

수요가 재생 도착과정을 따르는 (s, S) 재고 시스템에서 시뮬레이션 민감도 분석을 이용한 최적 전략^{T*}

권치명^{**}

Optimal Policy for (s, S) Inventory System Characterized by Renewal Arrival Process of Demand through Simulation Sensitivity Analysis

Chimyung Kwon

Abstract

This paper studies an optimal policy for a certain class of (s, S) inventory control systems, where the demands are characterized by the renewal arrival process. To minimize the average cost over a simulation period, we apply a stochastic optimization algorithm which uses the gradients of parameters, s and S. We obtain the gradients of objective function with respect to ordering amount S and reorder point s via a combined perturbation method. This method uses the infinitesimal perturbation analysis and the smoothed perturbation analysis alternatively according to occurrences of ordering event changes.

The optimal estimates of s and S from our simulation results are quite accurate. We consider that this may be due to the estimated gradients of little noise from the regenerative system simulation, and their effect on search procedure when we apply the stochastic optimization algorithm.

The directions for future study stemming from this research pertain to extension to the more general inventory system with regard to demand distribution, backloging policy, lead time, and inter-arrival times of demands. Another direction involves the efficiency of stochastic optimization algorithm related to searching procedure for an improving point of (s, S).

Key Words: (s, S) 재고관리시스템, 확률적화기법, 퍼터베이션 분석, 재생 도착과정

^T 이 논문은 2001학년도 재단법인 동아대학교 학술지원재단 학술연구비에 의하여 연구되었음.

* 본 논문은 한국 시뮬레이션 학회 2003년 춘계학술대회에서 발표한 내용을 수정, 보완한 것임.

** Division of Management Information Systems, Dong-a University

1. 서론

본 연구는 (s, S) 재고관리 시스템에서 단일제품에 대한 수요 발생이 재생 도착과정(renewal arrival process)을 따르는 경우에 시뮬레이션을 이용하여 최적 재고관리 전략을 수립하는 문제를 다루고자 한다. 수요가 일정한 기간 별로 발생하는 경우와는 달리 수요의 발생이 재생 도착과정을 따르는 경우의 (s, S) 재고관리 시스템은 수요 발생 시점에서 재고수준을 검토하여 재고량이 s 보다 적으면 S 만큼 주문하는 시스템이다. 이 시스템에서 수요량에 대한 분포, 수요의 도착과정, 제품 인도기간, backloging 정책, 주문비용, 재고 및 재고부족 비용이 규정되면 재고관리 정책, 즉 재 주문점 s 와 주문량 S 에 따라 총 재고관리 비용이 결정된다. 기간별 (s, S) 재고관리 시스템에서는 제품의 수요가 각 기간에 발생하는 것으로 가정하고 있으나 본 연구는 수요의 발생 시점을 일반화하여 수요 발생이 재생 도착과정을 따르는 것으로 가정하고 총 재고관리 비용을 최소화하는 최적전략, 즉 시스템 파라미터 (s, S) 을 구하는 문제를 다루고자 한다.

단일 제품에 대해서 무한 계획기간을 가정하고 full backloging이 허용되며 기간별 수요가 독립적인 확률분포를 따르는 경우에 Scarf[17]와 Iglehart[13]가 특정 조건 하에서 최적 재고관리 전략을 발견할 수 있다는 사실을 증명한 이후 많은 연구가 있어왔지만 최적 전략을 구하는 것은 계산적으로 복잡하여 적용하는데 어려움이 따른다. 이러한 문제를 해결하는 대안으로 시뮬레이션 접근 방법이 제시되고 있다[9]. 시뮬레이션을 이용하여 시스템의 최적해를 얻는 문제는 최근에 활발한 연구가 이루어지며 해결해야 할 과제가 많은 분야로써 이러한 방향으로 제시된 방법 중 하나가 시스템 성과도의 민감도(sensitivity)를 이용하여 최적해를 찾는 확률최적화기법

(stochastic optimization method)이다[1, 3].

(s, S) 재고관리 시스템에서 성과도의 민감도는 파라미터 s (또는 S)가 미세한 양(Δs 또는 ΔS)만큼 변화할 때 이것이 성과도, 즉 총 재고관리 비용에 미치는 영향이라고 볼 수 있다. 재고관리 비용은 시뮬레이션이 진행됨에 따라 실현되는 표본경로(sample path)에 의해 결정되는데 시뮬레이션 과정에서 이 경로를 추적하여 파라미터의 값이 $(s + \Delta s)$ 일 경우에 가상적인 시뮬레이션(thought simulation)을 논리적으로 수행함으로써 재고관리 비용의 변화량을 추정하여 성과도의 민감도를 계산한다. 이러한 방법이 퍼터베이션 분석법(perturbation analysis: PA)으로 대기행렬 모형, 생산관리 시스템 등 여러 모형에 적용되고 있지만 시스템이 복잡할 경우 응용성은 아직 상당히 제한적이다.

이 연구에서는 시뮬레이션을 통하여 기간별 (s, S) 재고관리 시스템의 최적 재고 전략을 발견하는 기존 연구[12]를 확대하여 단일제품의 수요가 재생 도착과정을 따르는 경우에 PA를 적용하여 민감도를 구하는 방법을 제안하고 이를 이용하여 최적 재고 정책을 발견하고자 한다. 또한 확률 최적화 알고리즘의 효율성을 시뮬레이션 실험을 통하여 분석하고자 한다.

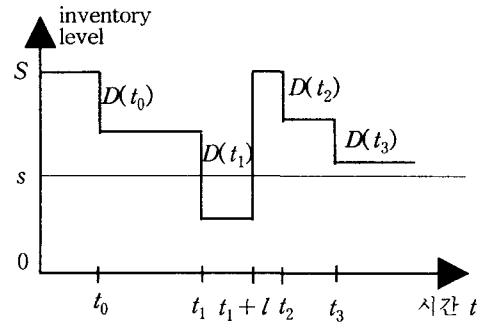
2. 퍼터베이션 분석법

PA는 단일 런(a single run)으로부터 시스템 성과도의 민감도(gradient)를 추정하는 방법으로 퍼터베이션 Δs (또는 ΔS)를 정상 표본경로(normal sample path)에 도입하여 가상적으로 얻게 되는 퍼터베이션 표본 경로(perturbed sample path)를 시뮬레이션 과정에서 분석하여 퍼터베이션이 성과도에 미치는 영향을 추정하는 수단을 제공한다. 제품의 수요 발생이 재생 도착과정을 따르는 (s, S) 재고관리 시스템에서 시뮬레이션 표본경로는 주문사건, 수요 발생 사이의 시간(time between

successive arrivals), 그리고 발생 수요의 수요량(demand size)에 의해 얻어지며 이 때 ΔS 는 수요 발생 사이의 시간과 수요량과는 독립적이다. 따라서 만일 파라미터 S 의 미세한 변화량(infinitesimal change), $\Delta S (\rightarrow 0)$ 가 시뮬레이션 사건 리스트에서 주문사건의 발생 순서와 빈도를 변화시키지 않는다면 퍼터베이션의 도입은 표본경로에서 재고수준을 단지 ΔS 만큼만 변화시키게 되며 이에 따른 재고비용과 재고부족 비용도 ΔS 에 비례하여 변화하게 될 것이다. 그러나 ΔS 의 미세한 변화량이 사건 리스트에서 주문사건의 발생 순서와 빈도를 변화시키게 되면 정상경로(without perturbation)와 퍼터베이션 표본경로는 완전히 다른 형태로 발전하게 된다. 이 절에서는 우선 제품의 수요가 재생 도착과정을 따르는 (s, S) 재고관리 시스템을 살펴보고 퍼터베이션에 의하여 퍼터베이션 표본경로가 발전하는 경우에 따라서 PA으로 재고비용의 민감도를 구하는 방법을 제안하고자 한다.

2.1 재생 도착과정 (s, S) 재고관리 시스템

제품의 수요가 재생 도착과정을 따르는 (s, S) 재고관리 시스템에서 주문 정책은 시점 t_i 의 재고량, $X(t_i)$ 가 s 보다 적으면 재고량이 S 만큼 되도록 주문을 하고 그렇지 않으면 주문을 하지 않는 것이다. 시점 t_i 에서 수요량 $D(t_i) \sim IID f(d)$ 이며 그 분포함수는 $F(d)$ 이다. 또한 수요 발생시점간의 시간 $A_i = (t_{i+1} - t_i)$ 은 $A_i \sim IID g(t)$ 이며 그 분포함수를 $G(t)$ 라고 가정한다. 시간이 진행됨에 따라서 $X(t_i)$ 의 표본경로는 <그림 1>과 같이 변화하고 재고량 $X(t_i)$ 에 대해서는 $X(t_i) \geq s$ 이면 $X(t_{i+1}) = X(t_i) - D(t_i)$ 이며 $X(t_i) < s$ 이고 $A_i > l$ 이면 제품 인도기간 l 시간 후에 재고수준은 $X(t_i + l) = S$ 라는 관계가 성립한다.



<그림 1> 재고수준의 표본 경로

재고관리 정책에 영향을 미치는 비용은 주문비용 k , 단위 재고비용 h , 단위 재고부족 비용 p 이다. 주문비용은 고정비용으로 주문 건당 비용이고 재고 및 재고부족 비용은 재고 수준에 비례하고 편의상 그 비용을 새로운 수요가 발생한 시점에 재고수준에 따라 부여하기로 한다. 또한 주문량은 인도기간 후에 일시에 도착하며 backlogging은 허용된다고 가정한다.

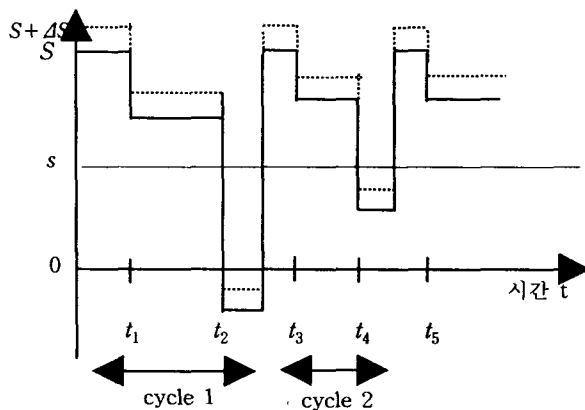
이 시스템의 목적은 단위 시간당 평균 재고관리비용(Average Cost over Total Period: $AC(s, S)$)을 최소화하는 주문 정책을 유도하는 파라미터 s 와 S 를 결정하는 것이다. 편의상 초기 재고수준을 $X(t_0) = S$ 라 하면 시점 t_i 의 재고수준 $\{X(t_i); i=0, 1, 2, \dots\}$ 는 regenerative point가 S 인 regenerative process를 나타낸다. 정상 표본경로에 퍼터베이션 ΔS 의 도입은 퍼터베이션 표본경로의 재고수준을 ΔS 만큼 변화시켜 특정 조건 하에서 주문 사건을 발생시킬 수 있으며, 또한 퍼터베이션 ΔS 의 도입은 재고수준을 변화시키지 않지만 재주문점이 변화함으로 새로운 주문 사건을 발생시킬 수 있다. 이 두 가지 퍼터베이션에 의하여 특정 시점에서의 주문사건의 발생은 정상 표본경로의 regenerative cycle을 변화시킬 수 있으며 이와 관련되는 재고관리비용도 변화하게 된다. 일정한 시간이 지난 후 임의의 시점에서 두 표본경로의 재고수준이 모두 재주문점 이하로 내려가게 되면 두 표본경로는 서로 수렴하게

된다. 즉 전체 시물레이션 기간은 주문사건이 동일한 시점에서 발생하는 regenerative cycle 과 그러하지 않은 regenerative cycle을 반복 하게 된다. regenerative cycle 기간 동안 주문 이 동일한 시점에서 발생하면 regenerative cycle length의 변화가 없으며 이러한 경우에는 IPA(infinite perturbation analysis)를 사용하고, 변화가 있는 경우에는 SPA (smoothed perturbation analysis)를 사용한다. 즉 시물레이션 시간이 진행됨에 따라 IPA와 SPA를 교대로 사용하여 평균비용함수 $AC(s, S)$ 의 민감도를 추정하게 된다.

2.2 IPA

<그림 2>에서 직선은 재고수준 S 을 regenerative point로 하는 정상 표본경로를 나타내고 점선은 $(S + \Delta S)$ 을 regenerative point로 하는 퍼터베이션 경로를 보여주고 있다. 만일 두 경로의 regenerative cycle에서 주문 의사결정이 동일하다면 두 경로의 주문 비용은 동일하고 단지 재고비용과 재고부족 비용만 변화한다.

T , T_1 그리고 T_2 을 각각 시물레이션 총기간, 재고 수준이 양인 기간, 재고 수준이 음인 기간이라 할 때, 두 표본 경로로부터 시간-평균 비용함수의 차이 $\Delta AC(s, S)$ 는 다음과 같이 주어진다.



<그림 2> 두 경로 상에서 재고수준의 변화

$$\begin{aligned} \Delta AC(s, S) &= [TC(s, S)_p - TC(s, S)_n] / T \\ &= [h\Delta S \times T_1 - p\Delta S \times T_2] / T, \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $TC(s, S)_p$ 와 $TC(s, S)_n$ 는 각각 퍼터베이션 경로와 정상 경로에서의 총 재고관리 비용이다. 따라서 파라미터 S 에 대한 $AC(s, S)$ 의 민감도는

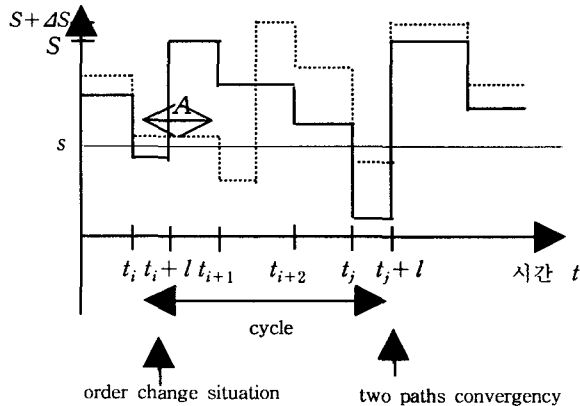
$$\begin{aligned} \delta AC(s, S) / \delta S &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \Delta AC(s, S) / \Delta S \\ &= [hT_1 - pT_2] / T. \end{aligned} \quad (2)$$

와 같이 주어지며 비슷한 방법으로 파라미터 s 에 대한 $AC(s, S)$ 의 민감도는 다음과 같이 주어진다.

$$\delta AC(s, S) / \delta s = 0. \quad (3)$$

2.3 SPA

<그림 3>은 주문 변화가 발생하는 상황을 보여주는 것으로 시점 t_i 에서 정상 표본경로에는 재고수준이 S 가 되는 주문이 발생하나 퍼터베이션 경로에서는 재고수준, $(X(t_i) + \Delta S)$ 이 S 보다 크므로 주문은 발생하지 않는다. 따라서 시점 t_i 부터 두 표본 경로는 다르게 발전하며 만일 시점 t_j 에서 두 경로의 재고수준이 모두 S 이하이면 시점 t_j 에서 재고수준을 각각 S 와 $(S + \Delta S)$ 가 되는 주문이 발생하고 시점 t_i 에서처럼 두 경로에서 주문 여부가 다르게 나타날 때까지 주문 의사결정이 동일한 확률과정(stochastic process)을 따르게 된다. 따라서 전체 표본경로는 주문 의사결정이 동일한 확률과정과 그렇지 않는 경우의 확률과정이 교대로 반복된다고 볼 수 있다. 주문 의사결정이 동일한 확률과정을 따를 때는 IPA 방법을 사용하여 성과도의 민감도를 추정하고 주문 의사결정이 달라지는 시점부터 시작하여 두 경로가 수렴할 때까지의 기간 동안에는



<그림 3> 주문변화 발생과 두 경로의 수렴

SPA 방법을 사용하여 민감도를 추정하게 된다. 즉 그림 3에서 시점 t_i 부터 시점 (t_j+l) 까지는 SPA[4] 적용 기간으로, 이 기간을 하나의 cycle로 생각할 수 있으며 두 표본경로 상에서 시간-평균 비용함수의 차이, 즉 $\Delta AC(s, S)$ 는 시뮬레이션 과정에서 구할 수 있다.

그러면 $\Delta S \rightarrow 0$ 인 경우에 민감도 추정치를 표본경로로부터 구하기 위해 먼저 주문의 변화가 일어날 수 있는 상황을 살펴보자. 만일 시점 t_i 에서 크기가 $D(t_i)$ 인 수요가 발생하고 이 때의 재고수준 $X(t_i)$ 가 s 보다 적고 제품 인도기간 $l(A_i)$ 시간 후의 재고수준은 $X(t_i+l) = S$ 가 된다. 따라서 시점 (t_i+l) 에서 정상 표본경로의 재고수준이 S 이고 $l(A_i)$ 일 때는 주문의 변화가 발생할 수 있는 가능성이 있는 시점으로 이러한 시점의 집합을 $M = \{i : X(t_i+l) = S, A_i > l\}$ 이라고 정의하자. 만일 다음 수요 $D(t_{i+1})$ 의 발생 시점이 $t_{i+1} > t_i+l$ 이고 $i \in M$ ($X(t_i) < s$)이면 실제로 주문의 변화가 발생 가능한 경우는 퍼터베이션 경로 상에서의 재고수준이 $X(t_i) + \Delta S > s$ 일 때이다. 편의상 확률변수 $\alpha(t_i) = s - X(t_i)$ 을 정의하면 주문변화의 발생조건은 $\alpha_i < \Delta S, i \in M$ 이

다. 따라서 퍼터베이션 ΔS 에 의해 실제적으로 주문의 변화가 일어날 때 주문 변화에 따른 두 비용함수 차이의 기대치는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$E = \sum_{i \in M} E[\Delta AC(s, S) | \alpha(t_i) \leq \Delta S] \times Pr[\alpha(t_i) \leq \Delta S] \times Pr[A_i > l]. \quad (4)$$

이 식에서 첫 번째 항은 주문 변화가 일어나는 cycle 기간 동안 정상 표본경로와 퍼터베이션 경로에 따라 나타나는 두 비용함수 차이의 조건부 기대치이며 충분히 오랜 시간 동안의 시뮬레이션을 통하여 $E[\Delta AC(s, S)]$ 의 추정치는 다음 식으로 얻을 수 있다.

$$E[\Delta AC(s, S)] = [TC(s, S)_p - TC(s, S)_n] / T. \quad (5)$$

식 (4)에서 두 번째 항과 세 번째 항은 실제적으로 주문의 변화가 일어나는 확률이다. 먼저 두 번째 항을 유도하기 위해 변수 $Z(t_i) = X(t_{i-1}) - s$ 을 정의하자. 그러면 $X(t_i) = X(t_{i-1}) - D(t_i)$ 임으로 조건 $X(t_i) < s$ ($i \in M$)는 $X(t_{i-1}) - s < D(t_i)$ 가 되며 간단히 $Z(t_i) < D(t_i)$ 와 같이 표현된다. 따라서 $i \in M$ 인 경우에

$$\begin{aligned} Pr[\alpha(t_i) \leq \Delta S | X(t_i) < s] &= Pr[\alpha(t_i) \leq \Delta S | D(t_i) > Z(t_i)] \\ &= Pr[D(t_i) \leq Z(t_i) + \Delta S | D(t_i) > Z(t_i)] \\ &= F[Z(t_i) + \Delta S] - F[Z(t_i)] / [1 - F[Z(t_i)]] \quad (6) \end{aligned}$$

Regenerative process의 성질에 의하여 $\alpha(t_i)$ 와 $Z(t_i)$ 은 모든 기간에 대해 IID이며 각 regeneration cycle의 마지막 시점의 값이 될 것이다. 마지막으로 세 번째 항은 다음 수요가 발생하는 시점이 주문 인도기간 이후에 발생할 확률로 $Pr[A_i > l] = 1 - G(l)$ 이며 편의상 식 (6)의 Z 에서 첨자를 삭제하면 시점 t_i 에서 실제 주문의 변화가 발생할 확률, P_i 는 다음과

같이 주어진다.

$$P_i = [F(Z + \Delta S) - F(Z)] / [1 - F(Z)] \times [1 - G(l)] \quad (7)$$

따라서 $\Delta S \rightarrow 0$ 일 때 SPA에 의한 민감도 추정량은 다음과 같다.

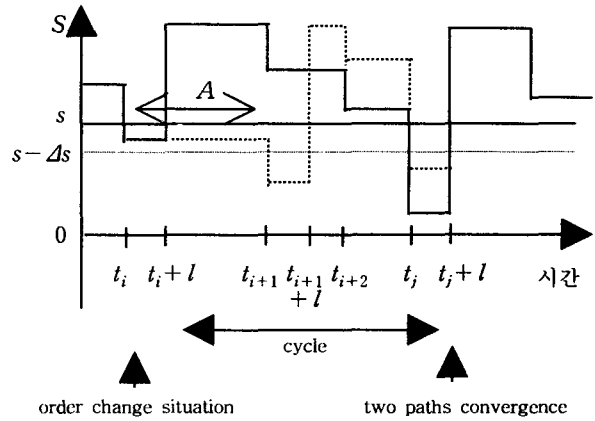
$$\begin{aligned} & \delta AC(s, S) / \delta S \\ &= \sum_{i \in M} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} E[\Delta AC(s, S) \mid \alpha(t_i) \leq \Delta S] \\ & \quad \times \lim_{\Delta S \rightarrow 0} Pr[\alpha(t_i) \leq \Delta S] / \Delta S \times [1 - G(l)] \\ &= E[\Delta AC(s, S) \mid \alpha(t_i) \leq \Delta S] \\ & \quad \times \lim_{\Delta S \rightarrow 0} [F(Z + \Delta S) - F(Z)] / \Delta S \\ & \quad \times 1 / [1 - F(Z)] \times [1 - G(l)] \\ &= E[\Delta AC(s, S) \mid \alpha(t_i) \leq \Delta S] \\ & \quad \times f(Z) / [1 - F(Z)] \times [1 - G(l)]. \end{aligned} \quad (8)$$

식 (1)과 (5)에서, $\Delta AC(s, S)$ 와 $E[\Delta AC(s, S)]$ 는 단위 시간에 대한 시간-평균 비용함수임으로 전체 시물레이션 기간 T 동안의 전체 비용함수의 민감도(gradient), $\delta AC(s, S) / \delta S$ 은 IPA와 SPA에 의해 얻어진 민감도의 합으로 나타나게 된다.

재주문점 s 에 대한 민감도도 위에서 언급한 방법과 유사하게 구할 수 있는데 그림 4는 시점 t_i 에서 주문발생이 변화하는 상황을 보여 준다. 시점 t_{i-1} 에서 재고수준 $X(t_{i-1})$ 가 s 보다 높고 시점 t_i 에서 재고수준 $X(t_i)$ 가 s 보다 낮으면 주문의 변화가 가능하다. 퍼터베이션 Δs 에 의해서 만일 $\alpha(t_i) = s - X(t_i) \leq \Delta s$ 이고 $A_i > t_i + l$ 이면 시점 $t_i + l$ 에서 주문의 변화가 발생한다. 식(6)을 유도하는 방법과 같은 방법으로 P_i 는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$P_i = Pr[\alpha(t_i) \leq \Delta s \mid X(t_i) < s] \times Pr[A_i > l]$$

$$\begin{aligned} &= Pr[D(t_i) \leq Z(t_i) + \Delta s \mid D(t_i) > Z(t_i)] \times [1 - G(l)] \\ &= [F[Z(t_i) + \Delta s] - F(Z(t_i))] / [1 - F(Z(t_i))] \\ & \quad \times [1 - G(l)]. \end{aligned} \quad (9)$$



<그림 4> 주문변화 발생과 두 경로의 수렴

Δs 에 의해 주문의 변화가 발생하면 시물레이션 런으로부터 $E[\Delta AC(s, S)]$ 을 추정하여 다음과 같이 민감도를 얻는다.

$$\begin{aligned} \delta AC(s, S) / \delta s &= \sum_{i \in M} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} E[\Delta AC(s, S) \mid \alpha(t_i) \leq \Delta s] \\ & \quad \times \lim_{\Delta s \rightarrow 0} Pr[\alpha(t_i) \leq \Delta s] / \Delta s \times Pr[A_i > l] \\ &= \sum_{i \in M} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} E[\Delta AC(s, S) \mid \alpha(t_i) \leq \Delta s] \\ & \quad \times \lim_{\Delta s \rightarrow 0} Pr[\alpha(t_i) \leq \Delta s] / \Delta s \times Pr[A_i > l] \\ &= E[\Delta AC(s, S) \mid \alpha(t_i) \leq \Delta s] \\ & \quad \times \lim_{\Delta s \rightarrow 0} [F(Z + \Delta s) - F(Z)] / \Delta s \\ & \quad \times 1 / [1 - F(Z)] \times [1 - G(l)] \\ &= E[\Delta AC(s, S) \mid \alpha(t_i) \leq \Delta s] \\ & \quad \times f(Z) / [1 - F(Z)] \times [1 - G(l)]. \end{aligned} \quad (10)$$

IPA의 경우에는 s 에 대한 평균비용함수의 민감도가 0임으로 전체 시물레이션 기간 동안의 gradient, 즉 $\delta AC(s, S) / \delta s$ 는 SPA의 gradient와 일치한다.

3. 확률 최적화 기법

확률 최적화기법은 성과도에 대한 파라미터의 민감도를 이용하여 시스템의 최적해를 탐색하는 방법이다 [4, 6]. 단일 런으로부터 평균 비용함수 $AC(s, S)$ 의 최적해를 구하기 위해 임의의 파라미터 조합에서 T 기간 동안 시뮬레이션 런을 실행하여 민감도를 추정하고 이를 이용하여 $AC(s, S)$ 을 개선하는 파라미터의 다른 조합(일반적으로는 k 차원의 점)으로 이동하여 반복적 탐색기법을 사용하여 최적해를 구한다. 이러한 탐색전략은 제약조건 ($0 \leq s \leq S$)이 있는 경우의 비 선형 최적화 기법의 탐색방법과 유사하며 반복 알고리즘의 일반적인 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + a_n [\delta AC(s, S) / \delta s]; \\ S_{n+1} &= S_n + a_n [\delta AC(s, S) / \delta S]. \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 s_n 과 S_n 은 각각 반복 단계 n 에서 s 와 S 의 값이며 a_n 은 다음 파라미터의 조합으로 이동하는 거리를 결정하는 값이다.

확률 최적화 기법

- (0) 초기화 단계: 반복단계 $n=0$ 에서 s_n 과 S_n 의 초기 값을 부여.
- (1) (s_n, S_n)에서 T 기간 동안 시뮬레이션을 실행하여 PA에 의하여 민감도 $\delta AC(s, S) / \delta s$ 및 $\delta AC(s, S) / \delta S$ 의 추정.
- (2) s 와 S 의 값 update:
 $s_{n+1} = s_n + a_n [\delta AC(s, S) / \delta s], a_n = A/n$
 $(A = 0.2)$
- (3) 조건 $S_n \geq s_n \geq 0$ 을 조사하여 만일 $S_n \geq s_n \geq 0$ 이면 단계 4로 이동. 아니면 이동거리를 반으로 줄이고 ($a_n = A/2n$) 단계 (2)로 이동.
- (4) 종료기준: 조건 $a_n [\delta AC(s, S) / \delta s] < \epsilon$ 와 $a_n [\delta AC(s, S) / \delta S] < \epsilon$ 을 만족하면 알고리즘을 종료하고 최적해 (s^*, S^*)를 추정.

아니면 $n = n + 1$, 단계 (1)로 이동.

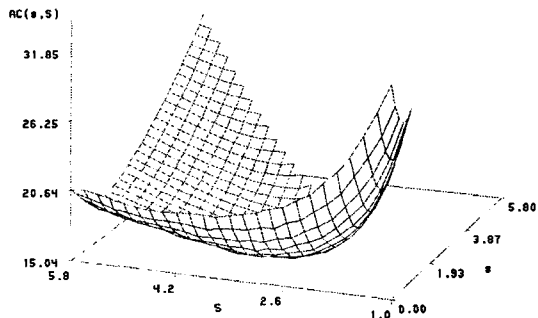
단계 (2)에서는 a_n 는 다음 조건을 만족해야 하는데 [15, 18],

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0; \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty; \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty; \quad (12)$$

본 연구에서는 단순하게 n 의 역수 $a_n = 1/n$ 을 사용하였다. 단계 (3)에서의 조건 $S \geq s \geq 0$ 은 실행가능 전략을 유지하기 위해 것이며 단계 (4)는 현재의 해에서 다음 해로의 이동거리가 지정한 값 ϵ 보다 적으면 알고리즘을 종료하는 조건이다. 일반적으로 시뮬레이션 런의 길이와 추정된 최적해의 정확성 사이에는 trade-off 관계가 있으며 ϵ 값의 선택에 종속적이다.

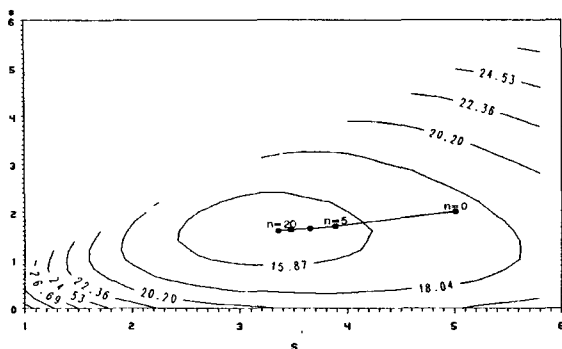
4. 예제

확률 최적화 기법의 효율성을 평가하기 위해서 수요 발생 시점이 재생 도착과정을 따르는 (s, S) 재고 모형에 대한 시뮬레이션을 실행하고 그 결과를 살펴보고자 한다. 수요량 함수는 표준 지수분포를 따르고 수요의 발생간 시간 분포 $g(t)$ 은 평균이 2인 지수분포를 따르는 것으로 가정하였다. 또한 주문비용은 주문 당 10이며 단위 재고비용과 단위 재고부족 비용은 기간 당 각각 5와 50으로 가정하였다. 50,000기간 동안의 시뮬레이션으로부터 얻은 시간-평균 비용함수 $AC(s, S)$ 의 반응함수를 (s, S)의 2차원 공간에서 ($1 \leq S \leq 5.8, 0 \leq s \leq S$) 나타내면 대강 <그림 5>와 같으며 이는 기간 별 (s, S) 재고관리 시스템에서의 기간-평균 재고비용 함수의 형태와 유사하게 나타났다 [13]. 파라미터의 여러 조합에서 많은 양의 시뮬레이션을 수행한 결과 최적 전략은 대강 $(s, S) = (1.6, 3.2)$ 이며 $AC(s, S)^* \approx 15$ 이다.



<그림 5> AC(s, S)의 반응표면

초기값은 $(s_0, S_0) = (2, 5)$ 이며 $AC(s, S)$ 의 민감도는 $T=50,000$ 시간 동안의 시물레이션으로 구하고 최적화 알고리즘으로 다음 단계의 파라미터 값, (s_n, S_n) 의 값을 계산하였다. 최적해 알고리즘의 종료조건을 $\epsilon=0.001$ 로 하였을 때 최적해의 추정치는 대장 $(s, S)^* = (1.60, 3.35)$, $AC(s, S)^* = 15.01$ 로 각각 추정되었다. 이러한 시물레이션 결과로부터 최적화 알고리즘은 상당히 정확히 최적 재고비용 함수 값을 추정하고 있다. <그림 5>에서 보듯이 시간-평균 비용함수는 바닥이 둥근 bowl 형태로 (s, S) 2차원 공간의 넓은 영역에서 비용함수의 값이 최적해에 근사한 형태를 나타내고 있다. 대체적으로 $s=(1.58, 1.60)$, $S=(3.2, 3.35)$ 인 영역에서 비용함수의 값은 별 차이가 없는 것으로 나타나고 있다. <그림 6>은 확률 최적화 알고리즘이 초기해로부터 최적해를 탐색하는 과정을 개략적으로 보여준다.



<그림 6> 확률 최적화 알고리즘의 탐색과정

5. 결론

본 연구는 수요 발생 시점이 재생 도착과정을 따르는 (s, S) 재고 관리 시스템에서 시간-평균 재고비용 함수를 최소화하는 최적 주문량 S 와 재주문점 s 을 확률최적화 기법을 이용하여 추정하였다. 확률최적화 알고리즘의 과정에서 요구되는 파라미터 s 와 S 의 시간-평균 재고비용 함수에 대한 민감도는 IPA와 SPA 방법을 결합하여 추정하였다. 결합 퍼터베이션 분석 방법은 퍼터베이션 ΔS (또는 Δs)의 도입에 따라 실현되는 퍼터베이션 경로 상의 주문 사건이 특정한 기간 (regenerative cycle period)에서 정상경로와 변동되는가에 따라 IPA와 SPA를 교대로 사용하며 민감도를 추정하는 방법으로 전체 시물레이션 기간의 민감도는 IPA와 SPA의 민감도의 합으로 나타난다. 결합 퍼터베이션 분석법에 의하여 구한 민감도 추정치를 바탕으로 최적해를 반복적으로 탐색하는 확률 최적화 기법을 (s, S) 재고 관리 시스템에 적용하여 그 결과를 분석하였다.

퍼터베이션 분석에서는 여러 형태의 시스템에서 민감도 추정과 추정치의 정확성에 대한 연구가 많이 이루어져 왔는데[7, 8, 13], 이러한 측면에서 본 연구의 시물레이션 결과로부터 추정된 최적 재고 전략이 최적해에 상당히 근사하는 것으로 생각된다. 이는 아마 민감도를 계산하는 과정에서 시스템의 확률적인 요소에 의한 잡음이 적고 (s, S) 재고 시스템의 regenerative 특성에 기인하는 것으로 생각된다.

이러한 결과는 비록 간단한 예를 통하여 얻은 것이지만 민감도를 이용하여 최적해를 반복적으로 탐색하는 확률 최적화 기법이 보다 일반적인 (s, S) 재고 시스템에도 효과적으로 적용될 수 있음을 시사하는 것으로 기대한다. 본 연구의 결과를 수요함수, backloging 정책, 제품 인도기간 등과 관련하여 보다 일반적인 경우로 확장하는 문제를 향후 연구과제로 제시한다.

참고문헌

- [1] Andradottir, S., "A Review of Simulation Optimization techniques," *Proceedings of the WSC* (1998), pp. 151-158.
- [2] Atkinson, J. B., "A note on a Queueing Optimization Problem," *J. of the Operational Research Society*, Vol. 47 (1996), pp. 463-467.
- [3] Azadivar, S., "Simulation Optimization Methodology," *Proceedings of the WSC* (1999), pp. 93-100.
- [4] Cao, X. R., "Perturbation Analysis of Discrete Event Systems: Concepts, Algorithm and Applications," *European J. of Operational Research*, Vol 91(1996), pp. 1-13.
- [5] Carson, Y. and A. Maria, "Simulation Optimization Methods and Applications," *Proceedings of the WSC* (1997), pp. 118-126.
- [6] Chong, E. K .P. and P. Ramadge, "Optimization of Queues Using Infinitesimal Perturbation Analysis-Based Stochastic Algorithm with General Update Times," *SIAM J.*, Vol. 31, No. 3. (1993), pp. 698-732.
- [7] L'Ecuyer, P., N. Giroux and P. W. Glynn, "Stochastic Optimization by Simulation: Numerical Experiments with the M/M/1 Queue in Steady-state," *Management Science*, Vol. 40, No. 10 (1994), pp. 1245-1261.
- [8] Ecuyer, P. L. and P. W. Glynn, "Stochastic Optimization by Simulation: Convergence Proofs for the GI/G/1 Queue in Steady -state," *Management Science*, Vol. 40, No. 11 (1994), pp. 1245-1261.
- [9] Fu, M. C. "Sample Path Derivatives for (s, S) Inventory Systems," *Operations Research*, Vol. 42, No. 2 (1994), pp. 351-364.
- [10] Glasserman P. and S. Tayur, "Sensitivity Analysis for Base-stock Levels in Multiechelon Production-inventory Systems," *Management Science*, Vol. 41, No.2 (1995), pp. 263-281.
- [11] Ho, Y. C. and X. Cao, *Perturbation Analysis of Discrete Event Dynamic Systems*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991.
- [12] Kwon, C., "Application of Stochastic Optimization Method to (s, S) Inventory System," *J. of the Korea Society for Simulation*, Vol. 12, No. 2, (2003), pp. 1-11.
- [13] Iglehart, D., "Optimality of (s, S) Policies in the Infinite Horizon Dynamic Inventory Problem," *Management Science*, Vol. 9, (1963), pp. 259-267.
- [14] Lin, C., C. Madu, T.W. Chien and C. Kuei, "Queueing Models for Optimizing System Availability of a Flexible Manufacturing System," *J. of the Operational Research Society*, Vol. 45 (1994), pp. 1141-1155.
- [15] Maryak, J. L. and D. C. chin, "Global Random Optimization by Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation," *Proceeding of WSC* (2001), pp. 307-312.
- [16] Nahmias, S. *Production and Operations Analysis*, Irwin Press, Boston, 1987.
- [17] Scarf, H., "The Optimality of (s, S) Policies in the Dynamic Inventory Problem," *Mathematical methods in the Social Sciences*, Stanford University Press, Stanford, California, 1960.
- [18] Yakowitz, S., L. Ecuyer and F. Vazquez-Abad, "Global Stochastic Optimization with Low-dispersion Point Sets," *Operations Research* Vol. 48 (2000), pp. 939-950.

주 작성자 : 권 치 명
논문투고일 : 2003. 9. 19
논문심사일 : 2003. 10. 22
심사판정일 : 2003. 10. 22

● 저자소개 ●



권치명

1978년 서울대학교 산업공학과 졸업

1983년 서울대학교 대학원 산업공학과 졸업

1991년 VPI & SU 산업공학과 박사

현 재 동아대학교 경영정보과학부 교수

관심분야 : Simulation Modeling & Output Analysis, Simulation Optimization, FMS