韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2003, 11. 제 42권, 제 5호, 707-723.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2003, Vol. 42, No. 5, 707-723.

고등학교 수학에서 수열의 극한개념의 지도에 관한 연구

김 기 원 (신라대학교)
왕 수 민 (거제제일중학교)

Ⅰ. 서 론

수학교육은 어떤 기본 개념을 바탕으로 좀더 차원 높은 개념을 이해하는 과정이어서 기본 개념이 미비한 학생이 새로운 수학 개념을 학습할 때에는 결정적인 어려움을 겪을 수 있다. 특히 극한 개념은 고등수학을 하는데 밑바탕이 되는 아주 중요한 개념으로 정확한 학습이 필요하다.

함수 개념과 더불어 현대 수학을 대표하는 핵심 개념의 하나인 수학적 극한 개념은 무한 근사 과정의 최종 산물을 수학화한 개념으로, 함수에 대한 지식을 확장시켜주고, 현대 수학에서 핵심적인 역할을 하는 무한 개념 및 그것을 기초로 하는 다른 많은 개념을 이해하는 데에 토대가 되어주는 개념이다.

특히, 극한 개념은 수학의 유용성을 잘 보여주는 미적분학의 기초가 되는 개념으로, 미적분 개념의 이해는 극한 개념의 이해에서 시작된다고 말할 수 있다. 오늘날 미적분학이 수학뿐만 아니라 물리학 · 생물학 등과 같은 자연과학 및 공학 분야, 경제학 · 심리학을 비롯한 사회과학 분야에 널리 응용되는 기본적인 도구적 지식으로서 이들 분야에 입문하는 데에 필수적인 지식이라는 점에서 이런 분야로 진출하려는 학생들에게 그 기초 개념인 극한 개념에 대한 정확한 이해는 필수적이다(박선화, 2001).

지금까지 극한 개념의 지도 방식을 살펴보면 직관적인 형태, 개념을 여러 번 반복해서 설명하는 형태, 비슷한 유형의 문제를 많이 풀어보게 하는 형태뿐이었다.

* 2002년 3월 투고, 2003년 11월 심사 완료.
* ZDM 분류 : I34
* MSC2000 분류 : 97D70
* 주제어 : 수열의 극한개념 지도.

따라서 본 논문에서는 극한 개념을 알아보기 위하여 제7차 수학과 교육과정 해설서와 고등학교 교과서를 살펴본 후, 극한 개념을 이해하는 데에 나타나는 학생들의 사고의 특성을 살펴보고, 그것에 근거하여 극한 개념에 대한 학생들의 이해를 개선하기 위한 학습지도 방법에 대하여 연구하였다. 그리고 학생들의 극한 개념의 이해 정도에 관한 설문조사를 통하여 어떤 방법이 극한 개념을 학생들에게 지도하기에 효과적인지 알아보는데 그 목적이 있다.

Ⅱ. 극한개념의 이해와 학습 지도 방법

1. 수열의 극한의 정의

먼저 고등학교에서 다루어지는 극한 개념에 대해서 살펴보면, 제7차 수학과 교육과정 해설서에서는 극한 개념의 지도의 의의와 지도 방향을 다음과 같이 제시하고 있다(교육부, 1997b).

(1). 지도의 의의

미적분학은 생활 주변에서의 유용성과 교육적 가치가 크므로 그 초보적인 내용을 고등학교 과정에서 지도하고 있고, 그에 따라 미적분학의 토대로 되어 있는 극한 개념을 지도하고 있다.

수열의 극한의 정의로 ε-N 논법($\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow$ 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여, 어떤 자연수 N이 존재하여 $k>N$이면 $|a_k - a| < \varepsilon$이 성립한다.)과 같은 엄밀한 방법이 있으나, 이런 정의를 '수학 Ⅰ'과정 학생들이 이해하기는 힘들다고 판단되기 때문에 이 방법을 사용하여 지도할 수는 없다. 따라서 극한 개념은 구체적인 보기들과 그래프를 사용하여 직관적으로나마 학생들이 잘 이해할 수 있도록 지도해야 한다. 극한 개념을 잘 이해시키는 것은

그에 연계된 함수의 연속, 미분, 적분의 학습에 매우 중요한 사항이다.

(2). 내용 개요

① 무한수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

수열의 극한의 정의로 ε-N 논법과 같은 엄밀한 방법이 있으나, 이런 정의의 도입은 여기서는 가능하지 않다. 따라서 수열의 극한의 정의는 구체적인 수열의 그래프와 "한없이 가까이 간다"는 표현을 사용하여 직관적으로 잘 이해할 수 있도록 도입한다. 특히 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$에서 n의 특별한 몇 경우에 대하여 $|a_n - \alpha|$의 값을 살펴보고, 항의 번호 n을 크게 할 때 a_n의 값이 어떻게 변하는지를 살펴서 수열의 수렴, 발산을 이해하게 한다. 특히 기호 ∞를 수로 다루지 않도록 유의한다.

② 무한수열의 극한에 관한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

무한수열의 극한에 관한 기본 성질을 보기를 통해 직관적으로 이해하게 하고, 이런 기본 성질들을 이용하여 극한값을 구하게 한다.

③ 무한등비수열의 극한값을 구할 수 있다.

무한등비수열이 수렴 또는 발산하는 경우를 이해하게 하고, 수렴하는 경우에 그 극한값을 구하게 한다.

이상의 교육과정 해설서를 보면, 우리나라 고등학교에서는 직관적 정의로 극한 개념을 도입하도록 하고 있다. 즉, 직관적 정의로 극한 개념을 이해한 후, 극한값을 계산하는 것에 중점을 두고 있다고 할 수 있다.

고등학교 수학 교과서에서 수열의 극한에 대한 정의는 다음과 같이 주어진다(윤옥경 · 윤재한 · 허원 · 손문구 · 송병회, 1995).

무한수열의 수렴

일반적으로, 무한수열 $\{a_n\}$에서 항의 번호 n이 한없이 커질 때, a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 무한수열 $\{a_n\}$은 'α에 수렴한다'고 하고, α를 무한수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라고 한다.

무한수열 $\{a_n\}$이 α에 수렴할 때, 기호

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 또는 $n \to \infty$ 일 때 $a_n \to \alpha$

로 나타낸다.

무한수열의 발산

무한수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않을 때, $\{a_n\}$은 발산한다고 한다.

일반적으로, 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, a_n이 한없이 커지면, 수열 $\{a_n\}$은 '양의 무한대로 발산한다' 또는 '극한은 양의 무한대이다' 라고 말하며, 기호

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 또는 $n \to \infty$ 일 때 $a_n \to \infty$

로 나타낸다.

그리고, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않을 때, 수열 $\{a_n\}$은 진동한다고 한다.

이 때, 수열 $\{a_n\}$의 극한은 존재하지 않는다.

이 정의에서는 '한없이 가까워진다'와 같은 일상적 표현을 사용하고 있다. 그러나 이 표현은 정확한 표현이라고 할 수 없다. 수열의 극한 개념의 핵심적 의미는 수열의 항을 따라서 충분히 멀리 나아갈 때, 그 수열의 항들이 어떤 확정된 수로부터 우리가 원하는 만큼 그 차가 작아지면, 그 확정된 수를 주어진 수열의 극한이라고 하는 것이다. 이것은 '극한값을 중심으로 가지는 어떤 구간을 잡더라도 유한개의 항을 제외한 나머지 무한개의 항은 그 구간 안에 놓여 있다.'는 뜻임을 알 수 있다.

이런 핵심적 의미는 직관적 정의에서는 분명하게 드러나지 않는다. 그러므로 다음 절에서는 극한 개념을 이해하는 데에 나타나는 학생들의 사고의 특성을 살펴보도록 하겠다.

2. 학생들의 극한 개념의 이해의 특성

어떤 특정한 맥락에서는 성공적이고 유용했던 지식으로, 따라서 학생의 인지구조의 일부가 되었지만 새로운 문제상황이나 더 넓어진 맥락에서는 부적합해진 지식을 '인지적 장애'라고 한다(우정호, 2000).

박선화(2001)의 연구에서는 극한 개념에 대한 학생들의 오개념 및 인지적 장애의 형성에 영향을 주는 요인으로 인식론적 요인, 교수학적 요인, 심리발생적 요인을 들고 있는데 이를 요약하면 다음과 같다.

(1) 인식론적 요인

인식론적 요인으로는 첫째, 일상어의 영향을 들 수 있는 데 수학에는 '집합', '극한', '무한' 등과 같은 여러 가지 일상적인 언어가 그와 똑같은 의미는 아니라고 하더라도 많이 사용되고 있다. 그러한 관념이 수학적 사고에 적지 않은 영향을 미치게 되는데 새롭게 도입된 수학적 개념과 뒤섞여서 부적절한 개념 이미지를 형성하게 되어 수학학습에 장애로서 작용하게 된다.

둘째는 무한 직관의 영향으로서 직관은 무한 개념이나 극한 개념의 학습에 장애가 된다.

학생들이 '무한에 가까워질 수 있다', '무한에 도달할 수 있다'고 생각하는 것은 모두 비수학적인 무한 개념에서 비롯된 것이다. 이러한 비수학적인 무한 개념이 "수열 1, 2, 3, 4, …은 ∞에 한없이 가까워지므로, 극한값은 ∞이다.", "수열의 극한은 수열의 마지막 항이다."와 같은 오개념의 원인이 되고 있다.

(2) 교수학적 요인

교수학적 요인으로는 첫째, 교과서 및 교육과정의 영향을 들 수 있다. 교과서는 학생들이 지식을 획득하기 위한 일차적 자료이므로, 교과서에 제시되어 있는 극한의 정의나 문제들은 학생들의 개념에 가장 직접적이고 중요한 영향을 미친다고 볼 수 있다. 우리나라 고등학교에서는 극한 개념을 직관적인 정의에 따라, 즉 'n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n이 한없이 가까이 가는 수'라고 가르치고 있다. 이 정의에서 사용된 '가까워진다'라는 표현의 일상적 의미인 '가깝게 접근하지만 같아질 수 없는 것'이라는 의미의 영향으로 학생들은 '극한이란 수열의 항과 같은 값을 가질 수 없다.'라는 오개념을 가질 수 있다. 즉, 고등학교에서 가르쳐지는 직관적 정의는 학생들의 이러한 오개념의 근원이 될 수 있다. 극한에 대한 정의 외에도 교과서의 설명도 학생들의 오개념 형성에 영향을 줄 수 있다.

둘째로는 수학적 표현의 영향으로서 학생들의 오류 및 오개념에는 수학적 표현의 영향도 있을 수 있다. 수학에서는 수열 $\{ a_n \}$이 양의 무한대로 발산하는 경우를 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ (또는 } n \to \infty\text{일 때, } a_n \to \infty)$$

로 나타낸다. 이것은 수렴하는 수열의 표현과 매우 유사하게 표현된 것으로, 마치 ∞가 수처럼 보인다. 이것은 '수열 1, 2, 3, 4, …은 ∞로 한없이 가까워지므로, 극한값은 ∞이다.'와 같은 오개념 형성의 원인이 될 수 있다.

셋째는 교사의 영향을 들 수 있다. 즉, 교사가 교과서의 지식을 학생들이 이해할 수 있는 형태로 전달하고자 하는 과정에서 수학적 지식이 변형되어 학생들에게 전달될 수 있고 비수학적이거나 잘못된 생각이 학생들에게 전달될 수 있다.

(4) 심리학적 요인

심리학적 요인으로는 첫째, 도구적 이해의 영향을 들 수 있고, 학생들은 학습의 과정에서 개념의 관계적 이해를 추구하기보다는 쉽게 기억하고 적용할 수 있는 도구적 이해 쪽으로 나아가는 경우가 많다. 도구적 이해는 주어진 식의 의미는 모르는 채 규칙만 적용하는 것이다. 그럴 경우 학생들이 가진 지식은 맹목적인 절차적 지식이라고 할 수 있다. 특히 고등학교에서의 극한의 지도처럼 극한값을 구하는 학습이 강조되는 분야에서는 이러한 현상이 더욱 두드러지게 나타난다.

둘째는 오개념인 선행 개념의 영향을 들 수 있는데, 학생들이 잘못된 선행 개념을 갖고 있을 경우, 학생들은 극한 개념의 이해나 적용에서 실패하거나 어려움을 겪을 수 있다. 다음의 두 식

$$\frac{c}{0} = 0 (c \neq 0), \quad \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

와 같은 오개념인 선행 개념이 새로운 극한 개념의 이해를 방해하거나 극한 개념을 잘못 적용하게 할 수 있다.

셋째로는 개념의 일부분에만 주목하는 경향으로 학생들이 수열의 규칙을 발견하는 데에만 초점을 두고 수열의 항의 값의 변화에 주목하지 못한 것, 수열의 극한은 수열이 가까워지는 값이라는 생각에만 주목하고 수열이 하나의 값으로 가까워져야 한다는 사실에는 주목하지 못한 것, 수열에 나타난 숫자에만 주목하고 수의 크기에는 주목하지 않는 것 등은 개념의 부분적인 특징에만 주목

하여 생각하고, 개념의 모든 측면을 고려하지 못한 것이다.

3. 극한 개념의 이해 개선을 위한 학습지도 방법

이제 학생들이 극한 개념을 쉽게 이해할 수 있는 학습지도 방법에 대해 알아보자. 극한 개념의 이해 개선을 위한 학습지도 방법으로 먼저 컴퓨터 그래픽 기능을 이용한 방법, 극한 개념과 밀접한 관련을 갖는 지식을 활용, 수직선 · 좌표를 이용한 방법(박선화, 1998)을 살펴보고, 수직선 · 좌표를 이용한 방법을 좀더 발전시키면 도입할 수 있는 $\varepsilon-N$ 논법(이상도, 2000)을 살펴보도록 하겠다. 또한 본 논문에서는 이러한 네 가지 방법에 컴퓨터를 이용한 수치적 방법, 특히 엑셀 프로그램을 이용하여 극한값을 구하고 그래프를 그려서 쉽게 이해할 수 있는 방법을 제시하도록 한다.

(1) 컴퓨터 그래픽 기능을 이용한 방법

시각적으로 잘 보여주는 컴퓨터 그래픽은 극한 개념을 이해시키는데 효과적이라 할 수 있다. 프랙탈이나 카오스 그림, 반복함수를 이용함으로써 다양한 자료를 제시할 수 있다. 이 자료의 장점은 학생들이 극한 과정을 시각적으로 확인할 수 있으므로 학생들의 마음속에 "함수가 점점 더 많이 시행될수록 어떤 대상에 점점 더 가까워진다."라고 하는 극한 과정에 대한 심상을 쉽게 형성할 수 있다.

그러나 프랙탈의 구성 과정에 너무 집중하다 보면, 학생들로 하여금 극한 과정에만 초점을 두게 하고, 그것의 최종 결과에는 주목하지 못하게 할 수 있다. 따라서 교사는 학생들에게 이 과정을 역으로 생각하도록 하여, 학생들에게 "어떤 대상으로 점점 더 가깝게 접근해 갈 수 있다."는 심상도 심어주도록 한다.

(2) 극한 개념과 밀접한 관련을 갖는 지식을 활용

학생들이 이미 배웠거나 잘 알고 있는 기존의 지식 중에서 수렴하는 수열 개념을 바탕으로 하고 있는 지식, 그 중에서도 특히 극한 개념을 내포하고 있는 지식이나 극한 개념과 밀접한 관련을 맺는 지식을 활용하는 방법이다. 이러한 예로서 학생들이 초등학교에서 배운 원의 넓이 구하기로 극한 개념에 대한 심상을 형성해 줄 것으로 생각된다. 극한 개념은 새로운 개념이므로 학생들에게 충분한 예를 제공하여 자신의 개념을 자주 적용해 보고 익숙하게 하는 것이 필요하다.

(3) 수직선, 좌표를 이용한 방법

좌표 평면 모델과 수직선 모델을 이용하여 극한 개념을 설명할 수 있다. 좌표평면 모델은 "n이 점점 더 커지면, 수열 a_n이 점점 더 뭔가에 가까워진다"는 것을 잘 보여준다. 그러나 좌표평면 모델은 학생들에게 극한 과정에 더 초점을 두게 하고, 극한값에 별로 주목하지 못하게 하는 단점이 있다.

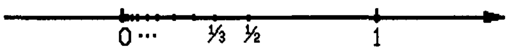
한편, 수직선 모델은 극한 과정보다는 극한값에 집중하게 하는 장점이 있다. 극한값이란 직관적으로 말하면, '그 값 주위에 수열의 항들이 빽빽하게 모여 있는 것'이고, 좀더 엄밀하게 말하면 극한값을 중심으로 어떻게 구간을 잡아도 유한 개의 항을 제외한 나머지 모든 항들이 그 구간 내에 들어오는 값이다. 이것은 수열의 항의 값과 극한값의 관계를 명확하게 보여준다. 또한 수직선 모델을 이용하면 상수열의 극한이나, 극한값을 수열의 항의 일부로 갖고 있는 수열의 경우에도 극한값에 대해서 쉽게 설명할 수 있는 장점이 있으며, 발산하는 수열에 대해서도 설명을 도입하기가 쉽다. 또한 수직선 모델은 극한값을 중심으로 임의의 작은 구간을 생각하게 하므로, 수직선 위에 그것의 위치를 표시할 수 없고 구간을 잡을 수 없는 ∞를 극한값이라고 말하지 않을 것이다. 그리고 위와 같은 수열에 대해서도 그것의 극한값을 쉽게 갈등 없이 설명할 수 있게 한다.

이 두 모델을 모두 활용하여 수열의 극한을 설명할 수 있다. 좌표평면 모델에서는 n이 점점 더 커지면, 수열 a_n은 어떤 하나의 실수 α에 점점 더 가까워지는 것임을 관찰하게 하고, 그것이 수직선 위에서는 'α를 중심으로 아무리 작은 구간을 잡아도 유한개의 항을 제외한 나머지 무한개의 항이 그 구간 안에 들어온다.'는 것임을 관찰하게 한다. 그리고 '그러한 α를 수열 a_n의 극한값이라고 한다.'는 형태로 수열의 극한에 대한 정의를 도입하도록 한다. 특히 주의할 것은 극한값은 수열이 가깝게 다가가는 '목표'가 되는 대상을 가리키는 것이지 수열이 도달하는 값이 아님을 분명히 하는 것이 필요하다.

(4) $\varepsilon - N$ 논법

고등학생에게 극한 개념을 $\varepsilon - N$ 논법($\lim_{n\to\infty} a_n = a$ $\Leftrightarrow$ 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여, 어떤 자연수 N이 존재하여 $k > N$이면 $|a_k - a| < \varepsilon$이 성립한다.)으로 설명하는 것은 다소 무리가 있다. 하지만 쉬운 예제를 통해서 소개 정도는 할 수 있다.

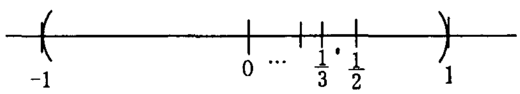
수열 $\{ \frac{1}{n} | n$은 자연수$\}$의 극한값을 생각해 보자. 이 수열의 극한값은 0이다. 즉 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ 이다. 이것을 수직선 위에 나타내어보자.



<그림 1> 수열 $\{ \frac{1}{n} \}$ 의 수직선 그래프

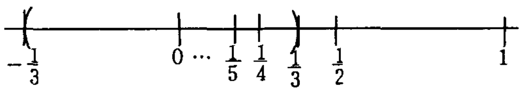
이제 0을 중심으로 반경이 ε인 개구간을 생각하여 수열의 수렴성을 알아보자.

ε=1로 택하면 1을 제외한 수열 $\{ \frac{1}{n} \}$ 의 모든 항이 개구간 안에 존재한다.



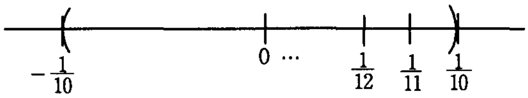
<그림 2> 수열 $\{ \frac{1}{n} \}$ 의 수직선 그래프에서 ε=1인 개구간 표시

$\varepsilon = \frac{1}{3}$로 택하면 $\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \}$을 제외한 무한개의 모든 항이 개구간 안에 들어간다.



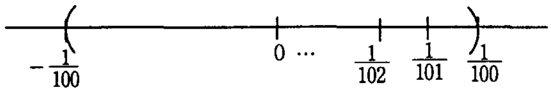
<그림 3> $\varepsilon = \frac{1}{3}$인 개구간 표시

$\varepsilon = \frac{1}{10}$로 택하면 $\{ 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{9}, \frac{1}{10} \}$을 제외한 무한개의 모든 항이 개구간 안에 들어간다.



<그림 4> $\varepsilon = \frac{1}{10}$인 개구간 표시

$\varepsilon = \frac{1}{100}$로 택하면 $\{ 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{99}, \frac{1}{100} \}$을 제외한 무한개의 모든 항이 개구간 안에 들어간다.



<그림 5> $\varepsilon = \frac{1}{100}$인 개구간 표시

따라서 극한값 0을 중심으로 ε을 임의의 양의 실수로 정하더라도 유한개를 제외한 나머지 모든 항들이 개구간 안에 존재함을 알 수 있다. 그러므로 수열 $\{ \frac{1}{n} \}$ 의 극한값은 0이다. 즉, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$이다.

이제 위의 내용을 식으로 나타내어 보자.

① $\varepsilon = 1$이라 하면,

$\varepsilon = 1$에 대하여 $|x_N - 0| < 1$을 만족하는 자연수 N이 존재하고 $n \geq N$인 모든 n에 대하여 $|x_n - 0| < 1$이 성립한다.

② $\varepsilon = \frac{1}{3}$이라 하면,

$\varepsilon = \frac{1}{3}$에 대하여 $|x_N - 0| < \frac{1}{3}$을 만족하는 자연수 N이 존재하고, 또 $n \geq N$인 모든 자연수 n에 대하여 $|x_n - 0| < \frac{1}{3}$이 성립한다.

③ $\varepsilon = \frac{1}{10}$이라 하면,

$\varepsilon = \frac{1}{10}$에 대하여 $|x_N - 0| < \frac{1}{10}$을 만족하는 자

연수 N이 존재하고, 또 $n \geq N$인 모든 자연수 n에 대하여 $| x_n - 0 | < \frac{1}{10}$ 이 성립한다.

④ $\varepsilon = \frac{1}{100}$ 이라 하면,

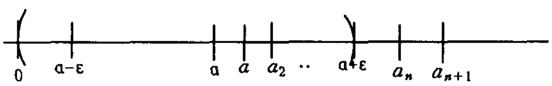
$\varepsilon = \frac{1}{100}$ 에 대하여 $| x_N - 0 | < \frac{1}{100}$ 을 만족하는 자연수 N이 존재하고, 또 $n \geq N$인 모든 자연수 n에 대하여 $| x_n - 0 | < \frac{1}{100}$ 이 성립한다.

위 ①, ②, ③, ④에서 ε을 임의의 양의 실수로 정하더라도 ε에 대하여 $| x_N - 0 | < \varepsilon$을 만족하는 자연수 N이 존재하고 $N \leq n$인 모든 자연수 n에 대하여 $| x_n - 0 | < \varepsilon$을 만족한다. 그러면 수열 $\{ \frac{1}{n} \}$ 의 극한값은 0이다. 즉 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$이다.

이 식을 일반화해 보자.

임의의 양의 실수 ε에 대하여 $| x_N - a | < \varepsilon$을 만족하는 자연수 N이 존재하고 $N \leq n$인 모든 자연수 n에 대하여 $| x_n - a | < \varepsilon$을 만족하면 수열 $\{ x_n \}$ 은 극한값 a를 갖는다. 즉 $\lim_{n \to \infty} x_n = a$이다.

다음은 수열 $\{ n \mid n \in \mathrm{N} \}$ 이 발산함을 $\varepsilon - N$ 논법을 이용하여 소개해 보자. 임의의 a를 중심으로 임의의 양의 실수 ε에 대하여 반경이 ε인 개구간을 생각하면, 유한개의 항을 제외한 무한개의 항들이 개구간 밖에 존재하므로 a로 수렴 할 수 없다. 즉, 수열은 발산한다.



<그림 6> 수열 $\{ n \}$ 의 수직선 그래프에서 반경이 ε인 개구간 표시

이것을 일반화하면 다음과 같이 소개할 수 있다.

수열 $\{ n \mid n \in \mathrm{N} \}$ 이 임의의 a, 임의의 양의 실수 ε에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 N이 존재하지 않으므로 수열은 발산한다.

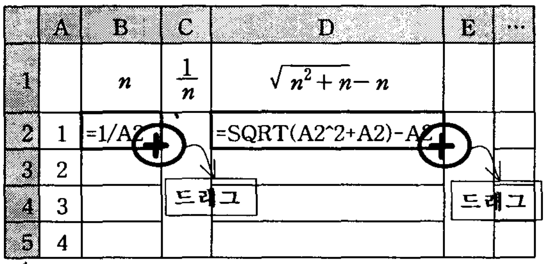
(조건) $n \geq N$인 모든 자연수 n에 대하여 $| x_n - a | \leq \varepsilon$

(5) 컴퓨터를 이용한 수치적 방법

전자계산기나 컴퓨터 프로그램 중 엑셀 프로그램을 이용하여 수열의 극한값을 직접 계산해 보고 그래프를 그려봄으로써 수열의 극한을 좀더 쉽게 이해할 수 있다.

우선 엑셀을 이용하여 극한값을 계산하는 방법과 그래프 그리는 방법을 살펴보자. <그림 7>에서처럼 A열에 n의 값을 입력한 후 B열에 구하고자 하는 계산식을 입력한다. 그런 후 B2셀에 마우스 포인트가 +표시가 되게 한 후 드래그한다. 그러면 구하고자 하는 값이 계산된다.

그래프는 계산표를 작성한 다음 작성된 계산표에서 그래프 작성 영역을 선택한다. 그런 다음 챠트마법사에서 값을 점으로 표시하는 분산형을 사용하여 그래프를 완성하면 된다.



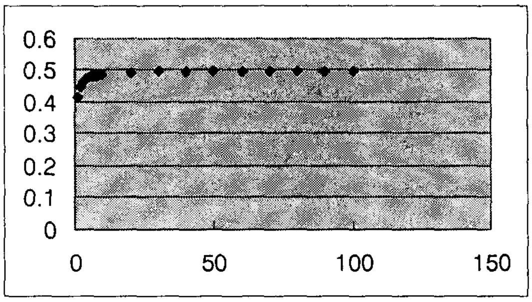
	A	B	C	D	E	···
1		n	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n^2+n}-n$		
2	1	=1/A2		=SQRT(A2^2+A2)-A2		
3	2					
4	3		드래그		드래그	
5	4					

<그림 7> 엑셀을 이용하여 수열의 값을 구하는 방법

예를 들어, n이 자연수일 때 수열 $\{\sqrt{n^2+n}-n\}$, $\left\{\frac{2^{n+1}}{3^n}\right\}$, $\{2^n\}$의 극한값을 생각해 보자.

<표 1> Excel을 이용하여 계산한 수열 $\{\sqrt{n^2+n}-n\}$의 값.

n	$\sqrt{n^2+n}-n$
1	0.414214
2	0.44949
3	0.464102
4	0.472136
5	0.477226
6	0.480741
7	0.483315
8	0.485281
9	0.486833
10	0.488088
100	0.498756
1000	0.499875
10000	0.499988
100000	0.499999
1000000	0.5



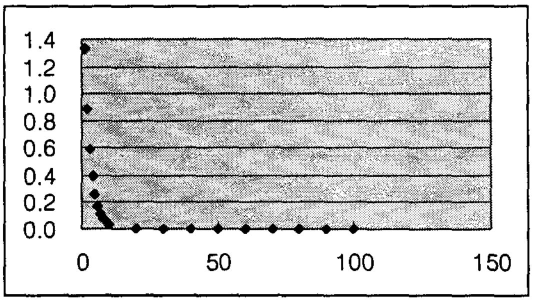
<그림 8> Excel을 이용하여 그린 수열 $\{\sqrt{n^2+n}-n\}$의 그래프.

<표 1>과 <그림 8>은 엑셀을 이용하여 $\sqrt{n^2+n}-n$의 값을 계산하고 그 그래프를 그린 것이다. n의 값이 커질수록 $\sqrt{n^2+n}-n$의 값은 $\frac{1}{2}$에 가깝게 되고 수열 $\{\sqrt{n^2+n}-n\}$의 극한값은 $\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.

역시 <표 2>와 <그림 9>는 엑셀을 이용하여 $\frac{2^{n+1}}{3^n}$의 값을 계산하고 그래프를 그린 것이다. n의 값이 커질수록 $\frac{2^{n+1}}{3^n}$의 값은 0에 가깝게 되고 수열 $\left\{\frac{2^{n+1}}{3^n}\right\}$의 극한값은 0임을 이해하기 쉽다.

<표 2> Excel을 이용하여 계산한 수열 $\left\{\frac{2^{n+1}}{3^n}\right\}$의 값.

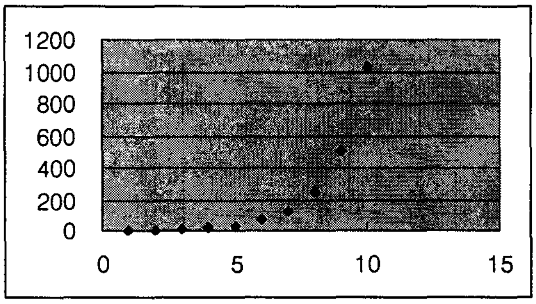
n	$\frac{2^{n+1}}{3^n}$
1	1.3333333
2	0.8888889
3	0.5925926
4	0.3950617
5	0.2633745
6	0.1755830
7	0.1170553
8	0.0780369
9	0.0520246
10	0.0346831
20	0.0006015
30	0.0000104
40	0.0000002
50	0.0000000



<그림 9> Excel을 이용하여 그린 수열 $\left\{\frac{2^{n+1}}{3^n}\right\}$의 그래프.

<표 3> 엑셀을 이용하여 계산한 수열 $\{2^n\}$의 값.

n	2^n
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
20	1048576
30	1073741824
40	1099511627776
50	1125899906842620



<그림 10> 엑셀을 이용하여 그린 수열 $\{2^n\}$의 그래프.

<표 3>과 <그림 10>은 엑셀을 이용하여 2^n의 값을 계산하고 그래프를 그린 것이다. n의 값이 커질수록 2^n의 값은 한없이 커지고 수열 $\{2^n\}$은 발산함을 알 수 있다.

전자 계산기나 컴퓨터를 이용하여 극한값을 계산하면 학생들이 극한값을 쉽게 구할 수 있다. 하지만 여기에 너무 집중하다 보면, 학생들로 하여금 최종 결과에만 초점을 두고, 극한 과정에는 주목하지 못하게 할 수 있다. 따라서 교사는 극한값을 쉽게 구할 수 없는 복잡한 수열에 대해서만 극한값을 직접 계산함으로써 학생들이 극한을 쉽게 이해하도록 할 수 있다.

III. 극한 개념의 이해 정도에 관한 조사

이 장에서는 학생들의 극한 개념의 이해 정도를 살펴보기 위해 실시한 설문조사의 결과를 분석하였다.

설문조사는 부산 · 경남지역 고등학교 3학년 100명을 대상으로 하여 정규 수업시간이 끝난 후 담임 교사의 협조 하에 실시하였다. 그리고 학생들이 극한을 이해하는데 겪는 어려움을 학생들의 극한 개념의 이해의 특성에서 살펴본 무한개념에 대한 교수학적 요인과 심리학적 요인을 중심으로 분석하였다. 각 문항별 반응은 빈도수로 산출하였으며, 자유 기술식 문항은 응답형식으로 인해 응답된 내용에 의거하여 서로 유사한 것을 한데 모아 묶는 분류방법을 사용하여 분석하였다.

수학교육에 있어서 수학에 대한 흥미도와 복습여부는 큰 영향을 미칠 수 있다. 수학에 흥미가 있고 또 복습을 열심히 한다면 개념 이해 및 문제해결 성취도가 높을 것이므로, 먼저 수학에 대한 흥미정도와 문제해결, 복습 여부를 물어보았다.

먼저 수학에 대한 흥미도 질문의 결과 '상' 21명, '중' 55명, '하' 24명으로 나타났다. 또 모르는 문제가 나오면 어떻게 해결하는지에 대한 질문의 결과 '오랫동안 생각한다' 43명, '조금 생각 후 포기한다' 53명, '바로 포기한다' 4명으로 나타났다. 그리고 복습을 하는지에 대한 질문의 결과 '열심히 한다' 6명, '조금 하는 편이다' 64명, '전혀 하지 않는다' 30명으로 나타났다.

이러한 결과로 대부분의 학생들이 수학에 대해 흥미는 적지만 문제해결을 위해 노력한다는 것을 알 수 있다. 그리고 대부분의 학생들이 그 날 배운 내용을 열심히 복습하지는 않는다는 것을 알 수 있다.

이런 결과가 나온 이유는 우리나라의 대학입시제도의 영향으로 학생들이 수학에 대한 흥미도는 낮지만 대학에 가기 위한 수단으로 수학을 공부하기 때문이라고 생각된다.

수열의 극한 이해에 어려움이 있는가에 대한 결과로 '있다' 40명, '조금 있다' 55명, '없다' 5명으로 나타났다. 이러한 결과로 대부분의 학생들이 수열의 극한을 이해하는데 어려움이 있음을 알 수 있었고, 구체적으로 수열의 극한 이해에서 어려운 점을 <표 4>에서와 같이 기술하고 있다.

<표 5>는 극한이 무엇이라고 생각하는지에 대한 질문의 결과로 84명이 응답하였으며, 다수의 학생들이 극한에 대한 정확한 개념의 이해가 부족하다는 것을 알 수 있다. 또한 개념의 일부에만 주목하여 무언가가 한없이 커지는데 수열의 항의 번호가 한없이 커지는 것이 아니라 수가 점점 커지는 것으로 오인하고 있음을 알 수 있다.

∞ 개념은 극한 개념을 이해하기 위한 중요한 개념으로 만약 ∞ 개념이 정확히 정립되어 있지 않다면 극

<표 4> 수열의 극한 이해에서 어려운 점

수열의 극한 이해의 어려운 점		빈도수(명)
극한, 수렴, 발산 등 용어의 이해가 어렵다		25
'한없이 커진다', '한없이 가까워진다'의 의미를 이해하지 못한다		7
수렴을 한다면 어떤 값으로 수렴하는지 알 수가 없다		35
기타	공식적용이 어렵다	33
	응용문제가 어렵다	
	그냥 어렵다	

<표 5> 극한이 무엇이라고 생각하는가

극한이 무엇이라고 생각하는가?		빈도수(명)
수열 a_n에서 n이 한없이 커질 때, 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 a_n는 α에 수렴한다고 한다		28
한 점에 대해 한없이 가까워지는 것		13
기타	수열이 일정한 값까지 커지는 것	43
	일정한 규칙을 가진 수의 끝	
	어떤 수가 한없이 증가하여 어떤 값에 도달하면 수렴	

에 대한 많은 오개념이 생길 수 있다. 따라서 ∞가 무엇을 뜻하는지 알고 있는지와 ∞의 뜻을 물어보았다. 그 결과 <표 6>에서와 같이 다수의 학생들이 ∞의 뜻을 안다고는 하였지만 실제로 정확한 뜻을 제대로 알지 못한다는 것을 알 수 있다. 이는 학생들이 극한 개념을 이해하는데 큰 장애가 될 수 있으므로 정확한 지도가 필요하다.

<표 6> ∞의 뜻

∞의 뜻	빈도수(명)	∞의 뜻 쓰기	빈도수(명)
안다	96	수가 한없이 커지는 것	44
		무한대	25
		수가 한없이 커지는 상태를 기호로 나타낸 것	4
		큰 수	4
		기타	19
모른다	4		

다음으로 학생들이 극한에 대한 어떤 오개념을 가지고 있는지 알아보기 위하여 극한 기호의 뜻을 쓰게 하였다. 그 결과로 <표 7>은 학생들이 수학적 표현의 영향으로 오개념을 갖고 있음을 보여주고 있다. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$라 표현함으로써 학생들은 ∞를 수라고 생각할 수 있다. 그러므로 이런 학생들을 위해 교사는 ∞는 일정한 값을 갖는 수가 아니라 큰 수를 나타내는 기호임을 학생들에게 주지시켜야 할 것이다. 마찬가지로 수학적 표현으로 인해 학생들이 $-\infty$를 수라고 인식하고 있음을 알 수 있다.

<표 7> 극한 기호의 뜻

기호	응답	기호의 뜻 쓰기		빈도수(명)	무응답
$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$	93	(α에) 수렴		43	7
		수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴		46	
		기타		4	
$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$	96	(양의 무한대로) 발산		56	4
		수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산		32	
		기타	수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 수열 $\{a_n\}$은 수렴하고, 그 극한값은 ∞이다.	8	
			수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 수열 $\{a_n\}$은 ∞에 가까워진다.		
			수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 수열 $\{a_n\}$은 ∞에 수렴한다.		
$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$	96	(음의 무한대로) 발산		56	4
		수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 수열 $\{a_n\}$은 음의 무한대로 발산		29	
		기타	수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 수열 $\{a_n\}$은 발산하고, 그 극한값은 $-\infty$이다.	11	
			수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 수열 $\{a_n\}$은 $-\infty$에 가까워진다.		

<표 8> 수렴, 발산 조사와 극한값 구하기

수렴·발산조사와 극한값 구하기	빈도수(명)			오답의 종류
	정답	오답	무응답	
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$	85	8	7	·수렴 ·발산 ·$\frac{1}{\infty}$ 등
$\lim_{n\to\infty}3$	71	14	15	·수렴 ·발산, 3 ·∞ ·n이 없다 등
$\lim_{n\to\infty}(-1)^n$	72	19	9	·진동, $\pm\infty$ ·음의 무한대로 발산 ·수렴, ± 1 ·발산, ∞ 등
$\lim_{n\to\infty}2^n$	97	4	9	·수렴, ∞ 등

<표 8>은 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 극한값을 구하라는 질문에 대한 결과를 나타낸 것으로, 다수의 학생들이 극한값을 구할 수 있으나, 몇몇 학생들은 오개념으로 인하여 극한을 제대로 이해하지 못하고 있음을 알 수 있다.

학생들의 답을 좀더 자세히 분석하면, 수열의 일반항이 n으로 나타나야 한다는 고정관념으로 인해 두 번째 수열은 상수열이므로 일반항을 생각하지 못해 극한값을 구하지 못한 학생이 있었다. 이런 경우는 상수열은 모든 항이 그 상수값이므로 극한값 역시 그 값이 된다는 것을 주지시켜 주어야 할 것이다.

세 번째 수열에서 ± 1로 수렴한다고 답한 학생들은 수열의 극한은 수열이 가까워지는 값이라는 생각에만 주목하고 수열이 하나의 값으로 가까워져야 한다는 사실에는 주목하지 못한 경우이다. 그리고 수열이 $\pm\infty$로서 발산한다고 답한 학생들은 수열이 ∞로 가까워지거나 $-\infty$로 가까워지는 경우에만 발산한다는 개념의 일부분에만 주목한 경우이다. 이런 학생들에게는 개념의 부분적인 특징이 아닌 개념의 모든 측면을 고려할 수 있도록 지도해야 할 것이다.

네 번째 수열에서는 수학적 표현의 영향으로 ∞가 수라고 생각하여 수열이 수렴하고 극한값이 ∞라는 오답이 나왔다. 이런 학생들을 위해서는 역시 ∞의 뜻을 정확히 주지시켜야 할 것이다. 또한 교과서를 보면 발산 개념을 '수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, a_n이 한없이 커지면, 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다. 또는 극한은 양의 무한대이다.'라고 되어 있다. 여기서 '극한은 양의 무한대이다.'라는 표현으로 인해 학생들이 발산하는 경우도 극한값이 존재한다고 오인할 수 있다. 이런 경우에는 수열이 발산할 때에는 극한값이 존재하지 않는다는 것을 주지시켜야 할 것이다.

Ⅳ. 수직선, 좌표를 이용한 극한 개념의 교수-학습 지도안

극한 개념의 이해 정도에 관한 설문조사를 분석한 결과 학생들이 극한에 대한 많은 오개념을 가지고 있음을 알 수 있었다. 이러한 학생들의 오개념을 해결하기 위하여 효과적인 교수-학습 지도안을 작성해 보고자 한다.

좌표평면 모델은 학생들에게 수열의 항의 변화에 주목하게 하는 장점이 있고, 수직선 모델은 극한과정보다는 극한값에 집중하게 하는 장점이 있다. 또한 수직선 모델을 이용하면 상수열의 극한이나, 극한값을 수열의 항의 일부로 갖고 있는 수열의 경우에도 극한값에 대해서 쉽게 설명할 수 있는 장점이 있으며, 발산하는 수열에 대해서도 설명을 도입하기가 쉽다. 또한 수직선 모델을 좀더 발전시키면 ε-N 논법을 쉽게 도입할 수도 있다.

이러한 장점을 가진 수직선과 좌표평면 모델을 이용하여 극한 개념의 이해를 위한 효과적인 교수-학습 지도안을 작성해 보았다.

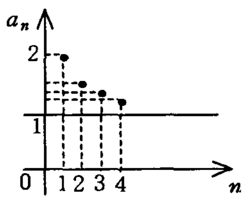
다음은 무한수열의 수렴과 극한에 대한 내용을 윤옥경 외 4인(1995)이 저술한 (주)중앙교육진흥연구소의 고등학교 수학Ⅰ을 바탕으로 작성한 지도안이다.

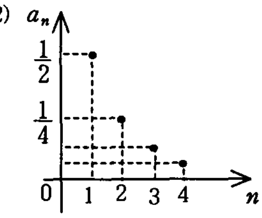
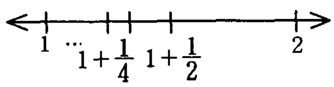
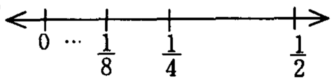
<무한수열의 수렴과 극한에 대한 지도안>

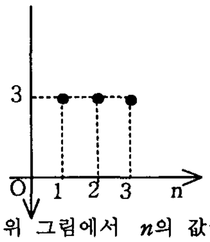
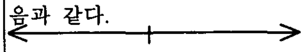
중단원	1. 수열의 극한	본시제재	1. 무한수열의 극한	차시	1/16
학습목표	무한수열의 수렴과 극한의 뜻을 이해할 수 있다.				
학습자료	교과서, 노트				

<table>
<tr><th rowspan="2">단계</th><th rowspan="2">학습과정</th><th rowspan="2">학습내용</th><th colspan="2">교수-학습활동</th><th rowspan="2">지도상의 유의점</th></tr>
<tr><th>교사활동</th><th>학생활동</th></tr>
<tr><td>도입 5분</td><td>선수학습 확인

학습목표 제시</td><td>· 수열
· 등차수열
· 등비수열
· 일반항 공식

· 무한수열의 수렴과 극한의 뜻을 이해할 수 있다.</td><td>· 수열, 등차수열, 등비수열의 뜻이 무엇인지 질문한다.
· 등차수열과 등비수열의 일반항을 구하는 공식을 질문한다.
· 학습목표 제시</td><td>· 질문에 대한 답을 생각해보고 지적 학생 답변한다.
· 등차수열과 등비수열을 상기하고 질문에 답변한다.
· 학습목표 인지</td><td>· 주의환기 및 동기유발을 시킨다.</td></tr>
<tr><td>전개 35분</td><td>탐구학습</td><td>1. 수열의 극한
§1. 무한수열의 극한
▶무한수열 $\{a_n\}$에서 항의 번호 n이 한없이 커짐에 따라 a_n의 값이 어떻게 변하는지 조사해 보자.
(1)
$1+1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{4}, \cdots, 1+\frac{1}{n}, \cdots$
(2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$
두 무한수열에 대하여 n의 값에 따라 이들 수열의 항의 값이 변하는 상태를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.
(1)

</td><td>· 수직선과 좌표평면을 사용하여 극한 개념을 정확히 이해할 수 있도록 설명한다.</td><td>· 용어의 정의에 주목하고, 설명을 들은 후 노트필기를 한다.
· 의문사항은 질문한다.</td><td>· 수열의 값에 주목하도록 한다.</td></tr>
</table>

단계	학습과정	학습내용	교수-학습활동 교사활동	학생활동	지도상의 유의점
전개 35분		(2)  그림(1)은 $y=1+\frac{1}{x}$ 의 그래프에서 $x=n$ 에 대응하는 점을 나타낸 것으로 x의 값이 커짐에 따라 그래프는 $y=1$ 에 한없이 가까워진다. 그림(2)는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 의 그래프에서 $x=n$ 에 대응하는 점을 나타낸 것으로 x의 값이 커짐에 따라 그래프는 $y=0$ 에 한없이 가까워진다. 따라서 n의 값이 한없이 커질 때, 수열 (1)의 제 n항은 1에 한없이 가까워지고, 수열 (2)의 제 n항은 0에 한없이 가까워진다. 위의 무한수열을 수직선에 나타내면 다음과 같다. (1)  (2)  그림 (1)은 수열 $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ 을 수직선에 나타낸 것으로 1을 중심으로 아무리 작은 구간은 잡아도 유한개의 항을 제외한 나머지 무한개의 항이 그 구간 안에 들어온다. 그림 (2)는 수열 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$을 수직선에 나타낸 것으로 0을 중심으로 아무리 작은 구간은 잡아도 유한개의 항을 제외한 나머지 무한개의 항이 그 구간 안에 들어온다. 이때 1과 0을 각각 수열 $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ 과 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$의 극한값이라고 한다.			
	내용정리	무한수열 $\{a_n\}$에서 항의 번호 n이 한없이 커질 때, a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 무한수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 하고, α를 무한수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라고 한다. 다시 말해 일정한 값 α를 중심으로 아무리 작은 구간을 잡아도 유한개의 항을 제외한 나머지 무한개의 항이 그 구간 안에 들어올 때, 그 일정한 값 α를 무한수열 $\{a_n\}$의 극한값이라 한다.	· 극한 정의를 정리한다.	· 극한 정의를 필기한다.	· lim은 limit(극한)의 약자이고, ∞는 무한대라 읽고 수가 아닌 큰 수를 나타내는 기호임을 주지시킨다.

단계	학습과정	학습내용	교수-학습활동		지도상의 유의점
			교사활동	학생활동	
전개 35분		무한수열 $\{a_n\}$이 α에 수렴할 때, 기호 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 또는 $n\to\infty$일 때 $a_n \to \alpha$ 로 나타낸다.			
	탐구학습	상수열 $\{3\}$의 극한값을 구하여 보자. 상수열은 모든 항이 3이므로 좌표평면에 나타내어 보면 다음과 같다.  위 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, 수열 $\{3\}$은 3이다. 수직선으로 나타내어 보면 다음과 같다. 	·일반 무한수열의 극한과 마찬가지로 상수열의 극한을 수직선과 좌표를 이용하여 설명한다.	·용어의 정의에 주목하고, 설명을 들은 후 노트필기를 한다. ·의문사항은 질문한다.	
	내용정리	$3 = a_1 = a_2 = a_3 = \cdots$ 3을 중심으로 아무리 작은 구간을 잡아도 모든 항이 그 구간 안에 들어온다. 따라서 3은 수열 $\{3\}$의 극한값이다. 모든 항이 같은 수로 된 상수열, 예를 들면 $\alpha, \alpha, \alpha, \cdots, \alpha, \cdots$는 일정한 값 α에 수렴하고, 다음과 같이 쓴다. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \alpha = \alpha$	·상수열의 극한 정의를 정리한다.	·상수열의 극한 정의를 필기한다.	·상수열은 모든 항이 같은 수이므로 그 수가 극한이 됨을 주지시킨다.
정리 10분	학습내용 정리	본시 학습내용 요약	·본시 학습내용을 요약하며 질문한다.	·학습내용을 음미하면서 교사의 질문에 적절히 답한다.	
	형성평가	형성평가 실시	·형성평가를 제시하고, 성취도를 점검한다.	·평가문제 풀이 및 확인	·틀린 문제는 다시 한 번 더 풀어 보도록 한다.
	과제제시	과제제시	·과제를 제시한다.	·과제를 체크한다.	
	차시예고	차시예고	·차시 학습내용을 예고한다.	·차시 학습내용을 확인한다.	

V. 결 론

21세기 지식 기반 정보화 사회에서는 계산 알고리즘에 대한 숙달보다는 다양한 수학적 고등 사고 능력과 이를 수학 내·외적으로 적절하게 이용하는 것이 중요한 능력으로 대두된다. 이런 측면에서 볼 때, 문제 해결력을 발전적으로 계승하면서 확장시킨 수학적 힘의 신장을 위한 수학이 필요하게 되고(교육부, 1997a) 이것을 위해서는 기본 개념을 확실히 이해하는 것이 가장 중요하다.

이에 본 연구에서는 극한 개념의 이해를 위한 여러 가지 지도 방법을 살펴본 후, 학생들의 극한의 이해 정도를 파악하여 효과적인 지도 방법을 살펴보고자 설문조사를 실시하였고, 그 분석 결과는 다음과 같다.

첫째, 다수의 학생들이 수학에 대한 흥미는 적지만 문제해결을 위해 노력한다는 것을 알 수 있었다. 그리고 그 날 배운 내용을 열심히 복습하지 않는다는 것을 알 수 있었다. 이런 결과가 나온 이유는 우리나라의 대학입시제도의 영향으로 학생들이 수학에 대한 흥미도는 낮지만 대학에 가기 위한 수단으로 공부하기 때문이라 생각된다.

둘째, 다수의 학생들이 극한에 대해 안다고 하였지만 정확한 개념의 이해는 부족하다는 것을 알 수 있었다. 그리고 학생들이 극한을 이해하는데 극한, 수렴, 발산 등 용어의 이해와 문제 풀이에 어려움이 있음을 알 수 있었다.

셋째, 학생들이 ∞에 대해 안다고 하였지만 정확한 의미를 알고 있지는 않다는 것과 그로 인해 극한 개념을 이해하는 데에도 장애가 있다는 것을 알 수 있었다.

넷째, 다수의 학생들이 극한의 기호의 뜻을 잘 알고 있었고 극한값도 잘 구하였으나 일부 학생들이 오개념으로 인해 제대로 정답을 말하지 못하였다.

'무한에 가까워질 수 있다'는 무한 직관의 영향으로 '수열이 ∞에 한없이 가까워지므로, 극한값은 ∞이다.'는 오개념을 가지고 있었다. 그리고 수열 $\{a_n\}$이 양의 무한대로 발산하는 경우를 기호 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$로 나타냄으로써 ∞가 마치 수처럼 보이는데 즉, 수학적 표현의 영향으로 인해 '수열이 ∞로 한없이 가까워지므로, 극한값은 ∞이다.'라는 오개념을 가지고 있었다. 또한 교과서에 발산 개념을 '수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, a_n이 한없이 커지면, 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다 또는 극한은 양의 무한대이다.'라고 표현함으로써 학생들이 발산하는 경우도 극한값이 존재한다고 오인할 수 있다. 또한 수열의 극한은 수열이 가까워지는 값이라는 생각에만 주목하고 수열이 하나의 값으로 가까워져야 한다는 사실에는 주목하지 못하여 수열 $\{(-1)^n\}$은 ± 1로 수렴한다는 오개념을 형성하였다. 그리고 수열이 ∞로 가까워지거나 $-\infty$로 가까워지는 경우에만 발산한다는 개념의 일부분에만 주목하여 수열 $\{(-1)^n\}$이 $\pm\infty$로 진동한다는 오개념을 형성하였음을 알 수 있다.

학생들의 이러한 오개념을 없애기 위해서는 극한 개념의 도입부분에서 오개념이 생기지 않게 여러 가지 방법을 이용하여 자세히 설명을 해야 할 것이다. 그리고 ∞는 일정한 값을 갖는 수가 아니라 큰 수를 나타내는 기호임을 학생들에게 주지시켜야 할 것이다. 또한 개념의 부분적인 특징이 아닌 개념의 모든 측면을 고려할 수 있도록 지도해야 할 것이며, 수열이 발산하는 경우는 극한값이 존재하지 않는다는 것을 주지시켜 주어야 할 것이다. 그리고 직관적인 설명과 함께 수학용 Computer Software 등을 도입하여 그림이나 좌표, 수직선 등을 이용한 설명을 병행하는 것이 효과적이라 생각된다.

이에 본 연구에서는 여러 가지 학습지도 방법을 소개하고, 특히 컴퓨터를 이용한 수치적 방법 중 엑셀 프로그램을 이용하여 극한값을 구하고 그래프를 그려서 쉽게 이해할 수 있는 방법을 제시하였다. 또한 설문 조사 결과를 바탕으로 한 효과적인 지도 방법으로 수직선과 좌표를 이용한 방법을 제시하였다. 좌표평면 모델은 학생들에게 수열의 항의 변화에 주목하게 하는 장점이 있었고, 수직선 모델은 극한 과정보다는 극한값에 집중하게 하는 장점이 있었다. 또한 수직선 모델을 이용하면 상수열의 극한이나, 극한값을 수열의 항의 일부로 갖고 있는 수열의 경우에도 극한값에 대해서 쉽게 설명할 수 있는 장점이 있으며, 발산하는 수열에 대해서도 설명을 도입하기가 쉽다. 또한 좀더 발전시켜서 $\varepsilon - N$ 논법을 소개할 수 있는 장점이 있다. 그러므로 두 모델을 적절히 혼용하여 극한을 설명한다면 학생들이 보다 쉽게 극한 개념을 이해할 수 있을 것이다.

한편 본 연구에서는 설문조사 대상을 임의로 선정하

여 실시하였기 때문에 극한 개념의 이해 정도에 대한 남녀의 차이 및 성취도가 높은 학생과 낮은 학생의 차이를 비교하지 못하였고, 극한 개념에 대한 학생들의 이해를 개선하기 위한 학습지도 방법을 실제 수업에 적용해보지 못한 제한점이 있었다.

앞으로는 극한을 정확히 이해할 수 있게 하기 위한 여러 가지 학습 지도 방법을 수업에 직접 도입해 봄으로써 이러한 학습 지도 방법이 효과적인지 입증해 볼 수 있는 연구가 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

교육부 (1997a). 고등학교 교육 과정(II), 교육부.

교육부 (1997b). 고등학교 교육과정 해설-5수학-, 교육부.

박선화 (1998). 수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구, 교육학 박사학위 논문, 서울대학교 대학원.

박선화 (2001). 수학적 극한 개념의 학습지도 방향 탐구 —수열의 극한 개념을 중심으로, 수학사랑 제3회 MATH FESTIVAL.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교출판부.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부.

윤옥경 · 윤재한 · 허원 · 손문구 · 송병회 (1995). 고등학교 수학 I, (주)중앙교육진흥연구소.

이상도 (2000). 수열의 극한에서 교수-학습에 관한 연구 —고등학교 과정, 교육학 석사학위 논문, 단국대학교 대학원.

A Study on Teaching the Notion of Limit of the Sequence in High School Mathematics

Kim, Kiwon
Silla University, San 1-1, Gwaebop-dong, Sasang-gu, Busan, 617-736 Korea
e-mail: kwkim@silla.ac.kr

Wang, Su Min
Jeil Middle School, Geoje, Kyoungsangnam-do, Korea;
e-mail: wsm1208@hanmail.net

Teaching the notion of limit of the sequence in high school mathematics needs special attention and accurate teaching methods, for it is one of the most important bases of the advanced mathematics. Therefore it is necessary for high school students to have the right understanding of the notion of limit of the sequence.

In this paper, we survey several teaching methods of the notion of limit of the sequence in high school mathematics and introduce a new method using Excell program. Also through questionnaire survey we discuss and analyse students' reaction when they learn the notion of limit of the sequence. And based on that, we suggest a method that would be believed to improve the students' understanding for the notion of limit. It should be also notified that questionnaire survey was performed in order to find out which method would be appropriate to teach the notion of limit of the sequence, and that the survey result was fully reflected in the guideline that suggested.

* ZDM Classification : I34
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Word : teaching the notion of limit of the sequence.

<부록> 학생 설문조사 설문지

본 조사는 학생들이 수열의 극한에 대해 어느 정도 알고 있는지 알아보기 위해서입니다. 성실히 답해주시기 바랍니다. 감사합니다.

학 교 : ____________ 학 년 : ____

1. 수학에 대한 흥미는 어느 정도입니까?
① 상 ② 중 ③ 하

2. 모르는 문제가 나오면 어떻게 해결합니까?
① 오랫동안 생각한다 ② 조금 생각 후 포기한다
③ 바로 포기한다

3. 그 날 배운 내용을 복습합니까?
① 열심히 한다 ② 조금 하는 편이다
③ 전혀 하지 않는다

4. 수열의 극한을 이해하는데 어려움이 있습니까?
① 있다 ② 조금 있다 ③ 없다

5. 어떤 점이 어렵다고 생각합니까?
① 극한, 수렴, 발산 등 용어의 이해가 어렵다.
② '한없이 커진다', '한없이 가까워진다'의 의미를 이해하지 못한다.
③ 수렴을 한다면 어떤 값으로 수렴하는지 알 수가 없다.
④ 기타 (   )

6. 극한이 무엇이라 생각하는지 간략히 적어주세요.
(   )

7. ∞의 뜻을 알고 있습니까?
① 안다 ② 모른다

8. ∞가 무엇이라 생각합니까?
(   )

9. 다음 기호의 뜻을 쓰세요.
(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

10. 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하세요.
(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ (2) $\lim_{n\to\infty} 3$
(3) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ (4) $\lim_{n\to\infty} 2^n$