

자동차형 로봇의 최단경로 계산을 위한 새로운 방법

조규상*

A New Method to Calculate a Shortest Path for a Car-Like Robot

GyuSang Cho

Abstract

Dubins showed that any shortest path of a car-like robot consists of exactly three path segment which are either arcs of circles of radius r (denoted C), or straight line segments (denoted S). Possible six types classified into two families, i.e. CSC and CCC. CSC includes 2 types (LRL and RLR) and CSC includes 4 types (LSL, RSR, LSR, RSL). This paper proposes new formulae for CSC family to find the shortest smooth path between the initial and final configurations of a car-like robot. The formulae is used for finding connection points explicitly between $C \rightarrow S$ and $S \rightarrow C$ which are necessary for real applications. The formulae have simple forms mainly because they are transformed into origin of their original coordinates of initial and target configuration, and derived from a standard forms which are a representative configuration of LSL and LSR type respectively. The proposed formulae, which are derived from the standard forms, are simple and new method.

Key Words: Dubins set, car-like mobile robot, shortest path

* 동양대학교 컴퓨터학부

1. 서론

Dubins[1]는 전방향으로 이동 가능한 로봇이 시작지점의 자세에서 목표지점의 자세로 이동할 수 있는 경로 중에서 최단의 경로를 구하는 문제의 결과를 최초로 제시하였다. 여기서 Dubins는 CCC(3개의 원)형과 CSC(두 개의 원과 직선)으로 표현되는 경로의 조합으로 최단 경로를 구성할 수 있다는 것을 증명하였다. 이 연구를 바탕으로 Melzak[2], Robertson[3], Cockayne등[4]은 Dubins방식으로 생성한 최단 경로의 접근 가능한 영역의 집합에 대한 결과를 제시하였다. Bui[5]등은 Dubins 방식으로 $R^2 \times S$ 공간에서의 합성의 계산에 적용하였다. 이 후에 Boissonnat 등[6]은 이런 경우에 대해서 R^2 공간에서 어떤 점에 고정된 구조로부터 최단 경로의 합성 문제에 대한 연구를 하였다.

Reeds등[7]은 전진과 후진이 가능한 자동차형 로봇에 Dubins의 결과를 확장 적용하여 48종의 최단 경로의 충분집합에 대한 결과를 제시하였으며, 최적한 경로는 직선이나 최소반경의 원호로 구성된 5개 이하의 조합으로 구성된다는 것을 증명하였다. Sussmann등[8]은 Dubins방식과 Reeds & Shepp방식의 새로운 증명을 제어 이론의 관점에서 접근하였으며, Reeds & Shepp방식의 경우를 48종에서 46종의 충분 집합군으로 줄인 결과를 얻었다. 이와 유사한 문제를 Boissonnat등은[9] 제어 이론의 관점에서 접근하였으며, Soueres등[10]은 이 문제에서 최단 경로의 합성문제를 다루었다. 그리고 최단 경로의 거리를 정확한 형태를 계산하는 방법을 연구하였다[11].

Dubins의 방식에 있어서 최소 경로를 구하기 위해서 가능한 모든 경로의 길이를 구하고 그 중에 최적한 것을 고르는 방식을 사용한다. 그러나 이것은 실제로 응용하는 경우에 있어서 계산 시간이 많이 소요되는 문제가 있다. 이 문제에 대해서 Shkel등[12]은 논리적인 구분 방법에 의해 최소 경로를 직접 구하는 방법을 제안하였다. 그러나 이 방법은 초기 자세의 사분면과 목표자세의 사분면에 따라 구분을 해야 하기 때문에 많은

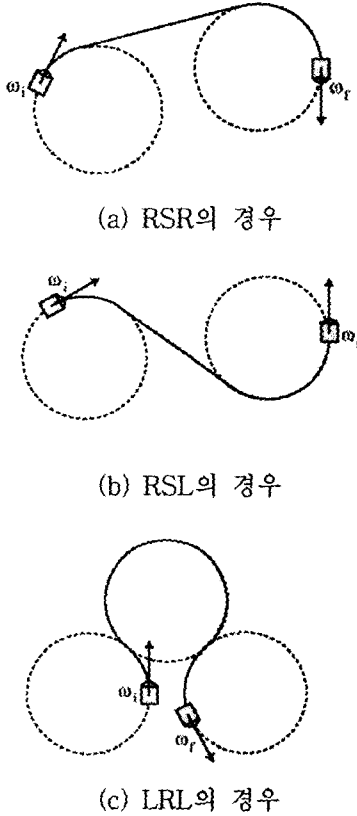
경우의 수가 발생한다는 단점이 있다.

임의의 자세(위치와 방향)에서 시작하여 원하는 자세에 도달하기 위해서 Dubins의 최소경로 모델을 적용할 때, CSC의 경로 중에서 초기지점의 원과 직선선분이 만나는 점과 직선선분과 목표지점의 원이 만나는 연결점의 좌표를 알아야 한다. 기지의 값인 초기자세의 값과 목표자세의 값을 이용하여 초기점부터의 회전각과 목표점부터의 회전각을 각각 구해야 한다. 본 연구에서는 이 값을 구하기 위해서 새로운 전개 방법으로 공식을 유도하였다. 임의의 위치에 있는 로봇을 원점으로 좌표 변환한 후에 목표자세의 LSL형과 LSR형에 대해 각각 표준형 자세를 정의하고 이 표준형 자세로부터 수식을 유도한다. 표준형 자세에서 유도된 수식은 항의 수가 매우 작아서 간단하며, 사분면에 따른 분류를 하지 않아도 된다. 2장에서는 Dubins의 모델에 대해 언급한 후에, 3장에서 본격적으로 수식을 유도하기로 한다. 3.1절에서는 원점으로 좌표 변환하는 방법을 소개하고, 3.2절과 3.3절에서는 표준형 자세에서 CSC에서의 각 좌표들을 구하는 수식을 유도한다. 또한, 3.4절과 3.5절에서는 임의의 자세에서 표준형 자세로 바꾸는 방법에 대한 소개를 한다. 4절에서는 본문의 방법의 유용성을 시물레이션을 통해 제시하며, 5장에서 결론을 맺는다.

2. Dubins' Car 모델

로봇의 자세는 $w(x, y, \theta)$ 로 나타낸다. 로봇이 놓인 평면상의 좌표는 (x, y) 로 표현하고, 그 방향은 θ 로 표현한다. Dubins[1]는 임의의 시작자세에서 목표 자세로 이동하는데 최소 경로를 나타내는 경우를 6가지 패턴으로 입증하였다. CSC형이라고 부르는 4가지의 형태와 CCC라고 부르는 2가지의 형태의 집합으로 모든 최소 경로를 표현할 수 있다고 증명하였다. R(우회전에 의한 호), L(좌회전에 의한 호), S(직선성분)의 조합으로 표현되는 6가지의 경우는 {RSR, RSL, LSR, LSL, LRL, RLR} 등이다. <그림 1>(a)는 RSR을 나타내고 있고, (b)는 RSL, (c)는 LRL을 나타내

고 있다. 나머지의 경우는 이 3가지 경우의 대칭형으로 표현된다.

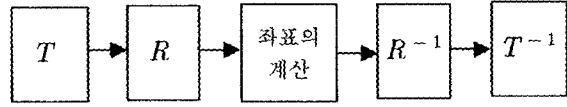


<그림 1> Dubins의 최단경로의 집합

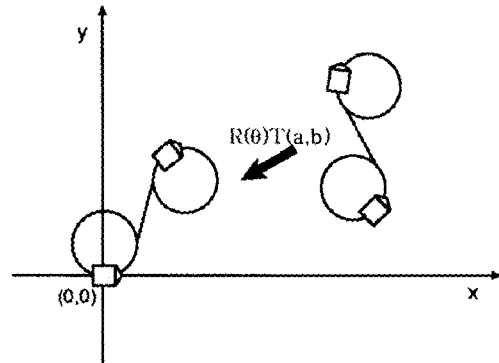
3. 최적경로를 위한 좌표계산

3.1 좌표의 변환

Dubins형의 최단 경로를 구하기 위하여 임의의 위치와 자세에서 목표지점의 위치와 자세로 이동하기 위한 로봇의 좌표를 원점으로 $T(a, b)$ 만큼 이동 시키고 원점을 기준으로 $R(\theta)$ 만큼 회전변환 한다(<그림 2>). 기준점에의 모든 연산을 수행하고 난 후에는 다시 반대로 회전변환을 만큼 한 후에 만큼 이동 변환한다.



<그림 2> 좌표의 변환의 과정



<그림 3> 원점으로 자세 변환

3.2 LSL의 경우

로봇의 초기자세(원점에서의 자세)와 목표자세(목표지점 도달한 후의 자세)는 각각 임의의 위치에 임의의 방향으로 놓여져 있다. 이것을 좌표 변환을 통하여 <그림 4>와 같은 자세로 변환한다. LSL 형은 회전-직선-회전으로 구성되어 있어 회전 반경은 ρ 인 원의 중점 C_A 를 기준으로 θ_i 만큼 시계방향으로 회전할 때, 직선과 만나는 P_A 점이 있고, 이 선분과 C_B 를 중심으로 회전하는 목표지점의 원과 만나는 P_B 점이 존재한다. 직선의 길이는 l 이다. C_B 를 중심으로 θ_f 만큼 회전하여 표준형 자세에 s 에 도달한다. t 의 자세에서 θ_d 만큼 회전된 표준형 자세 s 를 구한 후에 이것으로부터 θ_i 와 θ_f 를 구하여 P_A 와 P_B 점의 좌표를 구하는 것이 목표이다.

길이 l 은 $C_A(0, \rho)$ 와 $C_B(x, y - \rho)$ 간의 거리와 같으므로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$l = \sqrt{x^2 + (y - 2\rho)^2} \tag{1}$$

C_A 점과 C_B 점이 이루는 각도 δ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\delta = \tan^{-1} \left(\frac{|x|}{|y-2\rho|} \right) \quad (2)$$

C_A 를 중심으로 반시계방향으로 회전하는 θ_i 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\theta_i = \pi - \left(\delta + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3)$$

C_B 를 중심으로 반시계방향으로 회전하는 θ_f 는 다음과 같이 구할 수 있다. $\overline{C_A C_B}$ 와 선분 l 은 평행이고 $\overline{C_A C_B} \perp \overline{P_B C_B}$ 이므로 $\triangle C_A P_C C_B$ 에서 $\angle C_B$ 는 $(\pi - \delta)$ 이다. 이것에 의해서 θ_a 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \theta_a &= \pi - (\pi - \delta) - \frac{\pi}{2} \\ &= \delta - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (4)$$

이것에 의해서 θ_f 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \theta_f &= \theta_a + \frac{\pi}{2} = \delta - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\ &= \delta \end{aligned} \quad (5)$$

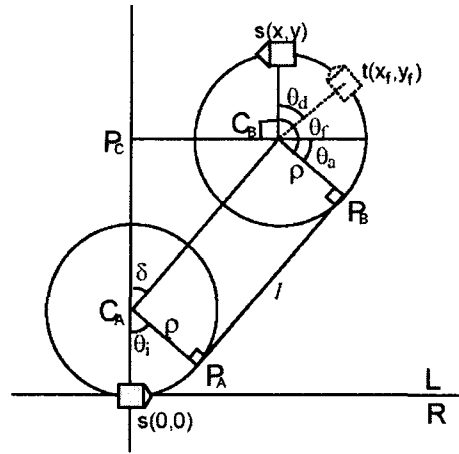
P_A 는 $C_A(0, \rho)$ 를 기준으로 원점을 θ_i 만큼 반시계방향으로 회전시켜 다음을 구한다.

$$\begin{aligned} x_A &= \rho \sin(\theta_i) \\ y_A &= \rho \cos(\theta_i) \end{aligned} \quad (6)$$

마찬가지 방법으로 $x_B = x + \rho \sin(\theta_f)$ P_B 는 $C_B(x, y - \rho)$ 를 기준으로 $s(x, y)$ 를 시계방향으로

로 θ_f 만큼 회전시키면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} x_B &= x + \rho \sin(\theta_f) \\ y_B &= y - \rho + \rho \cos(\theta_f) \end{aligned} \quad (7)$$



<그림 4> LSL형의 표준형 자세

3.3 LSR의 경우

임의의 자세를 원점으로 좌표변환 것이 <그림 5>이다. LSR형의 경우는 초기자세가 $P_i(0, 0)$ 이다. 목표자세는 $t(x_f, y_f)$ 이다. 표준형으로 변환하기 위하여 $t(x_f, y_f)$ 를 θ_d 만큼 회전 변환하면 $s(x, y)$ 가 된다. 초기자세에서의 방향은 0도이고 표준형 자세도 0도로 설정한다.

초기자세에서 로봇의 회전 반경은 ρ 이고 C_A 를 중심으로 θ_i 만큼 반시계방향으로 회전한다. 표준형 자세 $s(x, y)$ 를 C_B 를 기준으로 θ_f 만큼 반시계방향으로 회전하면 P_B 점에 도달한다. $\overline{P_A P_B}$ 의 길이는 $2l$ 이라 하고, $\overline{P_A P_C}$ 의 길이는 l 이라 하자. $\overline{C_A P_C}$ 는 거리 d 라고 한다. 거리 d 는 $C_A(0, \rho)$ 와 $C_B(x, y - \rho)$ 에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$d = \sqrt{x^2 + (y-2\rho)^2}/2 \quad (8)$$

거리 l 은 거리 d 에 의해서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$l = \sqrt{d^2 - \rho^2} \quad (9)$$

각도 β 는 다음과 같이 된다.

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\rho}{l}\right) \quad (10)$$

각도 δ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y-2\rho}\right) \quad (11)$$

각도 α 는 $\alpha = \pi/2 - \beta$ 이기 때문에 θ_i 는 다음 처럼 된다.

$$\begin{aligned} \theta_i &= \pi - \alpha - \delta \\ &= \pi/2 + \tan^{-1}\left(\frac{\rho}{l}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x}{y-2\rho}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

가 된다. 점 P_C 를 기준으로 시작점의 원 A와 목표점의 원 B는 대칭이므로 θ_i 와 θ_f 는 같다.

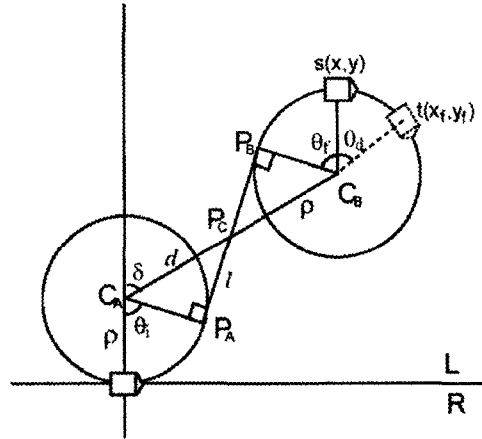
$$\theta_f = \theta_i \quad (13)$$

원점을 C_A 를 기준으로 θ_i 만큼 회전시켜서 P_A 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} x_A &= \rho \sin(\theta_i) \\ y_A &= \rho \cos(\theta_i) \end{aligned} \quad (14)$$

를 기준으로 $s(x, y)$ 를 θ_f 만큼 반시계방향으로 회전시키면 P_B 를 다음과 같이 구할 수 있다.

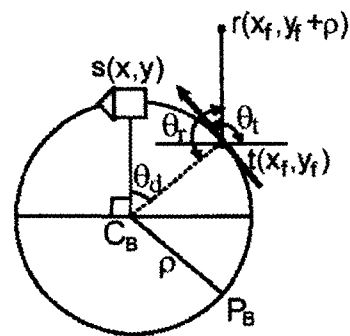
$$\begin{aligned} x_B &= x + \rho \sin(\theta_f) \\ y_B &= y - \rho + \rho \cos(\theta_f) \end{aligned} \quad (15)$$



<그림 5> LSR형의 표준형 자세

3.4 표준형 자세로 변환-LSL

LSL형에서는 목표지점의 표준형의 자세는 $s(x, y)$ 의 위치에서 $\theta_s = \pi$ 로 정하므로 목표지점 $t(x_f, y_f)$ 에서의 방향 θ_t 로 향하고 있는 로봇을 C_B 를 기준으로 반시계방향으로 θ_d 만큼 회전하여야 한다. 기지의 값은 $t(x_f, y_f)$ 와 θ_t 뿐이다. 이것을 이용하여 C_B 를 구한 후에, $s(x, y)$ 의 좌표를 구한다.



<그림 6> LSL형의 표준형으로 변환

$t(x_f, y_f)$ 점에서 y 방향으로 ρ 만큼 떨어진 위치

의 점 $r(x_f, y_f + \rho)$ 를 구한 후에 이 점을 회전시켜 C_B 점으로 이동시킨다. 이 때의 각도 θ_r 는 $t(x_f, y_f)$ 점에서 접선의 각도 θ_t 와 같은 각도 값을 갖는다(식 16).

$$\theta_r = \theta_t \tag{16}$$

그러므로, 회전각 θ_r 에 의한 원의 중심 C_B 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} x_{C_B} &= x_f - \rho \sin(\theta_t) \\ y_{C_B} &= y_f + \rho \cos(\theta_t) \end{aligned} \tag{17}$$

$s(x, y)$ 점의 좌표는 C_B 점으로부터 y 방향으로 $+\rho$ 만큼 떨어진 위치에 있으므로 다음과 같은 값이 된다.

$$\begin{aligned} x &= x_f - \rho \sin(\theta_t) \\ y &= \rho + y_f + \rho \cos(\theta_t) \end{aligned} \tag{18}$$

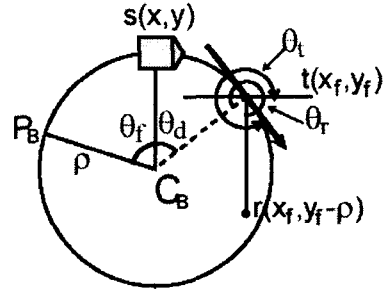
3.5 표준형 자세로 변환-LSR

LSR형에서는 목표지점의 표준형의 자세는 $s(x, y)$ 의 위치에서 $\theta_s = 0$ 로 정하므로 목표지점 $t(x_f, y_f)$ 점에서 y 방향으로 $-\rho$ 만큼 떨어진 위치의 점 $r(x_f, y_f - \rho)$ 를 구한 후에 이 점을 각도 θ_r 로 회전시켜 C_B 점으로 이동시킨다. 각도 θ_r 는 각도 θ_t 와 동일한 값이므로 이 값에 의해서 회전된 좌표 C_B 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_{C_B} &= x_f - \rho \sin(\theta_t) \\ y_{C_B} &= y_f - \rho \cos(\theta_t) \end{aligned} \tag{19}$$

$s(x, y)$ 점의 좌표는 C_B 점으로부터 y 방향으로 $+\rho$ 만큼 떨어진 위치에 있으므로 다음과 같은 값이 된다.

$$\begin{aligned} x &= x_f - \rho \sin(\theta_t) \\ y &= \rho + y_f - \rho \cos(\theta_t) \end{aligned} \tag{20}$$

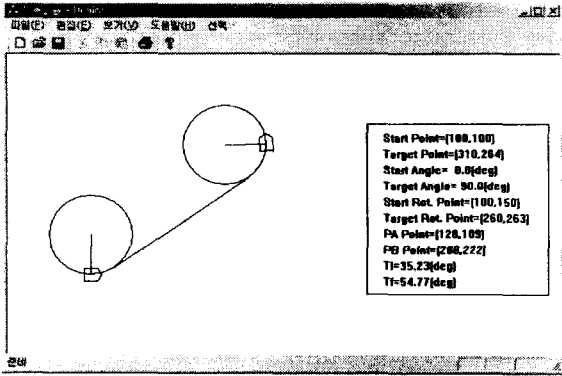


<그림 7> LSR형의 표준형으로 변환

4. 시뮬레이션

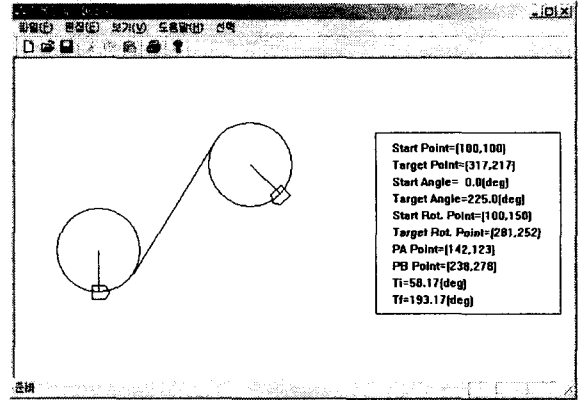
<그림 8>과 <그림 9>는 LSL형에 대한 시뮬레이션의 결과이다. <그림 8>에서 로봇의 시작점의 좌표는 (100,100), 목표지점의 좌표는 (310,264)이다. 시작점에서의 각도는 0도이고, 목표지점에서의 각도는 90도이다. 로봇의 회전반경은 50이다. 여기서의 모든 좌표는 픽셀 단위이다. 회전의 중심점은 $C_A=(100,150)$ 이고 $C_B=(260,263)$ 이다. 식(4)와 (5)식에 의해서 구한 θ_i 와 θ_f 는 각각 35.23도와 54.77도이다. 이 회전각을 식(6)과 식(7)에 적용하여 구한 시작점원과 직선이 만나는 점의 좌표는 $P_A=(128,109)$ 이고 목표점 원과 직선이 만나는 $P_B=(288,222)$ 이다.

<그림 9>에서 로봇의 시작점의 위치와 방향은 각각 (100,300), 270도이고 목표지점의 위치와 방향은 (351,171), 135도이다. 시작점의 회전의 중심점은 $C_A=(149,300)$ 이고 $C_B=(315,136)$ 이다. 시작점 원과 직선이 만나는 점의 좌표 $P_A=(114,266)$ 이다. 목표점 원과 직선이 만나는 $P_B=(279,101)$ 이다. θ_i 는 45도이고 θ_f 는 270도이다.

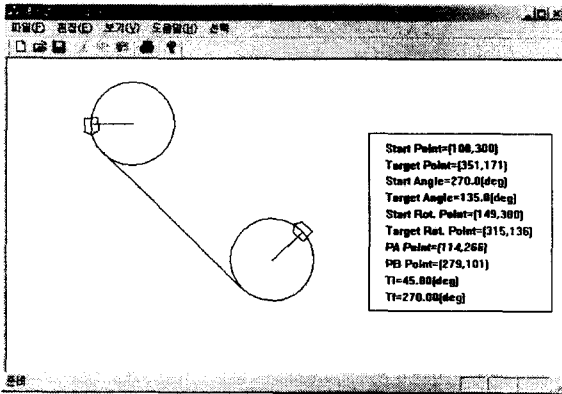


<그림 8> LSL의 경우 1

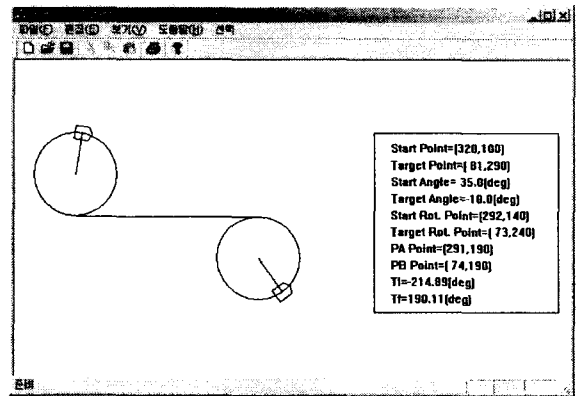
다. 목표점 원과 직선이 만나는 $P_B=(74,190)$ 이다. $\theta_i=-214.89$ 도, $\theta_f=190.11$ 도이다.



<그림 10> RSL의 경우 1



<그림 9> LSL의 경우 2



<그림 11> RSL의 경우 2

<그림 10>과 <그림 11>은 LSL형에 대한 시뮬레이션의 결과이다. <그림 10>에서 로봇의 시작점의 위치는 (100,100)이고 각도는 0도이다. 목표지점의 위치와 방향은 (317,217), 225도이다. 시작점의 회전의 중점은 $C_A=(100,150)$ 이고 $C_B=(281,252)$ 이다. 시작점원과 직선이 만나는 점의 좌표 $P_A=(142,123)$ 이다. 목표점 원과 직선이 만나는 $P_B=(238,278)$ 이다. $\theta_i=58.17$ 도, $\theta_f=192.17$ 도이다.

<그림 11>에서 로봇의 시작점의 위치는 (320,100)이고 각도는 35도이다. 목표지점의 위치와 방향은 (81,290), -10도이다. 시작점의 회전의 중점은 $C_A=(292,140)$ 이고 $C_B=(73,240)$ 이다. 시작점원과 직선이 만나는 점의 좌표 $P_A=(291,190)$ 이

5. 결론

본 논문에서는 시작 자세에서 목표 자세로 이동 가능한 경로 중 최소의 경로를 구현할 수 있는 Dubins의 자동차형 로봇에 대하여 다루었다. 이것은 CSC형에서의 C→S와 S→C의 연결점에 대한 좌표를 구하기 위해서 기지의 값인 초기자세의 값과 목표자세의 값을 이용하여 초기자세에서의 회전각과 목표자세에서의 회전각을 각각 구할 수 있는 수식을 유도하였다. 이 수식은 기존에 발표된 연구[10.11.12]들과는 다른 접근법을

이용하여 간결한 형태로 수식을 유도하였다. 이런 간결한 수식은 표준형 자세를 도입함으로써 가능했다. 목표자세에서 표준형 자세로 변환하는 방법도 제안되었다.

Dubins의 방법에서의 기본형은 CSC와 CCC형으로 구분되는데 본 연구에서 다룬 범위는 CSC로 한정되었다. CCC형이 적용되는 경우에 초기 자세의 반경과 목표자세의 반경에 겹치는 경우에 해당하는데 CSC의 기본형과는 다른 접근법이 필요하다. 또한, 전진과 후진이 가능한 Reeds와 Shepp의 방법을 본 연구의 방법과 접목시키는 연구가 필요하다.

참고문헌

- [1] L. E. Dubins, "On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents," *Amer. J. Math.*, vol. 79, pp. 497-516, 1957.
- [2] Z. A. Melzak, "Plane motion with curvature limitations," *J. of Soc. Indust. Appl. Math.*, vol. 9, no. 3, Sep., 1961.
- [3] H. G. Robertson, "Curvature and arclength", *SIAM Journal Applied Math.*, vol. 19, no. 4, Dec. 1970.
- [4] E. J. Cockane and G. W. C. Hall, "Plane motion of a particle subject to curvature constraints", *SIAM J. Control*, vol. 13, no. 1, 1975.
- [5] X.-N. Bui, P. Sou'eres, J.-D. Boissonnat, and J.-P. Laumond, "Shortest path synthesis for Dubins nonholonomic robots," in *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, 1994.
- [6] J. D. Boissonnat and X. N. Bui, "Accessibility region for a car that only move forward along optimal paths," in Res. Rep. INRIA 2181, Sophia-Antipolis, France, 1994.
- [7] J. A. Reeds and R. A. Shepp, "Optimal paths for a car that goes both forward and backward," *Pacific Journal of Math.*, vol. 2, pp. 367-393, 1990.
- [8] H. J. Sussmann and W. Tang, "Shortest paths for the Reeds-Shepp car: A worked out example of the use of geometric techniques in nonlinear optimal control," Tech. Rep. SYCON-91-10, Rutgers Univ., New Brunswick, NJ, 1991.
- [9] J.-D. Boissonnat, A. Cerezo, and J. Leblond, "Shortest paths of bounded curvature in the plane," in *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, 1992.
- [10] P. Sou'eres and J.-P. Laumond, "Shortest path synthesis for a car-like robot," in *Proc. Eur. Contr. Conf.*, 1993.
- [11] J.-P. Laumond and P. Sou'eres, "Metric induced by the shortest paths for a car-like mobile robot," in *Proc. IEEE Int. Conf. Intell. Robots Syst.*, 1993.
- [12] A. M. Shkel and Vladimir Lumelsky, "Classification of the Dubins set", *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 34, pp. 179-202, 2001.

● 저자소개 ●



조규상

1986.2 한양대학교 공과대학 전자공학과 학사

1989.2 한양대학교 산업대학원 전자공학 석사

1997.2 한양대학교 대학원 전자공학과 박사

1996~ 현재 동양대학교 컴퓨터학부 교수

관심 분야 : 이동로봇의 경로계획 알고리즘, 자동주행, 위치인식 및 충돌회피 문제 및 디바이스 드라이버 프로그래밍.