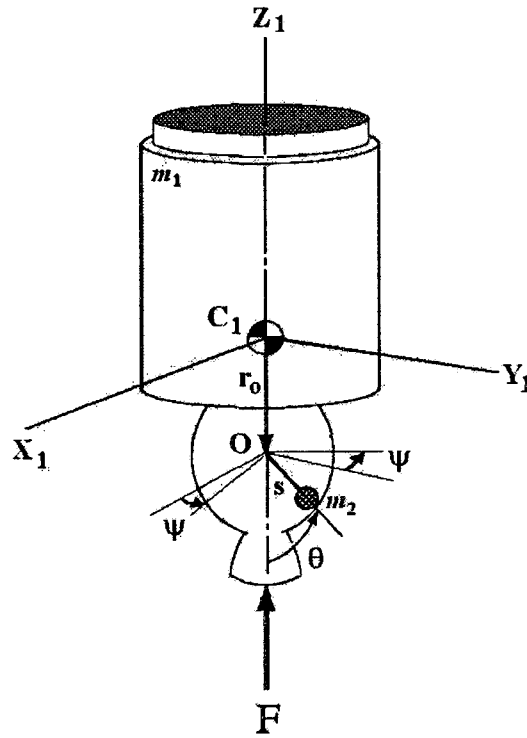


그림 1. 위성시스템 모델.

## 2. 시스템 모델

그림 1은 강체인 위성본체와 유동질량을 나타내는 구진자로 구성된 2체 시스템이다. 강체는 질량  $m_1$ , 관성모멘트  $I_1 = I_2 > I_3$ , 좌표  $x_1, y_1, z_1$ , 무게중심  $C_1$ 을 갖는다. 강체의  $O$ 지점에 연결된 진자의 무게는  $m_2$ 이고, 길이는  $s$ 이며, 그 상대운동은 변수  $\theta$ 와  $\Psi$ 로 정의된다. 무게중심  $C_1$ 에 대한 시스템 각운동량 방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}\omega + \frac{m_1 m_2}{M} \mathbf{r}_2 \times (\dot{\mathbf{r}}_2 + \omega \times \mathbf{r}_2) \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{I}$ 는 시스템 중심에 대한 inertia dyadic,  $M = m_1 + m_2$ ,  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{s}$ .  $C_{xyz}$  좌표계에서 성분을 취함으로써 각운동량을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}\omega + \mathbf{h} \quad (2)$$

여기서  $\mathbf{J} = m_1 \mu \tilde{\mathbf{r}}_2 \tilde{\mathbf{r}}_2$ ,  $\mathbf{h} = \mu m_1 \tilde{\mathbf{r}}_2 \dot{\mathbf{s}}$ ,  $\mu = m_2/M$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}_2$ 는 벡터 외적의 성분들을 구성하기 위해 사용된 반대칭 행렬 (skew symmetric matrix)이고,  $\mathbf{s} = s(-\sin \theta \sin \psi \sin \theta \cos \psi - \cos \theta)^T$ 이다. 운동방정식을 행렬 형태로 표시하면 다음과 같이 된다.

$$\dot{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{H} - \mathbf{h}) + \mathbf{T} \quad (3)$$

C점에 대한 외부토크는  $\mathbf{T}$ 는 다음식과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{T} = -\mu\bar{\mathbf{r}}_2\mathbf{F} \quad (4)$$

진자의 상대운동방정식은  $m_2$ 의 가속도와 이에 작용하는 외력을 같게 놓고, 양변에  $\mathbf{s}$ 를 곱함으로써 다음과 같이 구한다.

$$\mathbf{T}_o = m_1\mu s^2\bar{\mathbf{u}}_s \left\{ \ddot{\mathbf{u}}_s - \bar{\mathbf{u}}_r\dot{\omega} + 2\bar{\omega}\dot{\mathbf{u}}_s - \bar{\omega}\bar{\mathbf{u}}_r\omega + \frac{\mathbf{F}}{m_1s} \right\} \quad (5)$$

여기서  $\mathbf{u}_s = \mathbf{s}/s$ ,  $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_s + (\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ -r_o/s)^T$  이고,  $\mathbf{T}_o$ 는 O점에 대한 토크이다. 식 (5)에서  $\mathbf{H}$  대신에  $\omega$ 를 사용하였기 때문에 진자운동에 대해 풀기가 매우 어렵다. 그러나 다음과 같은 투영행렬을 이용하면 진자의 운동을 컴퓨터로 풀 수가 있다.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$\mathbf{B}$ 의 첫 번째 행은  $\theta$ 가 측정되는 평면에 수직인 단위벡터이고, 두 번째 행은 첫 번째 열에 수직인 단위벡터이다. 진자의 변수를 벡터  $\xi = [\theta \ \psi]^T$ 로 놓으면 유동질량의 방정식을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$(\mathbf{B}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)\ddot{\xi} = \mathbf{B}(\mathbf{G} - \mathbf{A}_1\dot{\mathbf{A}}_2\dot{\xi}) \quad (7)$$

여기서,  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{A}_2$ , 그리고  $\mathbf{G}$ 는 각각

$$\mathbf{A}_1 = \bar{\mathbf{u}}_s(\mathbf{E} + \mu m_1 s^2 \bar{\mathbf{u}}_r \mathbf{J}^{-1} \bar{\mathbf{u}}_r),$$

$$\mathbf{E} = 3 \times 3 \text{ identity matrix,}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -\cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \cos \psi & -\sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \bar{\mathbf{u}}_s [\bar{\mathbf{u}}_r \mathbf{J}^{-1} \bar{\mathbf{H}} + (2\mathbf{E} + \mu m_1 s^2 \bar{\mathbf{u}}_r \mathbf{J}^{-1} \bar{\mathbf{u}}_r) \mathbf{A}_2 \xi + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{H} - \mathbf{h})\bar{\mathbf{u}}_r] \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{H} - \mathbf{h}) - \bar{\mathbf{u}}_s \left( \mu s \bar{\mathbf{u}}_r \mathbf{J}^{-1} \bar{\mathbf{u}}_r + \frac{\mathbf{E}}{m_1 s} \right) \mathbf{F} + \mathbf{T}_o / \mu m_1 s^2$$

이다.

### 3. 유동체의 운동 해석

#### 3.1 정상해

자세운동에 영향을 미치는 주된 원인이 유동질량 때문인 것으로 생각되기 때문에 수치적 방법이 나 또는 해석적 방법으로 진자의 안정도를 시험할 수 있을 것이다. 수치적 방법을 이용하는 경우 먼저 진자의 정상해를 구하고, 그 정상점(stationary point) 또는 정상점 부근에서 원래의 비선형 방정식을 이용하여 시스템 안정도를 확인하기 위한 수치적 계산을 할 수 있을 것이다. 해석적 방법을 사용하기 위해 파라미터의 영역에서 안정-불안정의 조건을 구하거나 detuning parameter를 이용하여 공진근방의 해를 구할 수도 있다.

로켓모터가 작동되는 동안 진자의 운동은 추력에 의한 축방향의 가속도, 위성 본체의 회전으로 인해 발생하는 원심력 및 진자의 팔에 수직으로 작용하는 법선력에 의해 균형을 이루게 되면서, 진자는 어떤 동적 평형점을 갖게 된다. 그러나 본 시스템의 운동방정식은 변수들이 매우 복잡하게 결합된 시변 비선형 방정식이기 때문에 더 이상의 가정없이 주어진 전체 방정식에 대한 선형해 또는 비선형해를 구할 방법이 없다. 이러한 어려움은 회전하는 추진체의 동력학과 구진자의 운동이 상호 결부된 데서 비롯된 것이다. 만일 진자 운동방정식을 어느 정도 단순화시켜서 이에 대한 해를 먼저 구하고 시스템 전체 해를 구한다면 문제가 풀릴 수도 있을 것이다. 이렇게 하기 위해, 위성과 진자가 위성의 대칭축에 대해 준정상 상태의 회전운동을 한다고 가정한다. 그리고 편리를 위해 다음과 같이 새로운 변수를 도입한다(Cochran 1977).

$$H_1 = a \sin \Phi, \quad H_2 = a \cos \Phi, \quad w = \psi + \Phi \quad (8)$$

식(8)을 식(3)과 (5)에 대입하고, 위의 가정을 이용하면 다음과 같은 근사방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & \left( P^2 \cos \theta - \frac{F_3}{m_1 s} \right) \sin \theta + \left[ \frac{a H_3}{I_1^2} \left( 1 + \frac{r_o}{s} \cos \theta \right) - \frac{2aP}{I_1} \sin^2 \theta \right] \cos w \\ & + \frac{1}{\mu m_1 s^2} (T_{o1} \cos \psi + T_{o2} \sin \psi) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $P = (\dot{\psi} + H_3/I_3)$ .

로켓점화 초기 또는 공진이 일어나기 이전에는 횡방향 각운동량의 크기  $a$ 의 값은 상대적으로 작기 때문에  $\theta$ 에 대한 정상해는 다음과 같이 얻어진다.

$$\theta_s = \cos^{-1} \frac{F_3}{m_1 s P^2} \left[ 1 - \varepsilon \left( 1 + \frac{F_3}{m_1 s P^2} \frac{r_o}{s} \right) + \varepsilon^2 \frac{F_3}{m_1 s P^2} \frac{r_o}{s} \Lambda \right] \quad (10)$$

여기서  $\varepsilon = \mu m_1 s^2 / I_1$ 이고, 유동질량의 마찰 토크는 로켓모터가 작동되는 짧은 시간 동안에는 영향이 작기 때문에 무시되었다(Meyer 1996). 식(10)에서 보듯이  $\theta$ 의 평형점은 축방향 가속도 및 원심 가속도에 의해 결정된다. 로켓추진 위성은 전형적인 시변, 비정상, 비선형 시스템이기 때문에 이러한 시스템에 연결된 진자는 항상 하나의 평형점에 머물지 않으며, 시간이 많이 경과하면 그 정상점은 불안정 평형점으로 변할 수 있기 때문에 본 논문에서의 정상점(stationary point)은 엄격히 따지면 준정상점(QSP: quasi-stationary point)을 의미한다.

### 3.2 유동체의 공진 조건

QSP로부터의 변화량을  $\vartheta(t)$ 로 놓고, 식(9)를 정상점  $\theta_s$ 에 대해 전개하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta} \approx & - \left( \frac{F_3}{m_1 s} \cos \theta_s - P^2 \cos 2\theta_s + B_1 a \cos w \right) \vartheta + B_2 a \cos w + h.o.t \\ = & -\omega_o^2 \left( 1 + \frac{B_1}{\omega_o^2} a \cos w \right) \vartheta + B_2 a \cos w + h.o.t \end{aligned} \quad (11)$$

여기서  $h.o.t$ 는  $\vartheta$ 의 고차항이고,  $B_1, B_2, \omega_o^2$ 는 각각

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{H_3 r_o \sin \theta_s}{I_1^2 s} + \frac{2P \sin 2\theta_s}{I_1} \\ B_2 &= \frac{H_3 r_o \cos \theta_s}{I_1^2 s} + \frac{P(\cos 2\theta_s - 1)}{I_1} + \frac{H_3}{I_1^2} \\ \omega_o^2 &= P^2 \sin^2 \theta_s \end{aligned} \quad (12)$$

이다. 공진이 일어나지 않을 경우  $B_1a$  및  $B_2a$ 는  $a$ 에 비해 훨씬 작은 값을 갖는다. 식 (11)에서 관찰할 수 있듯이 진자는 계수자극과 외부형 자극을 모두 받는다. 식(13)과 같이 파라미터들을 정의하면 식(11)은 식(14)와 같이 외력을 받는 Mathieu 식과 유사한 형태가 된다.

$$\begin{aligned} w &= \Omega t + w_o, \quad t = (2/\Omega)\tau, \quad \delta = 4\omega_o^2/\Omega^2, \\ \alpha_1 &= 2c_1 a \cos w_o / (m_1 \mu s^2 \Omega^2), \quad \alpha_2 = -2c_1 a \cos w_o / (m_1 \mu s^2 \Omega^2), \\ k_1 &= 4c_2 a \cos w_o / (m_1 \mu s^2 \Omega^2), \quad k_2 = -4c_2 a \sin w_o / (m_1 \mu s^2 \Omega^2) \end{aligned} \quad (13)$$

그러면, 식(11)은

$$\vartheta'' + (\delta + 2\varepsilon\alpha_1 \cos 2\tau + 2\varepsilon\alpha_2 \sin 2\tau)\vartheta = \varepsilon(k_1 \cos 2\tau + k_2 \sin 2\tau) \quad (14)$$

여기서 (")은  $\frac{d^2}{d\tau^2}$ 을 의미한다. 식(14)의 공진조건을 찾기 위해 multiple time scales 방법(Nayfeh & Mook 1979)을 사용한다.

$$T_n = \varepsilon^n \tau \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

$$\vartheta(\tau; \varepsilon) = \vartheta_o(T_o, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon\vartheta_1(T_o, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2\vartheta_2(T_o, T_1, T_2, \dots) + \dots \quad (16)$$

편리를 위해 다음과 같이 놓고

$$\frac{\partial}{\partial T_o} = D_o, \quad \frac{\partial}{\partial T_1} = D_1, \quad \frac{\partial}{\partial T_2} = D_2, \dots, \frac{\partial}{\partial T_i} = D_i \dots \quad (17)$$

$\varepsilon^2$ 의 차수까지 전개하여  $\varepsilon$ 의 동차항끼리 등치시키면 다음과 같은 방정식들을 얻는다.

$$D_o^2 \vartheta_o + \delta \vartheta_o = 0 \quad (18)$$

$$D_o^2 \vartheta_1 + \delta \vartheta_1 = -2D_o D_1 \vartheta_o - 2\alpha_1 \vartheta_o \cos 2T_o - 2\alpha_2 \vartheta_o \sin 2T_o + k_1 \cos 2T_o + k_2 \sin 2T_o \quad (19)$$

$$D_o^2 \vartheta_2 + \delta \vartheta_2 = -2D_o D_2 \vartheta_o - D_1^2 \vartheta_o - 2D_o D_1 \vartheta_1 - 2\alpha_1 \vartheta_1 \cos 2T_o - 2\alpha_2 \vartheta_1 \sin 2T_o \quad (20)$$

식(18)의 일반해는 다음과 같이 놓는다.

$$\vartheta_o = A(T_1, T_2) e^{i\beta T_o} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-i\beta T_o} \quad (21)$$

여기서,  $\beta = \delta^{1/2}$ ,  $\bar{A}$ 는  $A$ 의 공액복소수. 그러면, 식(19)는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} D_o^2 \vartheta_1 + \beta^2 \vartheta_1 &= -2i\beta D_1 A e^{i\beta T_o} - (\alpha_1 - i\alpha_2) A e^{i(2+\beta)T_o} \\ &\quad - (\alpha_1 - i\alpha_2) \bar{A} e^{i(2-\beta)T_o} + \frac{1}{2}(k_1 - ik_2) e^{i2T_o} + C.C. \end{aligned} \quad (22)$$

공진근방에서의 운동의 행태를 관찰하기 위해 다음과 같이 detuning parameter  $\sigma$ 를 도입한다.

$$\beta_e = \beta + \varepsilon\sigma \quad (23)$$

여기서,  $\beta_e$ 는 외부 자극 주파수(external excitation frequency)이다. 식(22)의 특수해를 고찰함으로써  $\beta = .4, 2, 1, 1/2, 1/4, \dots, 0$ 이 공진조건임을 알 수 있다. 본 논문에서는 실제 위상데이터를 적용했을 때 발생이 가능한 1개의 공진조건, 즉  $\beta = 2$ 에 대해서만 관찰해 보기로 한다.

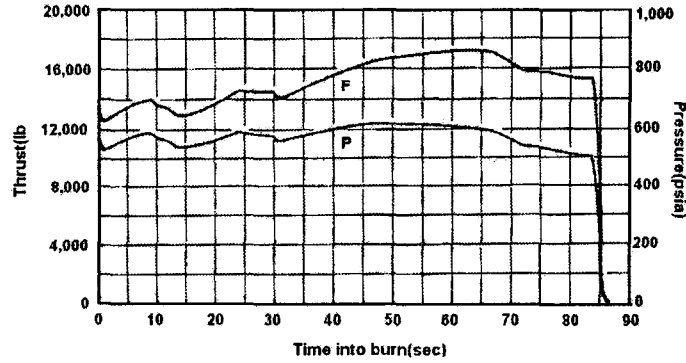


그림 2. Star 48 로켓 모터 추력 곡선.

### 4. 시스템 운동 해석

#### 4.1 수치 모델 및 컴퓨터 시뮬레이션

시뮬레이션을 위한 시스템 모델의 기본 파라미터들의 값은 다음과 같이 설정한다.

$$m_1(0) = 4,300 \text{ lb}, m_1(30) = 2,700 \text{ lb}, m_2(0) = 10 \text{ lb}, m_2(30) = 30 \text{ lb}, a(0) = 20 \text{ slug ft}^2/\text{sec},$$

$$r_o = 3.4 \text{ ft}, s = 2 \text{ ft}, I_1(0) = I_2(0) = 1,350 \text{ slug ft}^2, I_1(30) + I_2(30) = 700 \text{ slug ft}^2,$$

$$I_3(0) = 460 \text{ slug ft}^2, I_3(30) = 330 \text{ slug ft}^2, \omega_3(0) = 52.4 \text{ rpm}$$

이 데이터들은 STAR 48 로켓모터를 이용하는 WESTAR IV를 참조한 것이며, STAR 48 모터의 추력  $F$ 의 프로파일이 그림 2와 같기 때문에 로켓모터가 작동하는 동안 추력의 크기는 평균 16,000 lbf로서 항상 일정하다고 가정하였다. 또한, 시뮬레이션의 편이를 위해 로켓모터의 작동시간을 약 1/3로 단축시켰기 때문에 파라미터 값들의 변화도 같은 비례로 축약했으며, 질량특성의 변화는 선형적 변화를 갖는다고 가정했다. 시스템의 무게중심과 관계가 있는  $r_o$ 의 값은 로켓모터가 사실상 위성체 core에 submerged된 상태이기 때문에 전체질량이 감소해도 거의 변화가 없기 때문에 상수로 처리했다.

그림 3은 식(10)과 주어진 데이터를 이용하여 작도한 QSP 곡선이다. 점선으로 표시된 QSP 궤적들은 추력이 각각 10,000 lbf와 13,000 lbf일 때의  $\theta_s - \dot{\psi}$  선도로서, 다른 파라미터들이 일정할 때 추력크기에 따른  $\theta_s - \dot{\psi}$ 의 변화를 비교하기 위해 예시한 것이다. 식(10)으로부터도 알 수 있는 바와 같이 추력이 작아짐에 따라 유동체의 QSP는 위성체의 원주방향 쪽으로 편위된다. 일반적으로, 회전안정화 방법은 로켓추진 비행체가 일정한 자이로 강성도를 유지하도록 하기 위해서 이용되는 것이지만 유동물질이 탑재된 위성체의 경우에는 중축에 대한 회전속도의 증가는 유동질량을 원주방향으로 변위시키려는 경향이 있기 때문에 회전속도와 추력의 비를 신중하게 결정할 필요가 있다. 본 연구에서는 추력이 16,000lbf일 때에 한해서 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하기로 한다. 주어진 위성 모델의 파라미터 값들의 범위에서 일어날 수 있는 공진조건은  $\beta = 2$ 이다. 따라서, 이 조건을 만족시키는 QSP는  $\theta_s = 55^\circ, \dot{\psi} = 4.72$ 이다. 이 점은 그림 3에 A점으로 표시되어 있다. 불안정 QSP A 근방에서 컴퓨터 시뮬레이션을 수행한 결과  $50.40^\circ < \theta_s < 58.43^\circ$  및  $4.2 < \dot{\psi} < 5.2 \text{ rad/sec}$ 의 범위에 걸쳐 불

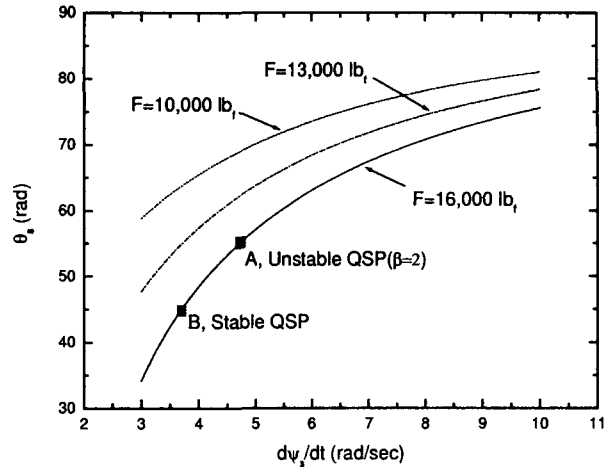


그림 3. 추력에 따른 QSP 궤적 변화.

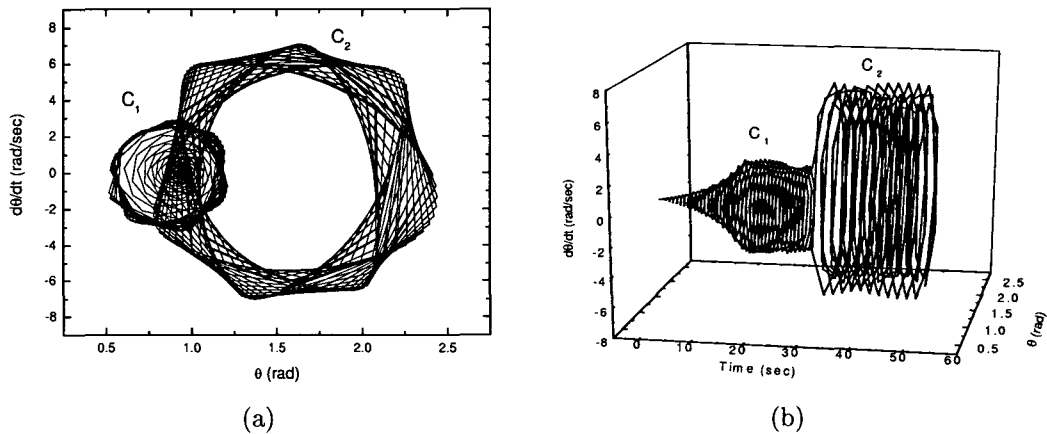


그림 4. (a) QSP A에서의  $(\theta - \dot{\theta})$  phase 선도. (b) QSP A에서  $(\theta - \dot{\theta})$  phase의 시간변화.

안정 QSP가 분포되어 있는 것으로 관찰되었다. 이 범위내에서 위성체의 피치 및 요각은  $17 \sim 35^\circ$ 까지 증가하였다. 불안정 QSP에서의 위성 운동과 안정 QSP에서의 위성운동을 비교하기 위해 A점으로부터 훨씬 떨어져 있는 안정 QSP인 B점을 취하고 양 QSP에서 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다. 본 연구에서 컴퓨터 시뮬레이션을 위해 Visual Fortran 6.0이 사용되었다.

#### 4.2 시뮬레이션 결과 토의

그림 4 ~ 6은 불안정 QSP인 A점에서의 진자운동, 위성체의 각운동량 및 섭동모멘트를 도시한 것이고, 그림 7 ~ 9는 각각 안정 QSP인 B에서의 진자운동, 위성체의 각운동량 및 섭동모멘트를 도시한 것이다.

그림 4(a)는 A점에서 진자운동에 대한 2차원 phase 다이어그램이고, 그림 4(b)는 그림 4(a)의 phase를 시간변화에 따라 상세하게 작도한 것이다. 이들 그림에서 보는 바와 같이 진자의 운동은 2개



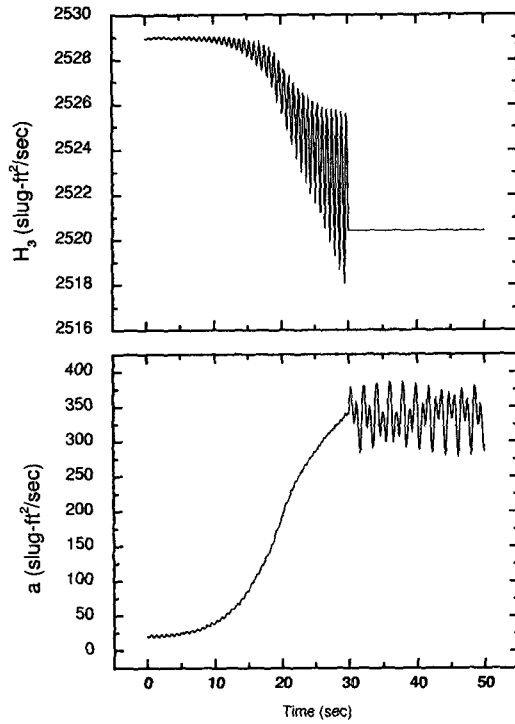


그림 5. QSP A에서의 횡방향 및 Roll 방향의 각운동량 변화.

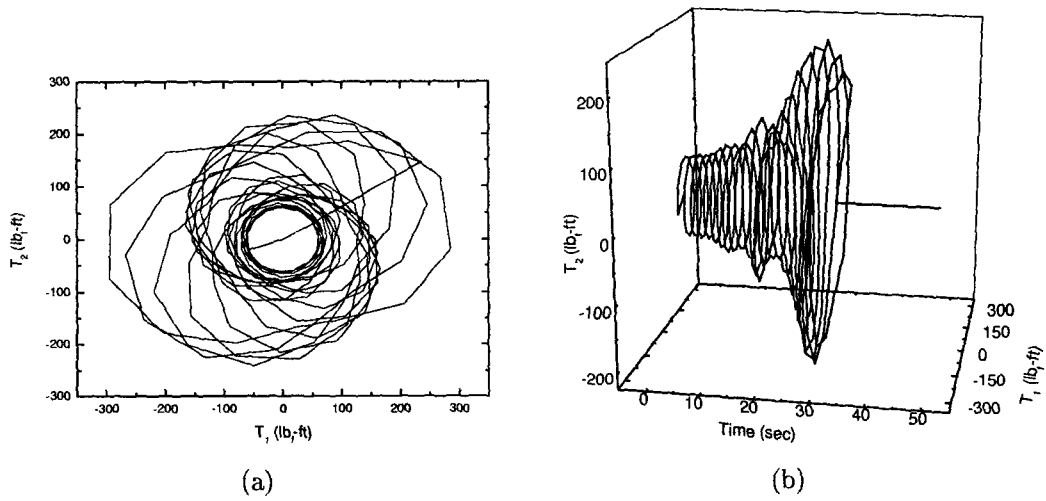


그림 6. (a) QSP A에서의 Pitch-Yaw Torque phase 선도. (b) QSP A에서 Pitch-Yaw Torque phase의 시간변화.

의 Limit Cycle로 이루어진다. 로켓모터가 작동되는 동안 진자의 운동은 첫번째 Limit Cycle  $C_1$ 으로 유인되었다가, burnout 이후에는 또 다른 Limit Cycle  $C_2$ 로 이동된다. 이는 유동체가 로켓모터가 작동되는 동안 에너지를  $C_1$  수준으로 높였다가 다시 로켓 모터의 작동 종료로 인하여  $C_2$  수준으로

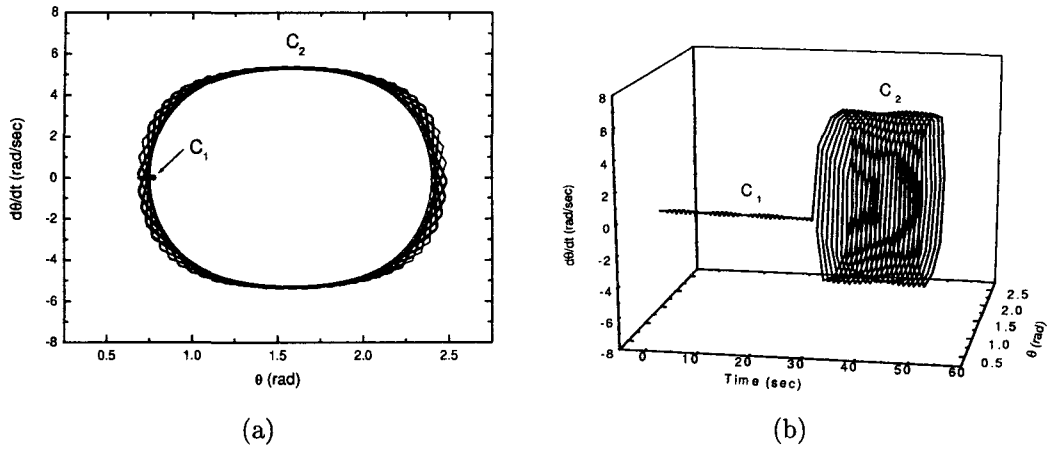


그림 7. (a) QSP B에서의  $(\theta - \dot{\theta})$  phase 선도. (b) QSP B에서  $(\theta - \dot{\theta})$  phase의 시간변화.

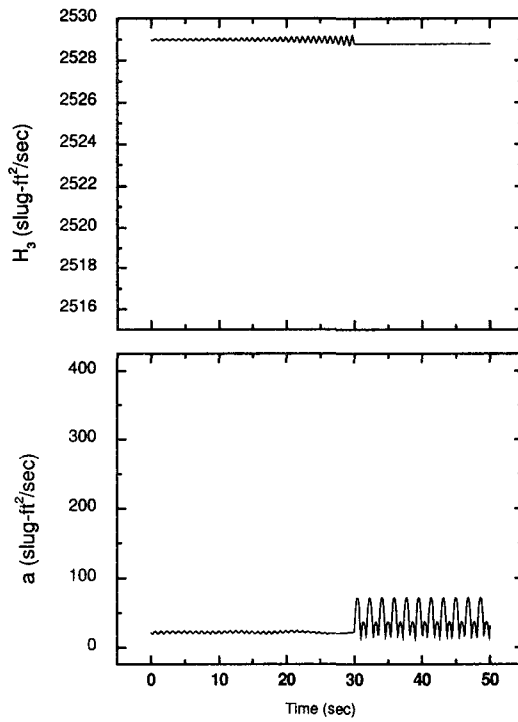


그림 8. QSP B에서의 횡방향 및 Roll 방향의 각운동량 변화.

로 변화하는 것을 의미한다.  $C_1$  영역에 있을 때 위성체의 피치 및 요 각속도(0.7Hz)는 진자운동 주파수(1.4Hz)의 절반 값으로 동조되고,  $C_2$  영역에 있을 때 진자의 주파수는 1.6Hz로 높아지는 반면 피치 및 요 각속도는 오히려 0.65Hz로 낮아진다.

그림 5는 A점에서의 위성체의 횡방향 각운동량  $a$ 와 롤방향 각운동량  $H_3$ 가 시간에 따라 변화하

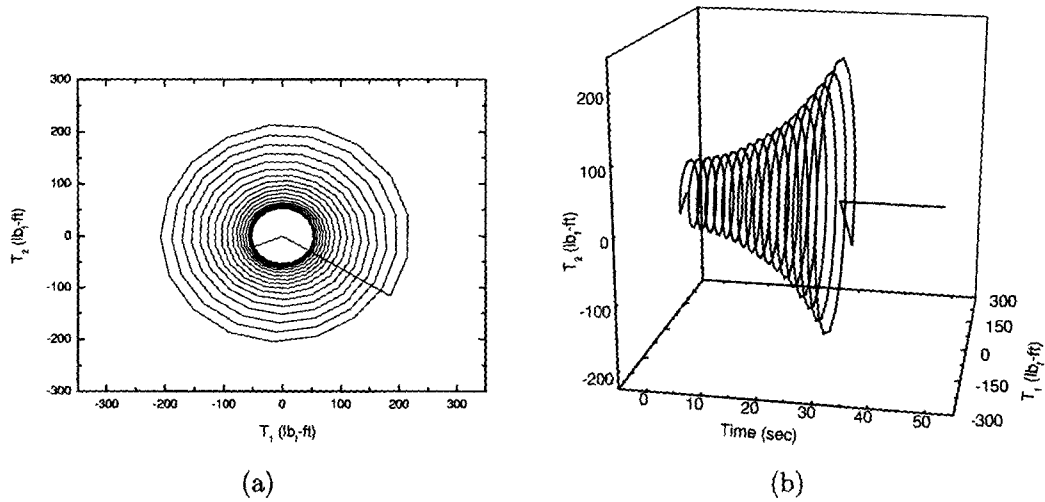


그림 9. (a) QSP B에서의 Pitch/Yaw Torque phase 선도. (b) QSP B에서 Pitch/Yaw Torque phase의 시간변화.

는 모습을 보여주고 있다. 로켓모터가 작동되는 동안 롤방향 각운동량이  $2,520 \text{ slug-ft}^2/\text{sec}$ 로 다소 감소되지만 횡방향 각운동량이  $366 \text{ slug-ft}^2/\text{sec}$ 로 상당량 증가하여, 결과적으로 위성체의 전체 각운동량은  $2,547 \text{ slug-ft}^2/\text{sec}$ 로 증가하게 된다. 이로서 위성체의 자세운동이 불안정해짐을 알 수 있다. 이는 진자가  $C_1$  영역에서 있는 동안 진자의 운동에너지가 위성 본체에 계속 유입되면서 전체 에너지가 증가하는 것으로 해석된다.

그림 6은 로켓모터가 작동되는 동안 진자의 변위 및 추력에 의하여 발생하는 피치 및 롤 방향 토크의 phase 다이어그램이다. 90도의 위상차를 갖는 피치 및 요 토크의 phase 궤적은 phase plane의 원점을 중심으로 비대칭적으로 계속 증가하다가 로켓 모터의 작동 종료 시점에서 다시 원점으로 복귀한다. 그림에서 관찰할 수 있듯이 피치 및 롤 토크의 시간 변화량은 매우 불규칙한데, 이는 토크의 변화량이 위성체 무게중심에 대한 진자의 상대적인 위치에 직접 비례하기 때문이다. 즉, 진자의 운동이 그림 4(a)의 Limit Cycle  $C_1$  처럼 불안정한 원궤적을 따라 진행되기 때문에 섭동토크도 이에 의해 영향을 받는다.

그림 7은 B점에서의 진자의 운동을 나타내는 phase 다이어그램이다. 그림 7(a)에 도시된 것처럼 로켓모터가 작동하는 동안에는 진자의 phase는 점 상태로  $C_1$  영역에 머물러 있다가 로켓모터의 작동이 종료된 후에는  $C_2$  영역으로 옮겨가 하나의 Limit Cycle을 형성한다. 그림 7(b)는 진자의 phase 변화를 시간에 따라 작도한 것이다. B점에서 진자의 운동은 A점에서와 달리 매우 안정적인 것을 알 수 있다.

그림 8은 B점에서의 위성체의 횡방향 각운동량  $a$ 와 롤방향 각운동량  $H_3$ 의 시간 응답곡선을 나타내고 있다. 그림 5와 비교하여 전체 각운동량의 변화가 아주 작기 때문에 B점에서 위성체의 자세운동이 매우 안정되어 있음을 알 수 있다.

그림 9는 B점에서 진자의 변위 및 추력에 의하여 발생하는 피치 및 롤 방향 토크의 phase 다이어그램이다. 피치 및 요 토크의 phase 궤적은 phase plane의 원점에 대해 대칭을 이루며 나선형으

로 증가하다가 로켓 모터의 연소 종료시점에서 다시 원점으로 돌아간다. A점과 비교했을 때 B점에서의 피치 및 롤 토오크의 변화는 steady하게 증가함을 알 수 있다. 이는 진자의 운동이 B점 근처에 머물러 있기 때문이다. 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 로켓모터가 작동되는 동안 피치 및 요 각속도는 섭동토오크의 주파수(0.5Hz)와 동조됨을 관찰하였다.

#### 4. 결 론

로켓모터를 사용하는 회전체(위성체)와 이에 내장된 유동질량이 회전체의 대칭축에 대해 정상회전을 한다고 가정하고, 이에 multiple time scale 방법을 사용하여 진자로 가정한 유동체 운동의 정상해와 공진조건을 구하였다. 공진조건은 진자가 회전체로부터 받는 계수자극 주파수가 진자의 고유주파수의 2배가 될 때 발생하였다. 공진조건과 정상해를 이용하여 불안정 정상점을 구하고, 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 진자 및 위성체의 불안정 자세운동의 특성을 관찰하였다. 본 연구를 통하여 얻은 결론을 요약하면 다음과 같다.

1) Upper Stage 위성에서 발생한 자세운동의 불안정현상은 위성 내부에 탑재된 유동질량이 위성체로부터 계수 자극 및 외부 자극 형태의 자극을 받아 진폭이 증가됨으로써 위성체의 횡방향 각운동량이 상당히 증가되고, 이것이 위성의 전체 자세운동을 불안정하게 만드는 원인이 된다.

2) 위성의 롤 회전으로 인한 유동체의 편위와 로켓모터의 추력에 의해 발생하는 횡방향 섭동 토오크는 진자가 정상점 위치에 관계없이 발생하는데, 불안정 정상점에서는 공진을 일으키지만 안정 QSP에서는 공진을 일으키지 않는다. 시뮬레이션 결과, 불안정 정상점에서는 피치 및 요 각속도가 섭동토오크의 주파수와 동조되지 않고, 안정 정상점에서는 피치 및 요 각속도가 섭동토오크의 주파수로 동조되기 때문인 것으로 확인되었다.

3) 유동물질을 탑재한 회전안정화 추진 비행체에서는 slosh baffle을 설치하여 유동으로 인한 에너지 발생을 최소화하여 위성체의 자세가 불안정해지는 것을 최소화할 필요가 있다.

4) 회전안정화 기법은 추진 위성체의 자이로 강성도를 증가시키기 위해 사용하는 것이지만 유동물질을 탑재한 위성에 있어서는 원심력에 의해 유동물질이 위성체 원주방향으로 편위되어 자세불안정을 일으키는 요인이 되므로 원심력과 추력의 비를 설계 파라미터로 설정하여 반영하는 것이 필요하다.

#### 참고문헌

- Cochran, J. E., Jr. 1977, *Journal of Spacecraft and Rockets*, 14-9, 562  
 Meyer, R. X. 1996, *Journal of Spacecraft and Rockets*, 33-6, 781  
 Nayfeh, A. H. & Mook, D. T. 1979, *Nonlinear Oscillations* (New York: John Wiley & Sons), pp.56-59  
 Or, A. C. 1992, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 15, 297  
 Yam, Y., Mingori, D. L., & Halsmer, D. M. 1997, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 20, 306