

# 구동 점탄성 벨트의 비선형진동

## Nonlinear Vibration of Running Viscoelastic Belts

우 영 주\* · 최 연 선†

Young Joo Woo and Yeon Sun Choi

(2003년 3월 27일 접수 : 2003년 10월 26일 심사완료)

**Key Words** : Nonlinear Vibration(비선형 진동), Beat(맥놀이), Viscoelastic Belt(점탄성 벨트), Jump Phenomenon(도약현상), Chaotic Beat(혼돈 맥놀이)

### ABSTRACT

The nonlinear vibration of moving viscoelastic belts excited by the eccentricity of pulleys is investigated through experimental and analytical methods. Laboratory measurements demonstrate the nonlinearities in the responses of the belt particularly in the resonance region and with the variation of tension. The measurements of the belt motion are made using noncontact laser sensors. Jump and hysteresis phenomenon are observed experimentally and were studied with a model, which considers the nonlinear relation of belt stretch. An ordinary differential equation is derived as a working form of the belt equation of motion. Numerical results show good agreements with the experimental observations, which demonstrates the nonlinearity of viscoelastic moving belts.

### 1. 서 론

벨트는 기계에서 동력전달용으로 널리 사용되는 기계부품의 하나이다. 벨트는 기어와는 달리 대용량의 동력을 전달할 수는 없어도 두 축 사이의 거리가 긴 경우 동력 전달에 유용하다. 또한 기어에 비해 발생하는 진동과 소음이 적어 자동차 엔진을 비롯하여 산업용 기계에 널리 쓰이고 있으며, 최근 복사기, 프린터 등 정밀기계에도 다양하게 사용되고 있다. 벨트 진동은 대부분 풀리의 편심과 정렬불량이 원인이며, 장력과 이동속도에 따라 공진, 불안정성과 더불어 비선형 진동특성을 나타낸다.

Zu<sup>(1)</sup>와 Wickert<sup>(2)</sup>는 벨트를 움직이는 현(string)

으로 모델링하여 비선형 편미분방정식을 유도하고, 섭동법(perturbation method)으로 공진영역에서의 도약현상을 연구하였다. 이승엽<sup>(3)</sup>은 현의 중심에 스프링, 질량, 댐퍼 장치를 설치하고, 움직이는 현의 연성에 의한 에너지 전달과 모드 위치 측정에 관한 연구를 하였다. Rahn<sup>(4)</sup>은 벨트의 진동을 저감하기 위해 모터를 이용하여 벨트의 속도와 장력을 제어하는 연구를 하였다.

본 연구에서는 벨트의 설계 및 운전조건 변화에 따른 구동 점탄성 벨트의 비선형 진동 특성을 보고자 하였다. 먼저 점탄성(viscoelastic)재료로 구성된 평벨트를 사용하여 실험용 벨트구동계를 제작하고, 레이저 센서를 이용하여 벨트의 횡진동을 측정하였다. 벨트의 동특성은 기존의 편미분방정식을 조화함수를 이용, 비선형 상미분운동방정식으로 유도하고, 장력과 속도 변화에 따른 해를 수치해석으로 구하고, 실험결과와 비교, 분석하였다.

† 책임저자, 정회원, 성균관대학교 기계공학과  
E-mail : yschoi@yurim.skku.ac.kr  
Tel : (031) 290-7440, Fax : (031) 290-5849

\* 정회원, 성균관대학교 대학원 기계공학과

## 2. 편심에 의한 벨트진동

길이 방향으로 이동하는 벨트구동 시스템을 움직이는 현(string)으로 모델링하여  $x=0, l$  에서 풀리와 접촉하며, 비선형 점탄성 특성과 풀리의 편심에 의한 가진력을 고려한 운동방정식은 식 (1)과 같다.<sup>(5)</sup>

$$\left(\frac{T}{A} + \sigma\right) w_{xx} + w_x \sigma_x + \frac{F(x, t)}{A} = \rho \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (1)$$

여기서  $T, A, w, v$  각각은 벨트의 장력, 단면적, 상하 변위,  $x$  방향 이동속도이다. 또한  $\sigma, \rho, w_x, w_{xx}$  각각은 섭동응력, 밀도, 속도, 가속도이다.  $F$ 는 풀리의 편심에 의한 조화가진력으로서 식 (2)와 같다.<sup>(1)</sup>

$$F(x, t) = (x - 2i r_1) e_1 \Omega^2 e^{i\omega t} + c.c \quad (2)$$

여기서  $r_1, e_1$ 은 각각 구동축 풀리반경과 편심량이고,  $\Omega$ 은 회전주파수이고  $c.c$ 는 공액복소수(complex conjugate)를 의미한다. 벨트의 점탄성과 횡변위 관계는 식 (3)의 응력-변형도 관계를 가진다.

$$\sigma = E^* \frac{1}{2} w_x^2 \quad (3)$$

여기서

$$E^* = \left( E_e + E_v \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \frac{T}{A} \quad (4)$$

여기서  $E_e$ 는 벨트의 탄성 스프링계수이고,  $E_v$ 는 감쇠계수이다. 무차원 변수(nondimensional variable)를 식 (5)와 같이 정의하고, 이를 이용하여 식 (1)을 정리하면, 식 (6)과 같이 무차원 편미분방정식을 유도할 수 있다.

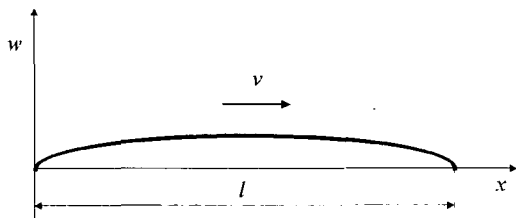


Fig. 1 A model of an axially moving viscoelastic string system

$$W = \frac{w}{l}, \xi = \frac{x}{l}, \tau = t \left( \frac{T}{\rho A l^2} \right)^{1/2}, r = v \left( \frac{\rho A}{T} \right)^{1/2} \quad (5)$$

$$M W_{\tau\tau} + G W_{\tau} + K W = N(W) + f(x, t) \quad (6)$$

이 식에서 질량  $M$ , 코리올리(coriolis) 가속도  $G$ , 강성  $K$ , 가진력  $f(x, t)$ 는 각각 식 (7)과 같다.

$$M = I, G = 2r \frac{\partial}{\partial \xi}, K = (r^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, f(x, t) = \frac{F(x, t)l}{T} \quad (7)$$

벨트의 비선형 특성인  $N(W)$ 는 다음 식 (8)과 같다.

$$N(W) = \frac{3}{2} E_e W_{\xi}^2 W_{\xi\xi} + E_v \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{2} W_{\xi}^2 \right)_{\xi\xi} + W_{\xi} E_v \frac{\partial}{\partial \tau} (W_{\xi} W_{\xi\xi}) \quad (8)$$

식 (7)을 식 (9)와 같이 변수분리법을 이용하여 아래와 같이 해를 가정한다.

$$W(\xi, \tau) = p(\xi)q(\tau) \quad (9)$$

식 (9)를 식 (8)에 대입하고 정리하면 식 (10)과 같다.

$$I p(\xi) \ddot{q}(\tau) + 2r \dot{p}(\xi) \dot{q}(\tau) + (r^2 - 1) p(\xi) q(\tau) = f(\xi, \tau) + \frac{3}{2} E_e \dot{p}^2(\xi) p(\xi) q^3(\tau) + \frac{7}{2} E_v \dot{p}^2(\xi) p(\xi) q^2(\tau) \dot{q}(\tau) \quad (10)$$

벨트를 양단고정현으로 보면 sine함수형태의 모드 형상을 갖게 되므로 아래와 같이 벨트의 모드를 대입하면 식 (11)과 같이 sine함수로 가정하여, 식 (10)에  $n$ 개의 상미분방정식을 유도할 수 있다.

$$\text{즉, } p(\xi) = \sin \frac{n\pi\xi}{l} \quad n = 1, 2, 3, \quad (11)$$

식 (11)을 식 (10)에 대입하고, 양변에  $p(\xi)$ 를 곱한 후 벨트의 전 길이에 대해 적분하면 식 (12)와 같은 상미분방정식을 유도할 수 있다.

$$\ddot{q}(\tau) + E_v A q^2(\tau) \dot{q}(\tau) + B q(\tau) + E_e C q^3(\tau) = D f(\tau) \quad (12)$$

$$A = \frac{3}{4I} \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4, \quad B = \frac{(\gamma^2 - 1)}{I} \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2$$

여기서  $C = \frac{3}{8I} \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4, \quad D = \frac{4}{I\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

### 3. 벨트진동 실험

#### 3.1 실험장치

벨트 장력 및 속도 변화에 따른 구동벨트의 비선형 동특성을 실험적으로 확인하기 위하여 Fig. 2와 같이 두 개의 풀리에 벨트를 연결하여 벨트구동 실험장치를 제작하였다. 본 연구에 사용된 벨트는 점탄성 특성의 평벨트를 사용하였고, 재료상수와 규격은 Table 1과 같다.

Fig. 3은 Fig 2의 실험장치에 대한 도식도로서 좌측은 모터 축에 풀리를 연결하고, 우측에는 베어링을 넣은 아이들러 풀리(idler pulley)를 설치하여 벨트 장력을 조절할 수 있게 하였다. 시계방향으로 회전하는 모터에 의해 벨트구동 장치의 하단 벨트는 긴장되고, 상단은 이완되게 하였다. 풀리의 직경은 좌, 우가 같은 5 cm이다. 모터는 정격 1000 rpm, 4.2 kgcm 토크량을 가지는 DC servo모터를 사용하였다.

모터구동용 파워앰프(power amplifier)를 통하여 모터 속도를 증가 혹은 감소시켜 벨트 속도를 변화시켰다. 장력은 Fig. 3의 우측의 무게추를 달아 우측의 풀리가 좌우로 자유스럽게 이동할 수 있도록 하였다. 벨트의 상하 진동응답은 레이저센서(Graham & White Laser Sensor M5L/20)를 사용하여 측정하였고, FFT analyzer(ONOSOKKI CF-350/930)를 이용하여 실험결과를 분석하였다.

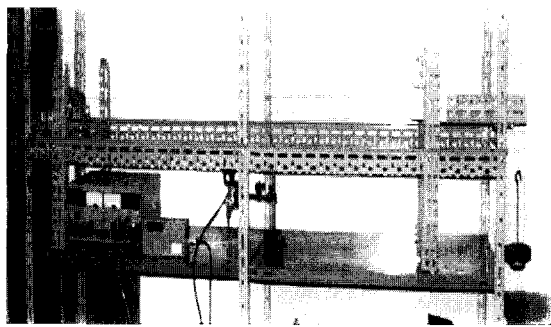


Fig. 2 Photo of the belt driving experimental setup

#### 3.2 실험방법

본 연구의 벨트구동계는 상단의 이완되는 벨트와 하단의 긴장되는 벨트로써 공진영역에서 긴장되는 하단의 진폭이 크다. 이에 본 연구는 벨트 속도에 따라 진폭 변화가 크고 시스템 전체 진동의 주요 요인인 하단 벨트에 관심을 갖고 실험을 수행하였다.

벨트 중심에 레이저 센서를 설치하고 고유진동수 부근에서의 진동특성을 확인하는 실험을 수행하였다. 벨트구동계의 진동원인 풀리의 편심량을 확인하기 위해 레이저센서를 이용하여 풀리의 편심에 의한 초기 변위를 측정하고, 동시에 벨트의 진동 응답을 측정하였다. 모터 속도의 증가, 감소에 따른 벨트의 진폭변화를 연속적으로 측정하였다. 장력 변화에 따른 진동 특성을 확인하기 위해 풀리 우측에 무게를 변화시켜 가며 실험을 수행하였다

#### 3.3 수치해석

수치해석에서 필요한 벨트의 비선형 탄성 스프링계수와 감쇠계수를 알기 위해 이 두 값을 제외한 Fig. 4의 실험결과를 식 (12)에 대입하고, 실험치와 이론치 사이의 오차를 최소화하는 최소자승법을 이용하여 탄성 스프링계수  $E_e = 20 \times 10^6 \text{ N/ms}^2$ 와 감쇠계수  $E_v = 10 \times 10^6 \text{ Nsec/m}$  임을 확인하였다.

Table 1 Dimensions of the belt

$l$ (length)	$h$ (thickness)	$b$ (width)	$\rho$ (density)
1.5 m	1 mm	3 cm	2245.6 kg/m <sup>3</sup>

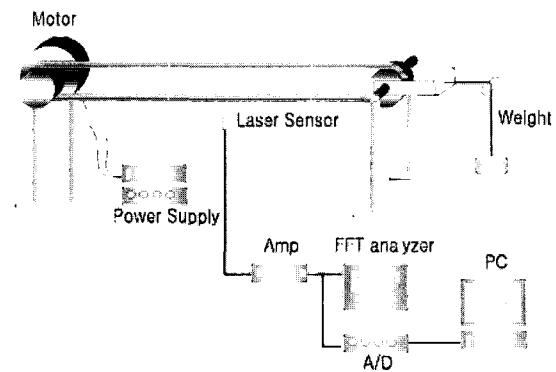


Fig. 3 Schematic of the experimental setup

벨트 비선형 운동방정식 식 (12)를 Runge-Kutta법에 의해 수치해석하였다.

Fig. 5는 공진점을 기준으로 진폭이 증가하다가 공진점인 11 Hz를 지남에 따라 진폭이 급격히 작아짐을 알 수 있었고, 수치해석과 실험이 잘 일치함을 확인할 수 있었다. 다만 저주파 영역에서 오차가 발생하는 이유는 벨트 진폭이 1 mm 정도로 작기 때문에 노이즈의 영향으로 오차가 발생하였다. Fig. 6, 7은 벨트의 비선형 점탄성 값을 변화시키면서 수치해석한 그림으로  $E_e$ 값이 작을 때에는 도약현상이 나타나지 않으나,  $E_e$ 값이 증가함에 따라 도약현상이 발생하고, 고유진동수는 커지며 진폭은 작아짐을 확인할 수 있었다. 감쇠력인  $E_v$ 값을 증가시킬수록 벨트의 진동이 작아짐을 확인할 수 있었다.

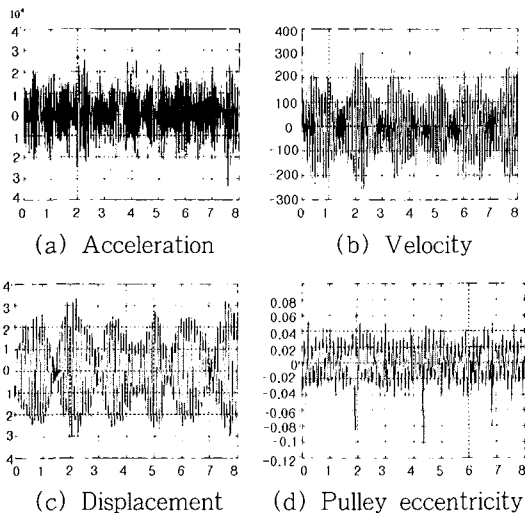


Fig. 4 Experimental results

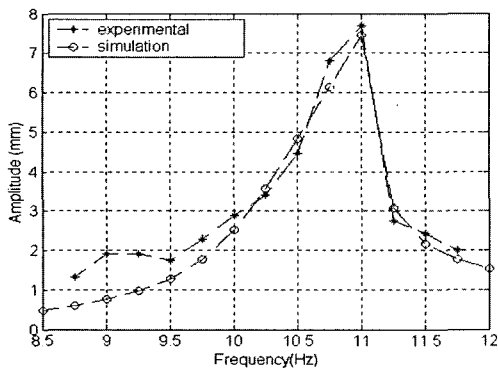


Fig. 5 Experiment and simulation results

#### 4. 해석 결과 및 고찰

Fig. 8은 9 Hz부터 공진점인 11 Hz를 지나 12 Hz까지 1 Hz씩 증가시키면서 실험결과와 수치해석 결과를 비교한 것으로서 진동 현상이 이론식을 수치해석한 결과와 실험이 비교적 잘 일치함을 알 수 있다. 즉 식 (12)는 벨트 실험장치의 운동을 정확히 기술한 식임을 입증할 수 있다. 특히 공진 전의 10 Hz와 공진 후의 12 Hz에서는 맥놀이 현상이 발생함을 볼 수 있었고, 11 Hz의 공진 시, Fig. 8의 (c)와 같이 큰 주기를 갖고 진폭이 증가, 감소를 반복하는 현상을 확인할 수 있었다.

(e)는 비선형 모델의 수학적 계산이 어려움으로 (e-1)과 (e-2)에서 rpm의 변화에 따른 waterfall diagram을 나타내었다. (e-2)에서 공진 주파수에 인접한 주파수들이 발생한 것을 알 수 있다.

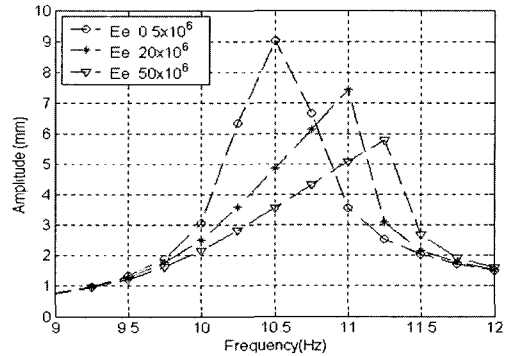


Fig. 6 Comparison of the responses with different stiffness  $E_e$

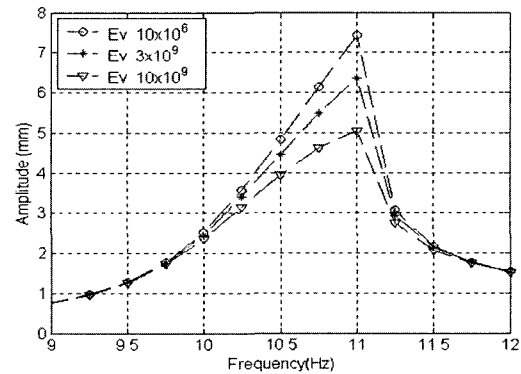


Fig. 7 Comparison of the responses with different damping  $E_v$

Fig. 9는 장력을 변화시켜가며 고유진동수와 진폭 변화를 실험한 것이다. 장력이 2, 3, 4 kg중에 대해 가진주파수를 증가시키며 진폭변화를 측정하였다.<sup>(2)</sup>

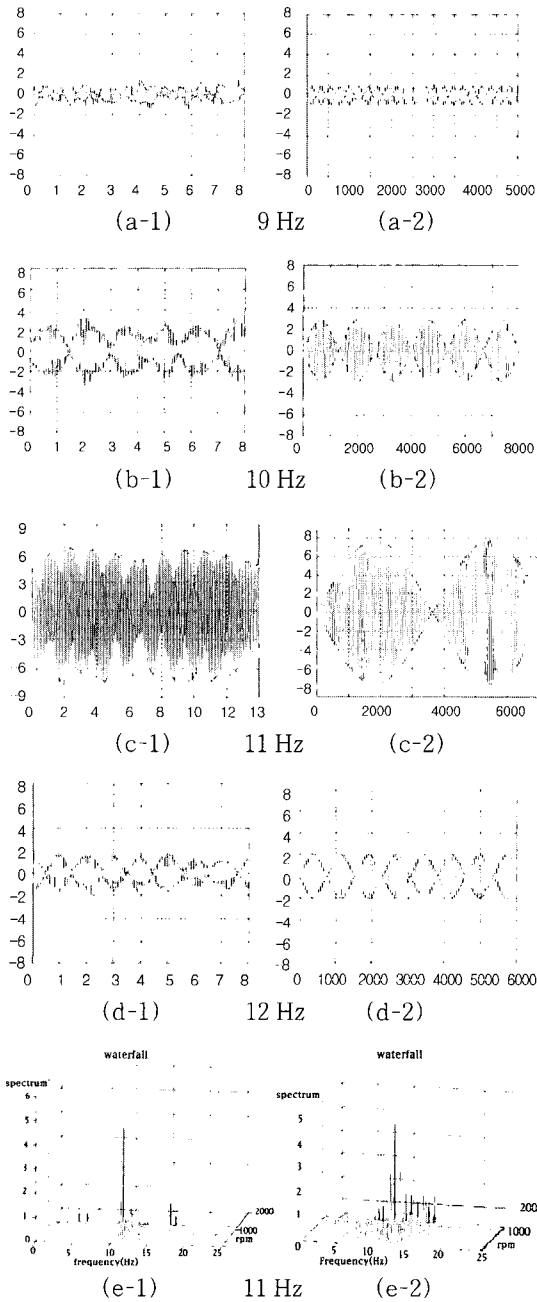


Fig. 8 Comparison between experimental and simulation results.  
 a : 9 Hz, b : 10 Hz, c : 11 Hz, d : 12 Hz  
 1 : experiment 2 : simulation

장력이 커지면 고유진동수가 커지고, 반면에 진동레벨은 감소하는 것을 알 수 있었다.

Fig. 10은 모터 속도를 증가 혹은 감소시키면서 진동레벨을 측정한 결과이다. Fig. 11에서 보는 바와 같이 공진영역에서 가속한 경우와 감속한 경우의 진동레벨이 달라지는 것을 실험과 수치해석으로 알 수 있다. 즉 도약현상(jump phenomenon)이 발생한 것을 알 수 있다. 이 경우 도약현상은 강성스프링에 기인하는 경우와 같이 응답곡선이 고주파 방향으로 휘는 것을 볼 수 있다.

Fig. 11은 가진주파수가 9 Hz에서의 위상선도(phase diagram)로서 x축은 변위이고, y축은 속도를 나타낸 그림이다. 양 옆으로 두 개의 커다란 원을 그리는 것은 비선형에 기인한 혼돈 맥놀이(chaotic beat) 현상이다.

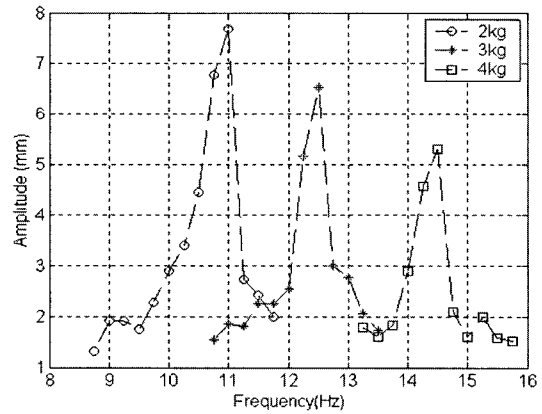


Fig. 9 Vibration levels due to tension variation

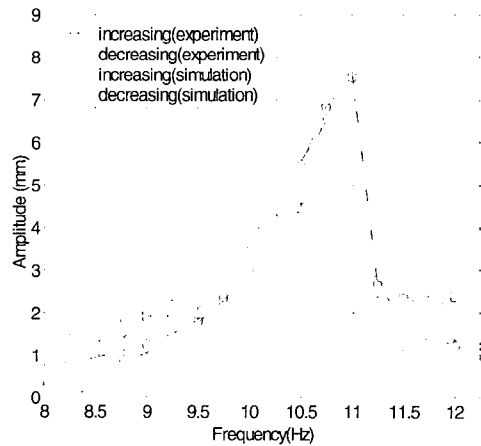


Fig. 10 Jump phenomenon of belt response

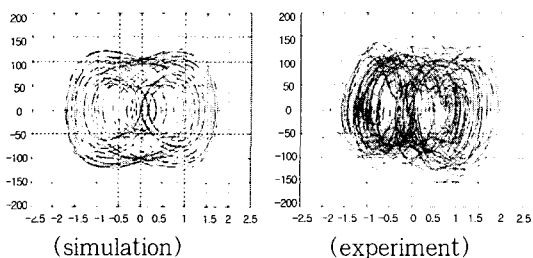


Fig. 11 Chaotic beat at 9 Hz

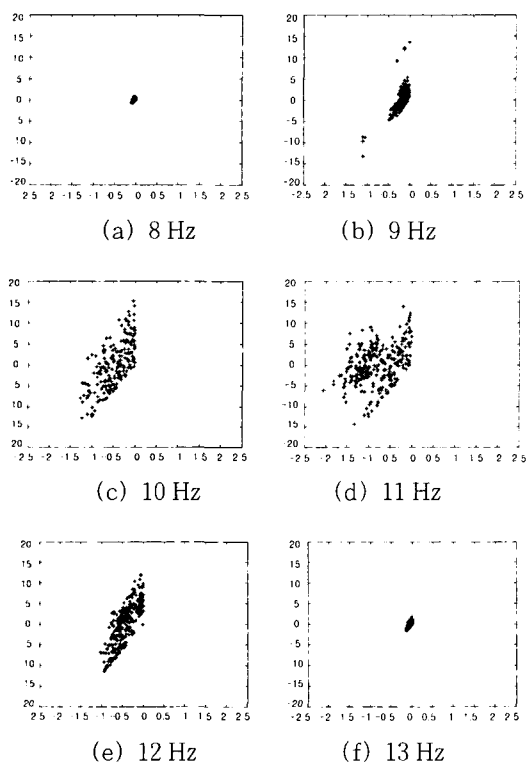


Fig. 12 Poincare map

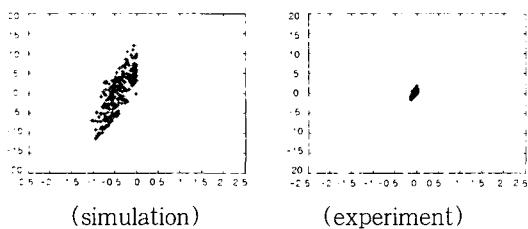


Fig. 13 Poincare map at 11Hz

Fig. 12는 8~13 Hz에서의 Poincare map으로서 x 축은 변위이고, y축은 속도를 나타낸다. 9 Hz에서부터 점들이 불규칙적인 형상을 이루면서 혼돈형상이 발생하여, 공진주파수인 11 Hz에서 가장 큰 경향을 보이다가 13 Hz에서 안정화됨을 알 수 있다. Fig. 11, 13에서 수치해석과 실험을 비교한 결과 비슷한 경향임을 알 수 있었고, 혼돈현상이 발생한다는 것을 확인할 수 있다.

### 5. 결론

구동하는 벨트는 벨트의 점탄성으로 인해 비선형 동특성을 가지게 된다. 본 연구에서는 점탄성 벨트의 실험장치를 제작, 응답을 측정하고 벨트의 점탄성을 고려한 운동방정식을 유도하여 비선형 상미분방정식 형태의 수치해석과 실험결과와 비교 검토하여 봄으로써 다음과 같은 결론을 모을 수 있었다.

- (1) 벨트장력이 클수록 고유진동수는 커지고, 진폭은 작아짐을 확인했듯이 구동 점탄성 벨트의 비선형 모델링은 선형계와 특성이 같은 결과가 나타났다.
- (2) 벨트속도의 증가와 감소 시, 도약현상이 발생하였다.
- (3) 비선형 스프링 값( $E_e$ )이 클수록 고유진동수는 커지고 진폭은 작아짐을 알 수 있고, 감쇠값( $E_v$ )이 커짐에 따라 진폭이 작아짐을 확인하였다.
- (4) 위상선도와 Poincare map으로 비선형에 기인한 혼돈현상을 수치해석과 실험으로 비교, 확인하였다.

### 후 기

본 연구는 한국과학재단 목적기초(2000-2-30200-004-3) 지원으로 수행되었음.

### 참 고 문 헌

- (1) Zhang, L. and Zu, J. W., 1998, "Nonlinear Vibrations of Viscoelastic Moving Belts, Part II : Forced Vibration Analysis," Journal of Sound and Vibration, Vol. 216, pp. 93~105.
- (2) Moon, J. and Wickert, J. A., 1997, "Nonlinear Vibration of Power Transmission Belts," Journal of Sound and Vibration, Vol. 200, pp. 419 ~431.

(3) S. Y. Lee, C. D., Mote JR, 1998, "Traveling Wave Dynamics in a Translating String Coupled to Stationary Constraints : Energy Transfer and Mode Localization," Journal of Sound and Vibration, Vol. 212, pp. 1~22.

(4) Nagarkatti, S. P. and Rahn, C. D., 2000, "Tension and Speed Regulation for Axially Moving Materials", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 122, pp. 445~453.

(5) Harrison, A., "Dynamic Instabilities and Chaos in Running Belts and Their Cleaning Devices".

(6) Fung, R. F., Huan, J. S. and Chen, Y. C., 1996, "The Transient Amplitude of the Viscoelastic Travelling String : An Integral Constitutive Law," Journal of Sound and Vibration, Vol. 201, pp. 153~167.