韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2003, 11. 제 42권, 제 5호, 697-706.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2003, Vol. 42, No. 5, 697-706.

수학적 개념으로서의 등호 분석

도 종 훈 (서울대학교 대학원)
최 영 기 (서울대학교)

Ⅰ. 서 론

등호(等號) ' = '는 학교수학에서 학습자들이 가장 많이 사용하고 접하는 수학 기호들 중의 하나로서, 수학자 R. Recorde(1510-1558)에 의해 처음[1] 사용된 것으로 알려져 있다(Nelson, 1998). Recorde는 이 기호를 '같다(equal)'라는 의미를 표현하기 위해 사용하였으며 (O'Connor & Robertson, 2002), 우리가 이 기호를 부르는 명칭인 '등호(等號)' 역시 '같음(等)을 나타내는 기호(號)'를 의미한다. 그러나 이 때의 같음은 등호가 사용되는 상황이나 양변에 놓이는 대상에 따라 여러 가지 의미를 지닐 수 있다. 명제 '$\sqrt{2}$는 무리수이다.'에 대한 다음의 증명(Laczkovich, 1998)을 살펴보자.

$\sqrt{2}$를 유리수 즉, $\sqrt{2}=\frac{q}{p}$ $(p, q \in Z,\ p \neq 0)$이라고 가정하면 다음과 같은 등식이 얻어진다.

$$2p^2 = q^2$$

양변을 각각 소인수분해하면 $2p^2$에는 소인수 2가 홀수 개만큼 나타나지만, q^2에는 짝수 개만큼 나타난다. 이는 양의 정수의 소인수분해의 유일성에 모순이다. 따라서 $\sqrt{2}$는 무리수이다.

위 등식 $2p^2 = q^2$에서 등호는 '$2p^2$과 q^2이 서로 같다'는 일상적 의미를 지니지만, 그 속에는 '두 수가 같은 자연수이면 그 수들의 소인수분해 역시 유일하다.'는 수학적 아이디어가 함께 내포되어 있다.

이처럼 등호에서의 같음은 그 속에 상식적으로 이해할 수 있는 일상적 의미(Ordinary meaning)뿐 아니라 형식적이고 추상적인 수학적 아이디어(Mathematical idea)[2]를 내포하기도 한다. 등호 개념을 이해한다는 것은 그것이 지닌 일상적 의미 뿐 아니라 수학적 아이디어와 표상 등을 함께 이해한다는 것을 의미한다.

등호 개념에 대한 본질적인 이해의 문제는 학습자의 수학적 개념 학습에 관한 문제일 뿐 아니라 교사의 교과내용에 관한 지식의 문제이기도 하다. 교사가 자신이 가르치고자 하는 교과지식을 충분히 이해하지 못한 상황에서 학생들에게 개념을 명료하고 체계적으로 설명하기는 어려우며, 학생들의 다양한 반응에 대한 교사의 판단과 설명은 그 주제에 대한 교사의 이해 정도에 달려있다고 할 수 있다(최영기, 2000). 특히 등호 개념의 이해는 종종 학생들의 학습수준을 뛰어 넘는 상위개념을 필요로 하는 경우가 많아 본질적인 의미를 충분히 이해하는 것이 어렵지만, 교사가 그 개념과 관련된 지식의 구조를 파악하고 가르침에 임하는 것은 교사에게 있어 필수적이다(Even & Tirosh, 1995).

이에 본고에서는 등호를 단순한 기호가 아닌 하나의 수학적 개념으로 간주하여 수학적 개념 분석 모형 및 산술적 사고와 대수적 사고라는 두 가지 분석틀과 몇 가지 예를 통해 등호가 지닌 같음의 다양한 의미, 학습자의 인지적 장애 가능성, 그리고 교사의 교과내용에 관한 지식 등을 조명해 보고 시사점을 논의하고자 한다.

* 2002년 8월 투고, 2003년 11월 심사 완료.
* ZDM 분류 : E49
* MSC2000 분류 : 97C70
* 주제어 : 등호, 수학적 개념, 수학적 개념 분석모형, 수학적 아이디어, 일상적 의미, 표상, 산술적 사고, 대수적 사고.

1) 그러나 등호(等號) ' ='를 언제, 누가 처음으로 사용했는지 분명하지는 않다(박교식, 2000).

2) 본 고에서 사용된 두 용어 수학적 아이디어(Mathematical idea)와 일상적 의미(Ordinary meaning)는 Gardiner(1982)로부터 빌려온 것이다.

II. 분석을 위한 틀

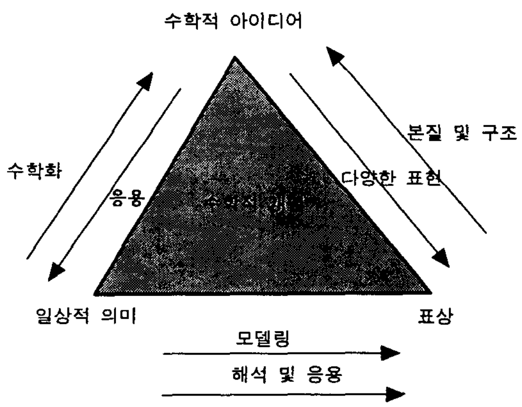
(1) 수학적 개념 분석 모형

학교수학에 등장하는 각각의 수학적 개념들은 수학적인 아이디어와 더불어 그 속에 일상적인 의미를 내포하고 있는 경우가 많으며(Gardiner, 1982) 단일한 개념이 다양한 표상을 지니는 경우 또한 종종 발견할 수 있는데, 대표적인 예로 자연수 1을 들 수 있다(<표 1> 참조).

< 표 1 > 자연수 1의 예

일상적 의미	수학적 아이디어		표상
한 개, 첫 번째, 단위 등	자연수 1	10진법	1, $2-1$, 1_{10} 등
		2진법	1_2 등
	유리수 1		1, $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{n}{n}$(n은 0이 아닌 정수) 등
	실수 1		1, $0.999\cdots$, $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})$ 등
	복소수 1		1, $1+0i$, $e^{2n\pi}$(n은 정수) 등

수학적 개념의 이해와 분석에 있어서 이들 세 요소 즉, 수학적 아이디어, 일상적 의미, 그리고 표상은 상호보완적이면서 동시에 독립된 영역으로서의 특성을 지니고 있으며, 한 요소가 다른 요소에 일방적으로 종속되지는 않는다고 볼 수 있다. 이에 본고에서는 등호 뿐 아니라 학교수학에서의 각종 수학적 개념에 대한 분석과 이해를 위해 일상적 의미, 수학적 아이디어, 표상 그리고 이들 사이의 관계들로 특징 지워지는 '수학적 개념 분석 모형'을 제안한다(<그림 1> 참조).



<그림 1> 수학적 개념 분석 모형

일상적 의미

수학에서 각 개념은 그것이 수학화(Freudenthal, 1991) 되기 이전의 일상적인 의미에 발생의 기원을 두고 있는 경우가 많지만 그와는 별개로 그 개념의 보다 넓은 응용으로서 새롭게 다양한 일상적 의미를 지니기도 한다. 즉, 일상적 의미는 그 개념이 최초로 발생했던 문맥이나 상황뿐 아니라 그 개념의 응용으로서 새롭게 설명되는 상황이나 문맥에서의 의미 또한 포괄하는 개념이라고 할 수 있다. 예를 들어, 행렬은 기원전 약 300년경 이미 바빌로니아인들에 의해 동차 일차연립방정식으로 표현될 수 있는 상황의 문제를 해결하기 위해 도입되었고(O'Connor & Robertson, 1996), 이 때 행렬의 각 원소는 대응하는 일차방정식의 계수를 의미한다. 그러나 현대 수학에서 행렬의 각 원소는 두 지점 사이를 잇는 도로의 개수, 도로 상에 위치한 소방서의 개수, 농촌에서 도시 혹은 도시에서 농촌으로 이주하는 사람들의 확률 등의 다양한 일상적 의미 또한 지니고 있으며(김홍종, 2001), 이러한 일상적 의미들은 행렬이론에 대한 수학적 진보의 결과로서 얻어진 응용의 산물이라고 할 수 있다. 한편, 학습자에게는 일상적 의미가 그 개념에 대한 심상[3]의

3) 심상에 대하여 Freudenthal(1991)은 'mental object', Dewey(1933)와 Hadamard(1945)는 'mental image'라는 표현을 사용하였다.

역할을 할 수도 있다. 예를 들어 어떤 학생이 자연수 1이나 분수 $\frac{1}{3}$을 생각했을 때 자신의 머리 속에 접시 위에 놓인 '한 개의 사과'나 '세 조각으로 등분된 사과' 등이 떠오른다면, 이들은 각각 자연수 1과 분수 $\frac{1}{3}$에 대한 일상적 의미로서 그 학생에게는 각 수에 대한 심상의 역할을 한다고 볼 수 있다.

수학적 아이디어

수학적 아이디어는 그 개념이 지닌 일상적 의미를 포괄할 수도 있고 무관할 수도 있는, 그것이 지닌 수학적 구조에 의해 특징 지워지는 수학적 개념의 한 요소라고 할 수 있다. 수학적 아이디어의 형식성과 추상성은 수학 개념의 학습을 어렵게 하는 주요 원인일 수 있지만, 한 번 이해하기만 하면 폭넓은 응용이 가능하다는 장점 또한 지니고 있다. 예를 들어 행렬은 단순한 숫자의 배열이 아니라 잘 정의된 그들 간의 연산으로 특징 지워지는 행렬군 혹은 벡터공간의 한 원소라는 수학적 아이디어를 지니고 있다. 행렬의 연산이나 조작은 벡터공간이라는 수학적 구조 속에서 일상적 의미와 무관하게 시행되지만 그 결과의 응용은 풍부하다.

예를 들어 $n \times n$행렬 $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$의 곱 $AB=[c_{ij}]$은 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$에 의해 정의되는 연산에 불과하지만, 응용되는 상황에 따라 경우의 수, 확률, 혹은 여러 지점 사이의 경로의 길이 등과 같은 여러 가지 일상적 의미를 지닐 수 있다.

표상

표상은 그 개념의 수학적 아이디어 혹은 수학적 구조를 그대로 유지하면서 그 개념에 대한 여러 가지 표현의 역할을 하기도 하고, 더불어 그 개념의 여러 가지 일상적 의미들에 대한 모델로서의 역할을 수행하기도 하는 수학적 개념의 한 요소라고 할 수 있다. 각 수학적 개념은 종종 다양한 표상 예를 들면, 기하학적 표상이나 대수적 표상 등을 지니는데, 수학자들은 표상을 매개로 하여 새로운 수학적 아이디어를 발전시켜 나가기도 하고, 표상을 통해 다양한 일상적 의미를 부여하기도 한다. 예를 들어 무리수 $\sqrt{2}$는 정사각형의 한 변과 대각선의 비 혹은 정사각형의 한 변과 넓이가 2배인 정사각형의 한 변의 비라는 기하학적 표상과 $2^{\frac{1}{2}}$이라는 대수적 표상을 지니고 있다(도종훈, 2002). 이들 표상들로부터 유추와 일반화(Polya, 1954)를 통해 정 n각형의 한 변과 대각선의 비[4] 혹은 정사각형의 한 변과 넓이가 n배인 정사각형의 한 변의 비의 무리수성, 그리고 자연수 n, k에 대한 $n^{\frac{1}{k}}$의 무리수성 등에 대한 문제가 자연스럽게 제기될 수 있다. 특히 $k=2$일 경우의 대수적 표상 $n^{\frac{1}{2}}$는 정사각형의 한 변과 넓이가 n배인 정사각형의 한 변의 비라는 기하학적 의미를 지니게 됨을 알 수 있다. 한편, 표상은 일상적 의미와 마찬가지로 학습자의 수학적 개념 이해에 있어서 심상의 역할을 하기도 한다. 예를 들어, 지도상의 각 도시와 도로망을 점과 선을 이용하여 기하학적 표상으로 모델링할 수 있고 이는 다시 행렬을 이용하여 대수적으로 표상할 수 있는데, 이 때 행렬의 각 행과 열은 지도상의 각 도시를 나타내고 행렬의 각 원소는 두 도시간의 도로 개수를 나타낸다. 즉, 점과 선에 의한 기하학적 표상은 행렬 개념에 대한 심상의 역할을 할 수 있고, 행렬에 의한 대수적 표상은 기하학적 문제에 대한 심상의 역할을 할 수 있다.

결국 수학적 개념 분석 모형의 관점에서 볼 때 수학적 개념을 이해하고 분석한다는 것은 그 개념이 지니고 있는 수학적 아이디어, 일상적 의미, 다양한 표상과 이들 사이의 상호 관련성을 이해하고 분석한다는 의미를 지닌다. 수학적 개념 학습에 있어서 이들 세 요소간의 불균형은 학습자의 인지적 장애를 유발할 수 있다. 그러므로 교사는 이들 세 요소와 그들 간의 관계에 대한 충분한 이해를 토대로 가르침에 임해야 하며, 학습자 역시 자신이 처음 접하는 개념이 등장했을 때 그 개념이 지닌 위의 세 요소들을 의식적으로든 무의식적으로든 이해하려고 노력해야 할 것이다.

(2) 산술과 대수

4) 이 때 정 n각형의 대각선은 여러 개가 나올 수 있으며, 이들 각 경우를 모두 고려해야 할 것이다. 실제로 정 $(2k)$각형 $(k \geq 2)$에서는 $(k-1)$개의 대각선을 고려해야 하고, 정 $(2m+1)$각형 $(m \geq 2)$에서는 $(m-1)$개의 대각선을 고려해야 한다.

자연수4)와 분수의 사칙연산을 위주로 하는 초등학교 수준에서의 대수를 보통 산술(Nelson, 1998)이라고 한다. 산술의 대상이나 연산은 대개 상식적이고 일상적인 의미를 지니고 있으며 주로 양이나 양의 측정 등과 관련이 있다고 볼 수 있다. 그러므로 산술의 대상과 그들 사이의 관계 인식 및 연산 속에 내재된 사고를 산술적 사고라고 한다면, 산술적 사고는 우리의 일상적인 사고와 본질적으로 크게 다르지 않으며 단지 그 대상과 대상들 사이의 관계 및 연산이 수학적 제재에 국한되어 있을 뿐임을 알 수 있다.

한편, 자연수로부터 음수 이상의 수 체계로의 확장과 더불어 문자나 기호, 그리고 그들 사이의 일반적인 관계를 형식적으로 다루는 중학교 이상 수준에서의 대수를 통틀어 대수(Nelson, 1998)라고 한다. 대수에서는 대상이 지니고 있을 법한 일상적인 의미에 주목하기보다는 그 대상의 구조 즉 대상이 속한 집합의 구조에 주목한다고 볼 수 있다. 그러므로 대수에 내재된 수학적 사고를 대수적 사고라고 한다면, 대수적 사고는 비일상적이고 형식적인 특성을 지니게 됨을 알 수 있다.

특히 수의 개념은 종종 일상적인 양의 의미를 초월하거나 무관하며 단지 그 구조를 특징짓는 연산의 대상으로서 존재한다(Sutherland, Rojano, Bell & Lins, 2001). 예를 들어 음수는 방정식 풀이의 형식적인 완성을 위한 대수적 필요에서 출현하여 1500년 이상의 긴 시간동안 그 실제적인 특성을 부여하려고 시도하였으나, 음수 개념이나 연산을 실제의 양과 관련지어서 완전히 설명하기는 어렵다(우정호, 1998). 오늘날까지 음수 개념과 연산을 설명하기 위해 많은 모델들 예를 들면 수직선 모델, 셈돌 모델, 우편물 모델, 소득손실 모델 등이 고안되었지만 그 어느 것도 음수의 대수적 성질들을 일관성 있게 만족시키지는 못하였다(우정호, 1998). 물론 일상생활의 예와 모델들은 음수개념과 연산을 부분적으로나마 상식적인 차원에서 이해할 수 있도록 도와주고, 실제 음수를 처음 배우는 학생들에게는 효과적인 설명 수단으로서의 교육적 의의를 지닐 수도 있다. 그러나 실제적인 의미의 부여를 통해 음수 개념의 본질을 완전하게 이해하는 것은 불가능하다. 특히 교사는 음수 개념이 본질적으로 실제의 일상적인 의미를 초월한 수학적 개념이라는 사실을 분명히 인식하여야 한다.

산술(산술적 사고)에서 대수(대수적 사고)로의 이행과정 속에 학생들의 인지적 장애가 존재한다는 것은 이미 잘 알려진 사실이며(Sutherland, Rojano, Bell, & Lins, 2001 ; 김성준, 2002), 이에 대한 원인을 분석하고 그 대안을 모색하는 것은 수학교육의 중요한 연구과제일 것이다. 학생들이 산술에서 대수로의 이행 과정에서 경험하는 인지적 장애는 상식과 비상식, 일상적 의미와 형식적인 수학적 아이디어 사이의 혼란에서 비롯된 것이라고 볼 수 있다. Ⅲ장과 Ⅳ장에서 구체적으로 살펴보겠지만 등호 개념의 이해과정에서 발생하는 인지적 장애 역시 산술적 사고와 대수적 사고 사이에 존재하는 인지적 장애의 한 예로 볼 수 있다.

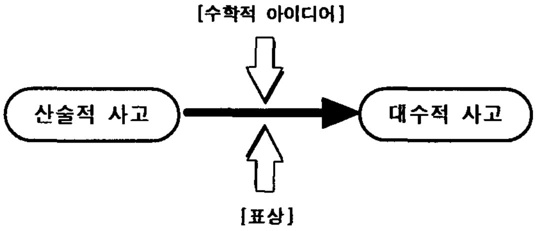
(3) 수학적 개념 분석 모형의 관점에서 산술적 사고와 대수적 사고 분석

수학적 개념 분석 모형의 관점에서 산술과 대수 및 그들 사이에 존재하는 인지적 장애의 원인을 분석해 볼 수 있다.

산술에서의 여러 가지 개념들은 수학적 개념 분석모형의 세 가지 요소 중에서 일상적 의미를 중심으로 구성되어 있으며, 교수-학습 또한 일상적 의미를 이해하고 적용하는데 중점을 둔다. 이 때 각 개념이 지닌 수학적 아이디어나 표상들은 일상적 의미의 범위를 벗어나지 않는다.

산술에서의 여러 가지 개념들은 중학교 이상 수준의 대수에서 다시 한 번 등장한다. 그러나 이 때 등장하는 개념들은 일상적 의미 뿐 아니라 그것이 지닌 수학적 아이디어와 다양한 표상이라는 요소를 고려하지 않고서는 올바른 이해에 도달할 수 없다. 특히 대수의 여러 가지 개념들은 일상적 의미로 설명이 불가능한 다양한 수학적 아이디어를 내포하고 있는 경우가 많다. 즉, 대수적 사고로서의 수학적 개념 이해는 그것의 일상적 의미 뿐 아니라 수학적 아이디어와 다양한 표상이라는 관점에서 그들 사이의 상호관련성을 파악할 수 있는 상태를 의미한다.

그러므로 산술적 사고에서 대수적 사고로의 전이는 그 자체로서는 불가능하며 일상적 의미를 초월하는 수학적 아이디어와 그에 대한 표상이 사고과정 속에 새롭게 들어와 산술적 사고와 유기적으로 결합될 때에 비로소 가능해진다(<그림 2> 참조). 이 때 수학적 아이디어와



<그림 2>

표상은 대부분 형식적이고 추상적인 성격을 지니므로 일상적 의미의 연장선상에서 자연스럽게 결합되는 것이 아니라 전혀 다른 성질의 것이 인위적으로 결합되는 형태를 취하게 된다. 그러므로 이 과정에서 학습자의 인지적 장애가 발생하는 것은 당연하며, 이러한 장애는 교수-학습에서 경계해야 할 대상이 아니라 오히려 학습의 한 과정으로 이해되어야 할 것이다.

Ⅲ. 등호에 대한 인지적 장애의 의미 : 분석 틀의 관점에서

등호는 학교수학에서 학습자들이 가장 많이 사용하고 접하는 수학 기호들 중 하나이지만, 그 의미는 사용되는 상황에 따라 다양할 수 있다.

습관성 오류

방정식을 처음 배우는 중학교 1학년 학생들이 "방정식 $2+x-1+2x=4$의 해를 구하여라."라는 문제에 당면했을 때, "$2+x-1+2x$ 는 $3x+1$ 은 4 는 $3x=3$ 은 $x=1$ *이다.*"라는 말을 중얼거리며 풀이과정을 다음과 같이 표현하는 상황을 상정해 보자.

$2+x-1+2x=3x+1=4=3x=3=x=1$[5)]

이 학생은 등호를 좌변 연산의 수행 결과를 우변에 있는 식이나 값으로 연결시켜 주는 조사로 인식하고 있음을 알 수 있다. 즉, '(좌변) = (우변)'을 '(좌변)과 (우변)이 같다.'라는 의미로 인식하는 것이 아니라 '(좌변)은(는) (우변)이다.'라는 의미로 인식하고 있는 것이다. 이 때 이 학생에게 있어서 등호는 조사 '은(는)'과 동일시되며, 좌변의 연산을 수행하라는 지시 혹은 명령의 의미를 지닌다(Behr, Erlwanger, & Nichols, 1976; Kieran, 1981; 최창우, 2001). 이러한 현상은 등호의 의미 해석에 있어서 가장 빈번하게 발견되곤 했던 오류의 대표적인 예로 볼 수 있다. 그러나 이러한 오류는 주어진 등식을 일상언어로 표현하는 교사들로부터 비롯하여 학생들에게 전해진 오류로 볼 수 있으며, 교사들은 이미 이러한 오류를 충분히 인식하고 의도적으로, 사실 번거로울 정도로, 등호가 같음의 기호임을 강조하여 설명한다. 이러한 오류는 본질적인 의미에서의 인지적 장애라고 보기는 어려우며, 부적절한 언어사용 및 표현에 기인하는 습관성 오류에 불과하다고 볼 수 있다.

인지적 장애

등호 개념에 대한 본질적인 의미에서의 인지적 장애는 산술적 사고에서 대수적 사고로의 전이 과정에서 발생한다고 볼 수 있다. 산술적 사고로서의 등호의 의미는 상식적인 의미에서 같다는 뜻으로서, '키가 똑같다. 무게가 똑같다. 개수가 똑같다'등의 일상적 의미와 동일하게 사용될 수 있다. 한편, 대수적 사고로서의 등호의 의미는 양변에 오는 대상의 구조 즉, 그 대상이 속한 구조에 의해 달라질 수 있으며, '구조가 같다', '동형이다', 혹은 '동치관계이다' 등의 의미를 지닌다. 등호가 지닌 일상적 의미는 수학적 개념에 대한 학습자의 직관적 이해를 돕는 중요한 역할을 할 수도 있지만, 그것이 학습자의 인지구조 속에 고착화되는 것은 이후 형식적인 의미로서의 개념 학습에 있어 인지적 장애를 유발할 수 있는데, 이 때 발생하는 인지적 장애가 바로 등호 개념에 대한 본질적인 의미에서의 인지적 장애라고 할 수 있다. 즉, 인지적 장애는 같음에 대한 일상적 의미가 너무 강하게 작용하여 그 일상적 의미에만 주목한 나머지 정작 같음의 대상들에 대해서는 깊이 고려하지 못하거나, 설령 고려한다고 하더라도 그 대상의 구조 즉, 수학적 아이디어를 올바로 인식하지 못하는 데에서 비롯된다고 볼 수 있다.

Ⅳ. 몇 가지 예를 통한 분석

몇 가지의 예를 통해 등호가 지닌 같음의 다양한 의

5) 이 학생이 올바르게 기술했어야 할 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 2+x-1+2x&=4\\ 3x+1&=4\\ 3x&=3\\ x&=1 \end{aligned}$$

미들을 분석하고, 시사점을 알아보도록 하자.

(1) 양팔저울과 등식의 성질

양팔 저울은 중학교 1학년 교과서(김연식·김흥기, 1990)에서 등식의 성질을 설명하기 위해 흔히 사용되는 모델로서 방정식 풀이에 있어서 기본이 되는 내용이다. 양팔 저울의 양쪽에 놓인 물체의 무게를 각각 Akg, Bkg이라고 할 때 저울이 수평을 이루면 A＝B 라고 표현한다. 이 때 등호는 양의 개념에 국한되는 같음의 기호로서 그 양변에 놓이는 대상은 양을 표현할 수 있는 수에 국한되며, 그 의미는 일상적 의미에서의 같음 - 무게가 똑같다, 혹은 저울이 평형을 이룬다 - 을 나타낸다. 그러나 방정식에 사용되는 등호와 그 양변에 놓이는 대상들은 양의 개념에 국한되어 있지 않으며 보다 형식적인 수학적 아이디어를 내포하고 있다. 다음의 세 방정식을 양팔저울을 이용하여 설명해 보자.

$$①\ x-2=1 \quad ②\ x+2=1 \quad ③\ x-2=-1$$

방정식 ①은 양팔저울 모델을 이용하여 해석 및 풀이가 가능하며, 이는 일상적 의미만으로도 주어진 방정식에 대한 이해가 가능하다는 것을 의미한다. 그러나 방정식 ②의 경우 등식 자체의 의미는 양팔저울 모델을 이용한 설명이 가능하지만, 방정식의 해가 되는 -1을 무게로 갖는 물체는 실제로 존재하지 않는다. 즉, 주어진 방정식을 일상적 의미를 통해 부분적으로는 이해할 수 있지만, 궁극적인 이해를 위해서는 음수에 대한 이해가 필요하다. 한편, 방정식 ③은 양팔저울 모델을 통해서는 주어진 등식의 의미 해석조차 불가능함을 알 수 있으며, 이 방정식을 이해하기 위해서는 역시 음수의 구조 즉, 수학적 아이디어에 대한 이해가 필수적임을 알 수 있다.

위의 세 방정식에 사용된 등호의 개념 속에는 양팔저울의 평형상태라는 일상적 의미와 등식의 성질로 대변되는 음수의 구조라는 수학적 아이디어가 함께 내포되어 있다. 이 때 음수의 구조는 덧셈 연산이 정의된 정수군 (Z, +)를 의미하며, 만약 위에 제시된 일차방정식들의 계수가 일반적인 정수나 유리수 혹은 실수이면 그 속에 내포된 수학적 아이디어는 유리수체 (Q, +, ·)나 실수체 (R, +, ·)가 된다. 양팔저울은 등식의 개념에 대한 학습자의 직관적 이해를 돕기 위해 도입되지만, 그것이 학습자의 마음속에 등호에 대한 이미지로 고착화되지 않도록 주의해야 한다. 이를 위해서는 수학적 개념 분석 모형에서 등호 개념의 세 요소들에 대한 교사의 의미 충실한 이해가 전제되어야 할 것이다.

(2) 비와 비례식

비와 비례식은 양의 관계를 등호로 표현한 전형적인 예로서 학교수학 전반에 걸쳐 학생들이 가장 많이 접하는 대수식들 중의 하나일 것이다. 다음과 같은 가상의 문제를 생각해 보자.

(문제)

폭이 같은 두 개의 정원이 있다. 한 정원은 길이가 $a\,m$이고 넓이가 $b\,m^2$이며, 다른 한 정원은 길이가 $c\,m$라고 한다. 이 정원의 넓이는 얼마인가?

(풀이)

다른 한 정원의 넓이를 $d\,m^2$라고 하자.

두 정원의 폭이 일정하므로, $a:b=c:d$이다.

그러므로 다른 한 정원의 넓이는 $\frac{bc}{a}\,m^2$이다.

위의 문제 풀이에 나타난 비례식 $a:b=c:d$의 모든 문자들은 길이와 넓이라는 양의 개념을 나타낸다. 이 때 등호는 두 양 즉, 길이와 넓이 사이의 비가 서로 같음을 의미하며, 이는 비례식이 지닌 일상적 의미의 전형적인 예라고 할 수 있다. 한편 위의 비례식은 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ($b, d\neq 0$)로 다시 표상될 수 있는데, 이 표상은 전자에 비해 보다 더 일반적인 의미를 지닌다. a, b, c, d가 모두 양의 정수 즉, 자연수 일 때에는 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$는 '두 양 사이의 비가 서로 같다.'라는 일상적 의미 뿐 아니라 정수의 동치류로 정의되는 '유리수'라는 수학적 아이디어를 함께 내포하고 있으며, 이 때의 등호는 동치관계로 이해될 수 있다. 만약 a, b, c, d중 적어도 하나가 음의 정수이면, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$에는 어떠한 일상적 의미도 존재하지 않으며 이 등식은 유리수의 구조라는 수학적 아이디어를 통해서만 올바로 이해될 수 있다. 더구나 a, b, c, d가 무리수를 포함하는 일반적인 실수나 복소수이면, 위의 등식은 실수체 (R, +, ·)나 복소수체 (C, +, ·)의 관점에서 이해되어야 한다.

비와 비례식의 개념은 그 발생의 기원이 양과 양의 측정이라는 일상적 의미에 기초하고 있고(Sutherland, Rojano, Bell, & Lins, 2001), 실제로 비와 비례식은 그와

같은 일상적 의미를 부분적으로 내포하고 있음을 알 수 있다. 그러나 그 속에는 발생의 기원이 되는 일상적 의미 뿐 아니라 형식적인 수학적 아이디어 또한 포함되어 있으며, 더구나 모든 비와 비례식이 일상적 의미를 지니는 것은 아님을 본 예를 통해서 알 수 있다.

(3) 순환소수

산술적 사고와 대수적 사고 사이의 인지적 장애를 유발하는 한 예로 등식 $0.999\cdots=1$을 들 수 있다. 이 등식을 해석학(대수)적으로 유도할 줄 아는 뛰어난 학생들에게서조차도 이 등식에 대한 심리적 확신을 찾아보기는 어렵다(조한혁 · 최영기, 1999). $0.999\cdots$가 1보다 작다고 보는 이러한 관점은 아킬레스가 거북이를 따라 잡을 수 없다는 제논의 역리에서도 발견할 수 있는데, 이러한 관점을 가진 학생들의 머리 속에는 수직선상에서 1을 향해 달려가는 수의 동적인 이미지가 떠오를 것이다. 그러나 수학적 개념 분석모형의 관점에서 볼 때 $0.999\cdots$는 무한소수로서 인간의 일상 속에 실재하는 개념이 아니며 인간이 창조한 십진 소수 표현체계에 의해 관념적으로 생성된 "실수 1"에 대한 하나의 표상이라는 수학적 아이디어를 지니고 있다. 따라서 동적인 관점에서 일상적 의미를 통해 이 등식을 이해하는 것은 원칙적으로 불가능하며, 이 때 등호의 의미는 실수의 구조 즉, $0.999\cdots$이 실수체의 한 원소라는 수학적 아이디어를 통해서 올바르게 이해될 수 있다.

실수계에서 다음 정리 "임의의 두 실수 x, y에 대하여 $x=y$일 필요충분조건은 임의의 실수 $\epsilon>0$에 대하여 $|x-y|<\epsilon$이다."가 성립한다(정동명 · 조승제, 1995). 이 정리에서 실수 y의 표상은 x 자신이 될 수도 있지만 그렇지 않을 수도 있으며, 그 예로 1과 $0.999\cdots$을 들 수 있다. 만약 각각의 표상을 서로 다른 대상으로 인식한다면 1과 $0.999\cdots$은 동치관계 $=$ 에 의한 1의 동치류로 보는 것이 바람직하다. 이처럼 등식 $0.999\cdots=1$이나 제논의 역리는 실수의 관점에서 올바르게 설명될 수 있으며, 이 때의 등호는 일상적 의미에서의 같음을 나타내는 것이 아니라 실수계라는 수학적 체계에서 '수학적으로 같다'는 의미를 지니고 있음을 알 수 있다.

등식 $\sqrt{2}=1.4141592\cdots$ 역시 동일한 관점에서 이해될 수 있다. 그러나 이 등식은 인지적 장애의 발생 가능성이 $0.999\cdots=1$에 비해 작다고 할 수 있는데, 이는 전자의 양변에 놓이는 대상(수)들이 모두 비일상적이고 친숙하지 않은 대상들인 반면, 후자의 경우는 상식적으로 친숙한 수(1)와 그렇지 않은 수($0.999\cdots$)가 동시에 놓여 있어 의미해석에 혼란을 겪기 때문이다.

(4) 지수법칙

앞의 예 (3)처럼 일상적 의미와 수학적 아이디어 사이의 혼란에서 비롯되는 인지적 장애 이외에 수학적 아이디어 그 자체의 불명확한 이해에서 비롯되는 인지적 장애 역시 존재하는데, 그 예로 등식 $-2=(-8)^{\frac{1}{3}}=((-8)^2)^{\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{3}}=2$(Goel & Robillard, 1996 ; Even & Tirosh, 1996)을 들 수 있다. 이 등식에서 -2와 2는 그 자체로서는 정수, 유리수, 실수, 혹은 복소수 중 어느 하나로 볼 수 있지만, $(-8)^{\frac{1}{3}}$, $((-8)^2)^{\frac{1}{6}}$, $8^{\frac{1}{3}}$ 등은 반드시 복소수의 관점에서 이해되어야 한다. 즉, 위 등식은 등호의 양 변에 위치한 수들 중 가장 상위의 수체계인 복소수체계에서 이해되는 것이 바람직하다[6].

복소수의 관점에서 등호의 양변에 위치한 각 항들은 복소수 방정식의 해집합으로 볼 수 있으며, 등식은 집합에서의 등식 즉, 해집합의 상등으로 볼 수 있다. 위 등식의 각 항들을 집합으로 표현하면 다음과 같다.

$-2=\{-2\}$

$(-8)^{\frac{1}{3}}=\{-2,\ 1\pm\sqrt{3}i,\}$

$((-8)^2)^{\frac{1}{6}}=\{\sqrt{3}\pm i, -\sqrt{3}\pm i, \pm 2i\}$

$8^{\frac{1}{3}}=\{2,\ -1\pm\sqrt{3}i\}$

$2=\{2\}$

그러므로 앞에서 주어진 등식은 다음과 같은 집합들 사이의 포함관계로 표현될 수 있다.

$$-2\subseteq(-8)^{\frac{1}{3}}\neq((-8)^2)^{\frac{1}{6}}\neq 8^{\frac{1}{3}}\supseteq 2$$

결국 등식 $-2=(-8)^{\frac{1}{3}}=((-8)^2)^{\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{3}}=2$의 이해와 분석에서 중요한 것은 그 속에 내재되어 있

6) '대수적 닫힘성'이라는 관점에서 실수는 대수적으로 닫혀있지 않으며, 따라서 이 등식은 대수적으로 닫혀있는 복소수체계 내에서 이해되어야 한다(최영기, 2000).

는 수학적 아이디어가 무엇인지 명확하게 인식하는 것임을 알 수 있다. 주어진 등식에 내재된 수학적 아이디어는 각 등호의 양변에 위치한 대상들의 수학적 구조 즉, "복소수"의 구조이다. 등식의 각 항들은 하나의 실수나 복소수로 유일하게 결정될 수 없으며, 등식들 간의 관계는 대수방정식을 만족하는 복소수 해집합들 사이의 관계로 이해되어야 할 것이다.

V. 요약 및 결론

등호는 초등학교 산술에서부터 중학교 이상의 수학에 이르기까지 대수식에서 가장 많이 등장하는 기본적인 기호이지만 그 개념은 양변에 놓이는 대상에 따라 다양할 수 있으며 종종 해당 학년의 학습수준을 뛰어넘는 상위 개념을 내포하고 있어 학습자가 그 본질적 이해에 도달하기 어려운 경우가 많다. 실제로 대수식에서 등호에 대한 같음의 의미는 일상적 의미 뿐 아니라 형식적인 수학적 아이디어를 내포하고 있다. 그러나 같음에 대한 일상적 의미가 너무 강한 나머지 수학적 아이디어로서의 같음이 자연스럽게 학습자에게 인식되기는 어려우며 이 과정에서 학습자의 인지적 장애가 발생하는데, 그 예로 등식 $0.999\cdots = 1$을 들 수 있다. 이는 산술적 사고와 대수적 사고 사이에 존재하는 인지적 장애의 대표적인 예로 볼 수 있으며, 이 때의 인지적 장애는 당연한 현상으로서 교수-학습에서 경계해야 할 대상이 아니라 학습의 한 과정으로 이해되어야 한다. 특히 교사는 이와 같은 학습자의 인지적 장애에 대처할 수 있어야 하며, 이를 위해서는 교과내용에 대한 교사의 올바른 이해와 분석이 전제되어야 한다.

등호뿐 아니라 학교수학에 등장하는 대부분의 수학적 개념들은 그 속에 일상적 의미와 수학적 아이디어를 동시에 내포하고 있는 경우가 많으며, 동일한 개념이 다양한 표상을 지니는 경우 또한 많다. 수학적 개념에 대한 대수적 사고는 그 개념이 지닌 일상적·물리적 의미와 수학적 아이디어에 근거한 형식적 의미를 통찰할 수 있는 상태와 근접하며, 일상적 의미에 집착하여 그 속에 내재되어 있는 수학적 아이디어를 미처 인식하지 못하는 상태는 산술적 사고에 가깝다고 할 수 있다. 수학적 개념 분석 모형의 관점에서 수학적 개념을 올바로 이해하고 분석한다는 것은 그 개념이 지닌 일상적 의미와 수학적 아이디어 그리고 여러 가지 표상을 명확히 인식하고 이들 사이의 상호관련성을 이해한다는 것을 의미한다. 이들 세 요소간의 불균형은 학습자의 인지적 장애의 원인이 될 수 있으며, 등호가 지닌 같음의 다양한 의미 역시 이들 세 요소들을 명확히 인식함으로써 올바로 이해될 수 있다.

참 고 문 헌

김성준 (2002). 과정-대상 측면에서 본 대수적 사고 연구, 수학교육학 연구 12(4), 서울: 대한수학교육학회.

김연식·김흥기 (1990). 중학교수학1. 동아출판사.

김홍종 (2001). 미적분학 1. 서울: 서울대학교출판부.

도종훈 (2003). $\sqrt{2}$의 무리수성 증명에 관하여. 수학교육학연구발표대회논문집 12(2), pp.449-460, 서울: 대한수학교육학회.

박교식 (2000). 수학 기호 다시 보기, 서울: 수학사랑.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교출판부.

정동명·조승제 (1995). 실해석학 개론. 서울:경문사.

조한혁·최영기 (1999). 정적 동적 관점에서의 순환소수. 학교수학 1(2), 서울: 대한수학교육학회.

최영기 (2000). $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 에 내재된 수 체계 확장의 의미와 오류해석 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 39(2), PP.145-150, 서울: 한국수학교육학회.

최창우 (2001). 대수적인 관점에서의 수와 연산. 한국수학교육학회시리즈 E <수학교육 논문집> 11, pp..71-83, 서울: 한국수학교육학회.

Behr, M.; Erlwanger, S. & Nichols, E. (1976). How children view equality sentences. *PMDC Technical Report 3, Florida State University(ERIC Document Reproduction Service* ED144802*)*.

Dewey, J. (1933). *How we think*. Boston : Heath.

Even, R. & Tirosh, D. (1995). Subjectmatter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subjectmatter, *Educational Studies in Mathematics* 29.

Even, R. & Tirosh, D. (1996). To define or not to define : The case of $(-8)^{\frac{1}{3}}$. *Educational Studies in Mathematics* 33.

Freudenthal, H. (1991), *Revisiting mathematics education*, Kluwer Academic Publishers.

Gardiner, A. (1982). *Infinite Process : Background to Analysis*. Springer Verlag.

Goel, S. K. & Robillard, M. S. (1996). The equation : $-2=(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=((-8)^2)^{\frac{1}{6}}=2$. *Educational Studies in Mathematics* 33.

Hadamard, J. (1945). *The mathematician's mind : the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton University Press.

Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics* 12.

Laczkovich, M. (1998). *Conjecture and proof*. TypoTEX, Budapest, Hungary.

Nelson, D. (1998). *The Penguin Dictionary of Mathematics*. Penguin Books.

O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. (1996). Matrices and determinants. *http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Matrices_and_determinants.html*

O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. (2002). Robert Recorde. *http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Recorde.html*

Polya, G. (1954). *Induction and analogy in mathematics*. Princeton University Press.

Sutherland, R; Rojano, T.; Bell, A. & Lins, R. (2001). *Perspectives on school algebra*. Kluwer Academic Publishers.

Analysis of the Equality Sign as a Mathematical Concept

Do, Jonghoon
Department of Mathematics Education, Seoul National University, Seoul, 151-748, Korea
E-mail: djhn@dreamwiz.com

Choi, Younggi
Department of Mathematics Education, Seoul National University, Seoul, 151-748, Korea
E-mail: yochoi@snu.ac.kr

In this paper we consider the equality sign as a mathematical concept and investigate its meaning, errors made by students, and subject matter knowledge of mathematics teacher in view of The Model of Mathematical Concept Analysis, arithmetic-algebraic thinking, and some examples.

The equality sign $=$ is a symbol most frequently used in school mathematics. But its meanings vary according to situations where it is used, say, objects placed on both sides, and involve not only ordinary meanings but also mathematical ideas.

The Model of Mathematical Concept Analysis in school mathematics consists of Ordinary meaning, Mathematical idea, Representation, and their relationships. To understand a mathematical concept means to understand its ordinary meanings, mathematical ideas immanent in it, its various representations, and their relationships.

Like other concepts in school mathematics, the equality sign should be also understood and analysed in view of a mathematical concept.

* ZDM Classification : E49
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C70
* Key Word : Equality sign, Mathematical concept, The model of mathematical concept analysis, Mathematical idea, Ordinary meaning, Representation, Arithmetic thinking, Algebraic thinking.