韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2003, 11. 제 42권, 제 5호, 647-672.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2003, Vol. 42, No. 5, 647-672.

수학적 탐구력 신장을 위한 테크놀로지의 활용의 효과[1)]

고 상 숙 (단국대학교)

서 론

세계화, 정보화 물결 속에 초고속 통신망과 고성능 기기들의 확산으로 우리나라 각 가정에는 인터넷 활용의 급속한 생활화가 이루어지고 있으며, 그간 지속적으로 진행되어 온 학교 교실 환경 선진화 계획에 따라 초, 중등학교에는 멀티미디어 실이 설치되는 등 학습환경이 변화하고 있다. 우리나라 제7차 교육과정(교육부, 1997)에서도 Technology의 적절한 활용과 도구화를 적극 권장하고 있다. 이런 Technology-Assisted Instruction 환경에서는 학생의 창의적 사고력과 문제해결력의 배양을 목적으로 다양한 탐구활동과 문제해결 과정에서 풍부한 경험이 가능하다. 수학교육의 방향에 있어 선도적 역할을 하고 있는 미국의 새로운 규준집 'Principles and Standards for School Mathematics (NCTM, 2000)'에서도 다음과 같이 테크놀로지 활용에 의한 탐구활동을 지지하였다.

> 전자 기술공학-계산기와 컴퓨터-수학을 행하고, 가르치고 배우는데 필수적인 도구이다. 그것들은 수학적 아이디어에 시각적 상을 제공하고, 자료의 조직, 분석을 용이하게 하며, 정확하고 능률적으로 자료를 처리한다. 그것들은 기하, 통계, 대수, 측정, 그리고 수 체계를 포함한 수학의 모든 분야에서 학생들의 조사활동을 지지한다. 이런 기술공학적 도구가 가능할 때, 학생은 의사를 결정하고, 반성, 추론, 그리고 문제해결과 같은 활동에 집중할 수 있다 (NCTM, 2000, p. 24).

이와 같은 시대적, 사회적 요구에 부응하기 위하여서는 우선, 사범대학에서 테크놀로지를 활용하는 교육과정이 현장교사에게 필요한 내용으로 적극 개선되어야 하고, 테크놀로지를 활용하는 환경에서 무엇을, 어떻게 가르칠 것인가에 대한 많은 경험을 제공하여 학생으로 하여금 테크놀로지에 대한 두려움을 제거하고 이를 바탕으로 테크놀로지를 현장에서 정규 수학 교육과정에 적극 활용할 수 있는 자질을 키우도록 도와야 한다. 그러나 아직 대다수의 사범대학의 교육과정은 전문가의 부족으로 인해 이러한 변화에 충분히 대응하지 못하고 있으며 유명무실 한 운영으로 제구실을 못하고 있는 실정이다. 또한, 학교 현장의 수학교육에서 테크놀로지를 효율적으로 활용하는데 문제점을 살펴보면(고상숙, 2001),

(1) 테크놀로지 교육과 테크놀로지를 이용한 수학교육과의 혼동

(2) 수학개념에 대한 분석과 이해 부족

(3) 대다수 교사의 테크놀로지와 관련된 지식의 부족과 그로 인한 두려움

(4) 특정한 수학적 개념에 대하여 테크놀로지를 학습보조도구로 사용할 때 교육효과를 위한 수업준비와 연구의 부족

등이 있다. 그러므로 학생들이 학교 현장에 진출하여 테크놀로지를 효율적으로 잘 활용하게 하려면 사범대학 교육에서 이 위에서 열거한 문제점들에 대하여 해결책을 제시할 수 있어야 한다. 더욱이 우리나라에는 사범대학 학생들이 어떻게 학습하는가, 그들의 학습과정에서 성취도에 미치는 긍정적, 또는 부정적 요소는 무엇

---

* 2002년 3월 투고, 2003년 11월 심사 완료.
* ZDM 분류 : C35
* MSC2000 분류 : 97C70
* 주제어 : 수학적 사고, 귀납적, 연역적, 창의적 사고, 탐구학습, 그래핑 계산기, 질적 연구방법, 예비수학교사.
1) 이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음 (KRF-2002-003-B00251).

인가, 또는 테크놀로지와 상호 작용하는 환경에서 크게 변화하는 것은 무엇인가 등 테크놀로지에 대한 구체적인 연구는 아직도 많이 부족한 실정이다. 즉, 사범대학 학생을 위한 연구로서 학생들의 학습 발달 과정을 분석하여 그들의 의식구조를 파악하고, 테크놀로지가 교수-학습을 어떻게 향상시킬 수 있는가에 대한 실질적인 연구를 통해 앞으로 사범대학 교육에 대한 방향제시가 절실히 필요하다.

따라서, 본 연구는 사범대학 학생을 대상으로 첫째, 구체적 시각화를 이용하여 수학내의 연결성을 가져오는 수학내용을 중심으로 수학적 탐구력 신장 위한 교수-학습 자료를 사용하고 소형 컴퓨터와 다름없는 그래핑 계산기, TI-92 plus를 학습의 도구로서 사용하는 환경에서 학생들의 학습 발달 과정을 연구 분석하며, 둘째, 이런 테크놀로지와 상호 작용하는 환경에서 테크놀로지 활용에 대한 장, 단점과 학생이 직면하는 어려움 등을 파악하고 그 대책을 모색해봄으로써 테크놀로지 활용하는 미래 수학교육에 필요한 방향을 제시하고자 하였다.

연구문제

1. 그래핑 계산기를 활용한 탐구학습에서 사범대학 학생들의 수학적 사고는 어떻게 발달하는가?

1) 학생은 관련된 지식 정보로부터 어떻게 과제 해결의 실마리를 찾아내는가?

2) 귀납적, 연역적, 창의적 사고는 각각 어떻게 이루어지며 어떤 특징을 나타내는가?

2. 테크놀로지와 상호작용 하는 환경에서 장, 단점은 무엇인가?

3. 탐구학습에서 학생이 겪는 어려움은 무엇 때문인가?

용어의 정의

과제해결: 일반적인 문제해결과 유사하나 본 연구에서는 학생이 귀납적, 연역적, 그리고 창의적 단계의 발달과정에서 같은 주제 아래 한 개 이상 다수의 문제를 탐구활동을 통해 해결하는 것이므로 보다 광의적 의미를 부여하기 위해 사용되었다.

탐구력: Webster's Desk Dictionary(RHI, 1990)는 탐구한다는 뜻을 '자세히 관찰하고, 체계적으로 조사하고 모든 가능성을 탐구하며, 발견을 목적으로 비교적 큰 규모로 탐색하는 것이다.' 라고 정의하였다. 이런 활동을 통해 신장되는 능력을 탐구력이라 하였다.

연구의 제한점

본 연구는 다음과 같은 주요한 제한점을 지닌다. 첫째, 수학 교수-학습을 위해 본 연구의 연구도구가 포함하고 있는 학습 내용과 방법은 테크놀로지 환경에서 연구자 개인의 독특한 철학과 경험에 근거하므로 그것은 일반적인 연구가와 많이 다를 수 있다. 그러나, 그런 가정 하에 받아들여지는 질적 연구에 의한 심층적인 분석은 학생의 탐구력 신장에 필요한 수학적 사고력의 발달을 의미있게 파악할 수 있다는 점에서 수학교육 현장에 시사하는 바가 크다고 하겠다.

둘째, 본 연구에서 사용되는 연구도구는 Stevenson (1995)이 주장하는 귀납적→연역적→창의적 단계로 구성되어 있어 창의적 사고에 제한적인 접근을 바탕으로 하고 있다는 점을 들 수 있다. 이는 반드시 창의적인 사고가 귀납적, 연역적 사고만을 통해서 발달한다고 주장하는 것보다는 오히려 그 하위 구조로서 귀납적, 연역적 사고를 필요로 한다는 위계성에 더 큰 의미가 있다고 볼 수 있다. 또한 Stevenson이 제시하는 창의적 단계의 과제들은 본 연구가 배경으로 하는 창의적 사고의 인지적 요소를 포함하고 있다고 가정한다.

이론적 배경

1. 수학적 탐구

테크놀로지를 활용한 수학적 탐구활동은 본 연구의 학습자료 구성의 기저를 이룬다. Orton(1992)은 두 가지로 탐구의 의미를 분류하였는데, 한 가지는 미리 세워진 수학적 결과에 귀결될 수 있게 하는 폐쇄형 탐구(closed explorations)와 다른 하나는 결과가 미리 알려지거나 전혀 선명하지도 않고, 순수하게 탐구 그 자체라고 할 수 있는 개방형 탐구(open explorations)라 하였다. 본 연구의 학습 자료에 사용될 탐구의 의미는 아래와 같다.

* 학생이 정리를 발견하게 하기 위해
* 학생이 각 요소 간에 관계성을 익숙하게 하기 위해

* 학생이 이미 알고 있는 개념을 적용하게 하기 위해
* 주제에 대한 형식적 토론이전에 직관적 지식 또는 개념의 이해를 구성하게 하기 위해

교실을 '탐구의 공동체(Sharp, 1987; Splitter, 1988)'로 만드는 것은 수학적 의사소통의 개발을 강화할 수 있다. 여기에서 학생들은 질문과 문제를 이해하고, 발견하고, 발명하며 그렇게 함으로써 명백한 메타인지 행위를 통하여 자기 교정적인 탐구에 참여하게 된다. 다른 사람과 관계에서 고차원적인 사고에 관여함으로써 그들은 자기의 사고에 있어서 비판적이 되고, 주어진 문제 형태를 항상 그대로 받아들이기보단, 수용된 입장에 대하여 도전적이 되기에 필요한 '능력과 허락, 그리고 의무감조차' 학생 자신이 가지고 있음을 깨닫게 될 것이다(Resnick, 1987, p. 41). Fey(1983)는 학생은 탐구적 경험을 통해 수학의 어느 분야나 수준에서 이론을 정립하고 문제 해결에 필수적인 강한 직관력과 추측하는 정신력을 키운다고 주장하며 학생은 아이디어를 사용하여 이성적으로 문제를 풀고 추론하기 전에 구조사이에 관계와 개념의 직관적 이해를 획득해야한다고 하였다.

탐구의 성격은 학습자와 분리하여 생각할 수 없다. 그것은 학습자의 노력과 창의성에 달렸으며 조사하는 과정은 문제 해결로 유도된다. 어떤 점에서는 발견, 조사, 문제해결이라는 용어와 다르게 일어나는 과정 사이에 존재하는 뚜렷한 관계성이 있다. 탐구에는 지루한 교과서 문제가 아니라 반드시 실생활 문제는 아니라도 실제적인 문제이다. 문제의 성공적인 키는 필요한 지식과 기술을 소유하기 위해서만 아니라 구조망을 형성하기 위해서도 학습자에게 달려 있다.

Ponte와 Matos(1992)에 따르면, 수학적 탐구에서 학습자는 수학자의 역할을 한다고 한다. 충분히 복잡한 상황, 대상, 현상, 기저가 주어졌을 때 학습자는 그것을 이해하려하고, 일반화를 꾀할 수 있는 패턴, 관계성, 유사점, 그리고 다른 관계성을 찾으려 한다.

> 수학적 탐구는 문제해결 활동과 공통점을 지닌다. 그들은 복잡한 사고과정을 포함하고 학습자의 열의있고 창의적인 참여가 요구된다. 하지만 그들은 뚜렷한 차이점이 있다. 수학적 문제해결은 문제가 잘 정의되어 주어지는 반면에 탐구는 그렇지 않다. 학습자에게 주어진 첫째 과제는 탐구를 더 정확하게 하는 것이고 수학적 제시 활동에 대해 공유할 수 있는 형태로 만들어 가는 것이다(p. 239).

탐구는 개방형 문제(open-ended)이고 많은 다양한 방법으로 접근이 가능하다. 이런 점은 Harlow(1950)에 의해 주장되었는데 탐구하는 기회는 내적으로 실마리가 일어나고, 탐구적인 행동 자체로 만족하며 정보에 대한 실질적 필요성 그 이상에 의해 좌우된다고 말하였다.

2. 수학적 사고

수학적 사고에 관한 문헌을 통해 수학적 사고는 어떻게 구성되며 구성요소는 무엇인지에 대해 다양한 견해가 있음을 알 수 있다. Burton(1984)은 수학적 사고에 중요한 네 가지 인지적 과정으로 전문화하기(specializing), 일반화하기(generalizing), 추측하기(conjecturing), 확신하기(convincing)라고 규명하였다. 그녀는 사고란 인간이 환경을 이해하고 통제하기 위해 인간에 의해 사용되는 수단(p. 36)이며, 수학적 사고는 그 사고가 수학에 관해 사고하기 때문에 수학적이라기보다 그 사고가 의존하는 연산이 수학적 연산이기 때문에 수학적이라고 주장하였다. 전문화 과정에서는 사고하는 인간은 구체적인 예들을 조사하면서 시작한다. 그리고나서 이런 예들을 충분히 조사하였을 때 예들 사이의 관계성에 대해 추측하길 시작할 것이다. 추측하는 과정을 통해, 패턴이 의미하는 감각을 찾게 되고, 일단, 패턴, 또는 규칙성을 발견하면, 일반화를 구성하는 명제를 형성한다. 끝으로, 일반화는 인간이 그것의 존재에 대해 확신(convince)을 얻을 때까지 검증을 거치게 되며 그 인간은 마침내 바깥 세상에 대해 확신하게 된다. 여기서 귀납적으로 사고하는 것은 전문화하기, 추측하기, 일반화하기로 진행하는 것을 의미하고, 연역적으로 사고하는 것은 일반화하기, 추측하기, 전문화하기 순으로 나아가는 것을 뜻한다. 또한 확신하기는 확증하기(verify)뿐만 아니라 모니터링 하는 초인지 과정도 포함한다. Schoenfeld(1992)는 추상, 기호적 표상, 그리고 기호적 조작을 수학의 도구로 설명하고 공구사용법을 아는 것이 장인을 만들 수 없는 것처럼 이러한 수학 도구를 사용하도록 훈련받는 것이 수학적으로 사고한다는 것을 의미하지는 않는다고

의미하지는 않는다고 주장하였다. 그에 따르면 수학적으로 사고하는 것을 배우는 것은 수학화와 추상화의 과정을 평가하고 수학 도구를 응용하기 위해 필요한 관점을 개발하는 것을 뜻한다.

귀납적과 연역적 사고

이 부분은 강옥기(2001, p.80)가 요약한 가다키리(片桐重男, 1992)의 수학적 사고에서 귀납적 사고와 연역적 사고를 인용한다. 귀납적 사고는 몇 개의 대상으로부터 공통적인 규칙이나 성질을 발견하여 이를 근거로 당면 문제를 해결하려고 할 때 필요한 수학적 사고이다.

연역적 사고란 넓은 의미로는 전제로 주어진 몇 개의 명제로부터 논리적인 규칙을 써서 필연적인 결론을 엄밀하게 도출할 때 필요한 사고이다. 가다키리(1992)는 연역적 사고의 뜻을 학교교육의 뜻에 맞도록 좀더 넓은 범위로 확대하였다. 그는 연역적 사고 범주에 공리적인 사고, 구조적인 사고, 해석적인 사고, 종합적인 사고를 포함한다. 공리적인 사고란 유클리드의 원론처럼 공리계를 설정하고 그것을 근거로 하여 논리적인 법칙을 적용하여 사고하는 것을 의미한다. 공리적 사고에서는 공리계를 근거로 하지 않는 단순한 경험이나 실험의 결과는 참으로 인정하지 않는다. 구조적인 사고에서의 구조란 한 집합을 생각하고 그 집합에 연산이나 순서, 위상 등을 도입하여 이에 관한 어떤 성질을 정함으로써 얻은 것이다. 예를 들면, 덧셈에 대한 군이란 구조는 한 집합에 덧셈이 정의되어 있고, 이 집합은 덧셈에 대해 닫혀 있으며 결합법칙이 성립하고, 항등원과 모든 원소에 대한 역원이 존재한다는 것을 포함한다. 해석적인 사고의 뜻은 구하려고 하는 것을 얻었다면 어떤 사실이 성립해야 되는가의 방향으로 생각을 전개할 때 필요한 사고이다. 거꾸로 풀기 전략, 귀류법, 간접증명법, 문장제 문제를 미지수로 정하고 식을 세워 해결하는 것 등이 해석적 사고에 해당한다. 종합적 사고란 유클리드 원론에서처럼 주어진 조건부터 어떤 사실이 성립하는가의 방향으로 사고를 전개할 때 필요한 사고이다. 복잡한 연산문제를 차례로 단순화하는 것, 가정에서 나아가 결론으로 끝맺는 직접증명법, 또는 해석적 사고를 한 뒤 역순으로 사고를 전개해 가는 것을 종합적 사고라 한다.

수렴적, 확산적 사고와 창의적 사고

길포드(Guilford, 1959a)의 인간 지적능력에는 수렴적 사고와 확산적 사고를 포함하고 있다. 수렴적 사고란 일반적인 원리나 법칙을 사용하여 구체적인 문제를 해결하는 능력을 뜻한다. 예를 들면 근의 공식을 사용하여 주어진 방정식을 푸는 능력은 수렴적 사고력에 속한다. 즉, 주어진 정보를 분석하여 어떤 결론을 이끌어 내는 것은 수렴적 사고이다. 확산적 사고란 주어진 정보를 새로운 방법으로 봄으로써 고유하고도 예기치 않은 결론을 이끌어내는 창의적인 능력이다. Guilford(1959b)는 이를 창의적 사고의 척도로 보았으며 어떤 면에서는 창의적 사고를 지칭하기도 하였다. 또한 그는 확산적 사고의 하위 구성 요소로, 민감성, 유창성, 융통성, 정교성, 종합력, 분석력, 재구성력, 복합성, 평가의 9개 요소로 나누었으며 이 중 유창성, 독창성, 융통성, 정교성을 특히 창의적 문제 해결력의 판단 기준에서 중심적 기능으로 다루었다.

유창성(fluency)이란 Torrance(1962)에 의하면 문제해결의 여러 가지 대안을 산출할 수 있는 사고능력을 의미하며, 다시 말해, 유창성은 제한된 시간 안에 어떤 자극, 대상에 대한 아이디어를 많이 생성해 내는 양적인 사고 과정이다.

유연성(flexibility)이란 어떤 문제가 제시될 때 그 상황에 접근하는 사고의 유연성을 의미한다. 즉, 고정적이고 경직된 사고방식이나 지각체계에서 벗어나서 폭넓고 다양하게 접근함으로써 여러 종류의 문제해결 방법을 생각해 내는 사고능력이다.

독창성(originality)이란 사고의 새로운 개념으로 다른 사람이 생각하지 않은 독특한 방식으로 생각하는 능력을 말한다. 즉, 주어진 문제 상황에서 기존의 해결방안이나 생각을 그대로 사용하는 것이 아니라 자기 나름대로 색다르고 참신한 문제해결 방법을 생각해 내는 능력을 말한다.

정교성((elaborateness)란 사고의 깊이의 깊이개념으로서 한 가지 아이디어를 설명하기 위하여 상세한 내용을 가득 채워 넣거나 심층적인 아이디어를 생산해 내는 능력을 말한다. 즉, 사고가 피상적인 수준에 머무르지 않고 보다 세부적으로 나아갈 수 있는 구체적인 수준으로 아이디어를 보다 재미있고 완전한 것으로 확대해 가

는 사고과정을 말한다.

새로운 수학적 개념을 만들어 내거나 중요한 정리를 만들어내는 데는 확산적 사고가 작용한다. 모든 문제 해결에는 어느 정도의 창의적인 사고가 뒷받침되어야 하며, 확산적 사고를 이끌어 주는 문제해결 기법들은 창의력과 관계되는 요소들이다(Gallini, 1983). 따라서 Torrance(1999)는 문제 해결을 창의력을 개발하는 데 있어 매우 핵심적 역할을 하는 요인이라 보았으며, 특히 문제 해결 과정에서의 요소와 절차 그리고 인지 패턴에 관심을 두었다. 이는 문제 해결 과정에서 기존의 지식과 결합하여 새로운 문제를 발견하고 이해하며 평가하고 해결하는 중추적인 요인을 개인의 창의적 능력에서 기인된 것이라 여기기 때문이다. 개방형 문제(open-ended problem)등을 접할 경우 가능한 한 많은 해답을 찾도록 시도하게 됨에 따라 다양한 생각들이 표출되고, 보다 독특한 사고들이 나타날 가능성이 증가하는 데 바로 이러한 점을 확산적 사고에 대한 특성으로 규정하는 연구들이 있다(예를 들어, Guilford, 1959b, 1984; Torrance, 1972; Wallach & Kogan, 1965).

Urban(1995)는 창의력의 요소들을 인지적 요소와 성격적 요소의 두 그룹으로 나누었다. 인지적 요소에는 첫 번째, 확산적 사고와 행동으로, 일반적인 사고의 특징이 아니며 광범위한 인식과 일반적이며 깊은 지식과 사고 기반의 바탕 위에서 가능하다. 이는 특정 과제의 내용과 성격에 따라서 변화한다. 두 번째, 일반적 지식과 사고 기반으로, 문제에 대한 민감성 뿐 아니라 모든 확산적 사고의 하위 요소들이 일반적 지식과 사고 기능 기반과 관계가 있다. 이 두 가지 요소가 역동적 조화를 이룸으로써 창의적 과정이 출현하게 된다. 세 번째, 특정 영역에서의 지식 기반과 사고 및 작업 기술로, 특정 영역의 지식이나 사고 기술을 연마하지 않고는 우수한 창의력을 발휘할 수 없다. 특히 혁신적이고 뛰어난 산출물이나 창의적인 아이디어를 생성해 내는 데 있어서 그 중요성이 인식되고 있다.

성격적 요소에는 첫 번째, 초점 맞추기와 과제에 대한 집착력으로 특정 영역의 종합적이고 자세한 지식과 기능을 갖기 위해서는 훈련을 통해서 특정 주제에 대한 강한 집착과 끈기를 갖추어야 한다. 문제시되고 있는 과제와 그에 관련된 주제 영역에 대해서 강도는 달라지더라도 오랫동안에 걸친 주의집중이 있어야 자료를 수집, 분석, 평가, 정교화가 가능하다. 두 번째, 동기와 동기화로, 적절한 동기 특히 내재적 동기는 창의성의 주요 전제 조건이다. 창의적 산출물은 외부적 요인, 예를 들면 작업에 대한 평가나 보상에 대한 기대, 또는 선택 가능성의 부족 등에 의해 부정적으로 영향을 받을 수 있다. 새로움에 대한 요구, 호기심, 탐색과 지식에 대한 욕구는 선천적일 수도 있으나 교육환경에 의해 억제 될 수도 있다. 따라서 그러한 욕구를 유지 발전시키는 교육환경을 조성할 필요가 있다. 세 번째, 개방성과 애매모호함에 대한 참을성으로, 개방성과 애매모호함에 대한 참을성은 초점 맞추기와 과제집착력과 변증법적 관계가 있는 것으로서 창의성과는 중요한 관계가 있다. 초점이 맞추어진 집중적인 활동으로부터 벗어나 잠시 뒤로 물러앉아서 초점을 넓히는 단계로 들어가는 변화를 갖는 등 강도가 낮은 시간을 통해 상호 보완적인 조화를 인정하며 발전시켜야 한다. 이는 애매모호함의 수용이 창의적 사고를 유도하기는 하지만 이를 너무 지나치게 강조하다 보면 논리적 사고의 철저성이 결여될 수도 있기 때문이다. 여기에서 특정 영역의 깊은 지식에 관련되어서 이루어지는 무의식적이고 확산적이며 연상적인 사고와 자료를 서로 얽어서 처리하고 저장하는 넓고 개방된 지각 간의 상호작용을 볼 수 있다. 놀이와 실험을 즐길 때 유창성과 융통성이 나타나며, 애매모호함에 대한 참을성은 열정이 있어야 나타난다.

기존의 연구들(Sternberg, 1999; 김영채, 1999; 김남성, 1993; 허경철 외, 1991; Guilford, 1977; Torrance, 1962)을 살펴봄으로써 본 연구에서 조사하고자 하는 창의적 사고의 인지적 요소로는 유창성, 유연성, 정교성, 독창성을 고려하였고, 성격적 요소로는 Urban(1995)[2]의 세 가지 성격적 요소를 참고하였다. 본 연구에서는 특히 학생이 창의적인 사고 이전 단계에서 선행적 사고,

2) Urban의 인지적 요소의 분류는 본 연구에 적절하지 않아 제외되었다. 이는 본 연구가 확산적 사고와 일반적 사고 유형의 분류보다는 확산적 사고 하에 창의적 사고를 가정하고 있기 때문이다(Guilford, 1959b; Torrance, 1962, 1972). 특히 특정 영역에서의 지식 기반과 사고 및 작업 기술은 이미 본 연구의 자료는 수학적 내용을 다루고 있기 때문에 이들의 유무를 파악하는 것과 같은 연구 의도는 의미가 없다고 사료되었기 때문이다.

즉, 귀납적과 연역적 사고를 경험하고 이를 바탕으로 어떻게 창의적 사고를 발달해 가는지를 조사하는 것이므로 인지적 요소를 중심으로 어떻게 형성되어 가는지, 그리고 성격적 요소는 어떤 영향을 미치는지 살펴보고자 하였다.

3. 그래핑 계산기에 대한 해석적 모델

Berger(1998)는 대학교에서 수학을 전공하는 1학년 학생을 대상으로 그래핑 계산기가 그들의 학습에 어떤 영향을 미치는지 조사하였다. 계산기를 사용한 학습에서 증폭(amplification)의 효과와 인지적 재조직(cognitive re-organization)의 효과를 구별하고자 하였다. 즉, 증폭의 효과란 학생이 특정의 수학적 과제를 설명하는 능력의 증폭을 뜻하고, 인지적 재조직의 효과란 수학적 과제에 대한 학생의 수학적 사고나 개념의 발달을 의미한다.

> 증폭은 테크놀로지를 사용한 결과로서 얻을 수 있는 질적인 변화보단 테크놀로지를 사용하는 중에 학생이 조작하는 속도와 용이성에 관련이 있다. 그러므로 증폭은 단 기간에 관찰될 수 있다(테크놀로지는 문제를 푸는 학생을 직접적으로 뿐만 아니라 즉각적으로 돕기 때문에). 만약 그래핑 계산기를 사용한 결과로서 학생이 수학적 개념을 좀더 의미있게, 심지어 수준있게 사용할 수 있다면, 우리는 테크놀로지가 사고하기 위해뿐만 아니라 그 사고를 개발하게 돕는 도구로써 중간역할을 담당한다는 사실을 알 수 있다 (Berger, 1998, pp.15-16).

이런 요소의 차이점을 본 연구에서도 조사할 수 있다면 학생의 수학적 사고에서 계산기의 효과에 대해 좀더 구체적으로 논할 수 있다고 생각한다.

이상의 본 연구의 이론적 배경을 제공하는 수학 교육가들의 이론에 대한 각각의 주장은 본 연구를 통해서도 우리나라의 실정에 어떻게 적용할 수 있는가 하는 가능성을 조사해봄으로써 우리나라의 테크놀로지를 포함한 교사교육에 필요한 관점을 제공하게 될 것이다.

연구 방법

최근에는 학습자의 학습결과뿐만 아니라 학습과정에서 무엇이, 왜, 어떻게 일어났는가에 대한 보다 근본적인 문제에 대한 관심이 고조되고 있다. 본 연구는 오늘날 교과교육 분야에서 자주 사용되고 있는 전체론적(holistic) 질적 연구방법을 사용하여 학습자의 관점에서 학습과정을 정의하고 이론을 찾아 보다 현장감 있는 연구가 되고자 하였다. 본 연구의 목적은 역동성 있는 테크놀로지와 상호 작용하는 환경에서 탐구활동이 주어졌을 때 학생들의 수학적 사고발달 과정을 조사하는 것이므로 일반 연구 등에서 구할 수 있는 자료 이상으로 충분한 증거 자료, 예를 들면, 관찰, 인터뷰, 학습자 노트, 관찰자 노트 등을 사용할 수 있는 디자인의 장점 때문에 사례연구(Creswell, 1998; Merriam, 1998)를 택하였다. Merriam(1998)은 인간이 연구하고자 하는 현상이 내적으로 구분되어 있지 않다면 그것은 사례가 아니다(p. 27)라고 하였다. 본 연구에서 사례(계산기를 사용한 학습자의 수학적 사고 발달과정)는 다른 것으로부터 구분되는 문맥 속에서 일어나는 하나의 현상이다. 특히 일정 비교분석(constant comparison)을 사용하여 2개조를 꾸준히 비교분석하여 그 차이점이나 공통점을 찾으려하여 분석의 타당도를 높이려 하였다.

연구 대상

본 연구의 실험을 위한 연구 대상으로는 2002년 2학기에 서울에 위치한 한 사립대학교 사범대학 수학교육학과 2학년 학생을 대상으로 개설되어 조별 학습을 진행되었던 연구자의 강의과목, 이산수학을 수강하고 매주 토요일 오전 10시에서 오후 1시까지 시간을 할애할 수 있는 학생 중에서 학생의 자발적 의사에 의해 선택되었다. 본 실험을 위해 각각 3명의 학생으로 전체 2조가 선택되었으며, 학생의 탐구학습 과정을 연구하는 것이므로 성별이나 성적은 고려되지 않았다. 평소 수업에서 A조의 특징은 매주 주어진 계산기에 대한 문제를 충실히 해낼 뿐만 아니라 자신들이 준비한 문제에 대해서도 매우 적극적으로 조사하여 발표하는 자세를 지닌 반면, B조의 특징은 계산기가 주어져도 별 흥미를 못느끼고 “결국 수학의 문제는 혼자 스스로 해결해야 하는 것 아닌가요?”라고 연구자와의 인터뷰에서 피력하였던 것처럼 계산기 사용에 그리 의존하려 하지 않은 성향을 지녔으며 새로운 문제를 찾아내는 것보단 주어진

문제해결에 만족하는 자세를 보였다. 강의에 대한 두 조의 인지적 측면의 성취도에는 차이점이 거의 없었으나 정의적 측면을 고려한 전체 성적평가에서는 차이점이 두드러졌다. 연구자는 계산기 사용에 대한 태도에서 이런 두드러진 차이점을 지닌 두 그룹이 그들의 과제 해결에서 어떤 차이점을 나타낼까하는 궁금증을 더하게 되었다.

연구 도구

본 연구는 사범대학 수학교육학과 학생의 탐구학습 발달과정을 조사하는 것이므로 연구자는 탐구문제로 총 7개의 학습 과제를 구성하였다. 연구도구로서 문제의 선택 기준은 수학적 내용을 중심으로 쉽게 풀리지 않으며, 해결 방법이 다양하고, 테크놀로지 학습 환경에 적합한 문제로 구성되었다. 각 과제는 개방형 문제로써 처음 다섯 문제의 구성은 수 패턴, 측정 또는 기하학적 탐구 문제로 수학자 Stevenson(1995)의 "Exploratory Problems in Mathematics"에서 발췌되었고(과제 1-5), 나머지 2문제는 함수와 관련된 개방형 탐구문제(과제 6-7)로 구성되었다(부록 참고). 특히, 상황이 제시되지 않는(non-contextual) 함수 문제로 구성된 과제 6-7에서 연구자의 의도는 학생들이 함수의 표상(그래프, 좌표값, 함수식 등)을 어떻게 잘 활용하는지, 또 이전의 6개의 탐구과제와 비교해서 상대적으로 쉬운 과제 탐구 7에서 학생은 어떻게 이전 지식과 연결을 짓는지, 그들의 귀납적, 연역적, 창의적 단계의 진행은 어떻게 이루어지는지를 조사하고자하였다. 또한, 처음 4 과제에서 창의적 단계는 제시되어진 반면, 시간이 지나 탐구활동에 어느 정도 익숙해진 후 마지막 3 과제에선 창의적 단계를 스스로 구성하게 하여 창의적 사고의 발달을 조사하고자 하였다.

전체 탐구문제의 형식은 Stevenson(1995)이 제시한 귀납적 단계(Inductive Stage), 연역적 단계(Deductive Stage), 그리고 창의적 단계(Creative Stage)로 구성되었고, 이 진행과정에서 학생들의 수학적 사고과정을 심도있게 조사하였다. 특히 귀납적 단계에서는 다음 절차를 따를 수 있게 제시되었다.

Step ①: data를 만든다.
Step ②: data를 조직한다.
Step ③: 패턴을 찾는다.
Step ④: 패턴에 따라 더 많은 data를 만든다.
Step ⑤: 패턴에 맞는 식을 세운다.
Step ⑥: 질문에 답한다.
패턴을 잘 정리한다.

①에서 데이터를 만드는 방법에는 두 가지가 있다. 첫째 방법에는 데이터를 만든 다음 그들사이의 규칙성을 찾는 방법이고, 둘째 방법에는 데이터를 만들어가면서 일반성을 예상하고 그 예상을 확인하면서 데이터를 만들어가는 방법이다. 이 두 방법의 유용성은 문제의 난이도와 개인의 역량에 따라 차이가 있는데 일반적으로 후자가 더 바람직하다고 생각된다.

본 연구는 소형 컴퓨터와 다름없이 수학적 주제에 대한 다양한 표상간의 이동이 자유로운 그래핑 계산기(TI-92)가 학습자의 탐구활동에 학습 도구로써 사용되었다. 그래핑 계산기(TI-92)가 선택된 주된 이유는 컴퓨터보다 비용이 훨씬 저렴하고 관리, 보관이 편리한 점도 있지만 그보다 더 중요한 것은 다양한 알고리즘, 엑셀과 비슷한 table에서 data 분류처리, 그래핑 기능뿐만 아니라 기하 교육 소프트웨어, Cabri 또는 GSP 프로그램이 내장되어 있어 Window(또는 표상)간의 자유로운 이동으로 표상간의 연결성이 뛰어나며 학습자의 통제 하에 소형컴퓨터가 가질 수 있는 이점을 충분히 살릴 수 있다는 점이다. 또, 학생들의 이런 계산기 사용에 대한 어려움을 최소화하기 위해, 학기 초부터 계산기 TI-92 Plus와 링크 잭(계산기와 컴퓨터를 연결하여 자료를 다운 받을 수 있는)이 학생 전원(15명)에게 제공되었으며, 한 학기 내내 이들을 소유하게 하여 자유롭게 사용하게 하였다.

연구절차

본 연구는 사범대학에서 소형 컴퓨터와 같은 그래핑 계산기가 탐구력을 키우기 위해 유용한 학습도구로 사용될 때 학생의 학습발달과정을 조사하여 탐구력 발달과정을 규명하고, 그에 따른 테크놀로지 활용의 효과를 파악하는 것을 목적으로 한다.

본 연구의 수행은 크게 두 국면으로 구성된다. 첫째 국면은 탐구 활동을 위한 학습자료(연구도구)를 구안하

는 과정으로 이를 위해서는 (1) 관련 문헌의 수집과 분석, (2) 수학학습 내용 분석, (3) 학습자료 개발의 순서에 따라 연구도구를 구성하고, 두 번째 국면에서는 첫째 국면에서 개발한 자료를 사용하여 사범대학 학생들의 조별 활동을 중심으로 본격적인 실험연구가 진행되었다.

두 번째 국면에는 조별로 구성된 학습자와 임상상담과 관찰과 학습 진행 과정(자료)을 비디오카메라에 담아 수집하고 이를 바탕으로 일정 비교 분석(constant comparison) 방법에 의해 학습과정이 심도 있게 분석되어 테크놀로지의 효과를 파악하였다. 먼저 실험에 의한 자료 수집은 2002년 2학기에 개설된 연구자의 강의 과목, 이산수학을 수강한 수학교육학과 학생을 대상으로 실시하였다. 연구자는 학생들이 계산기를 익숙하게 사용할 수 있게 하기 위해 매 수업의 제 2차시에는 계산기를 이용하여 해결할 수 있는 다양한 문제를 구성하였고, 학생은 이 과정에서 프로그래밍을 포함한 계산기의 다양한 기능을 습득하였다. 특히 9월과 10월은 학생들의 익숙도의 향상을 위해 시간을 할애하였고, 어느 정도 익숙해진 10월 중순부터 매주 토요일마다 본격적인 자료수집이 시작되었다.

자료수집에는 2개조가 구성되었으며 조별 내 학습의 효과를 관찰하기 위해 조별간의 의사소통은 허락되지 않았다. 선택된 조별의 탐구과정은 비디오카메라에 담아 수집하였고, 본 대학교 수학교육학과 대학원에 재학중인 2인의 연구조교가 각 조를 담당하여 관찰과정을 기록하였으며, 각 조는 매번 자신들의 문제 풀이 결과와 활동 후 자가 진단 평가를 작성하여 제출하였다. 연구 수행 과정(과제 4)에서 B조에서 한 명이 결석하는 경우가 발생하였는데 본 과정을 수강하는 학생 중에서 한 명이 대신 참여하기도 하였다. 연구자는 관찰자 입장에서 관찰지를 작성하였고 학습자들이 도움이 필요할 때 안내자로서 역할을 하였다. 자료수집의 전 과정에서 비구조적인 인터뷰가 사용되었는데 Cobb(1986)은 연구자가 필요할 때마다 연구대상에게 그들의 의사소통의 의미를 분명히 하게하고 설명하게 하는 질문을 할 수 있는 점을 비구조적인(자유로운) 인터뷰의 장점으로 꼽았다. 이런 과정을 거쳐 수집한 자료를 바탕으로 질적 연구방법에 의해 학생들의 학습과정이 심도 있게 분석되었고 테크놀로지의 효과도 함께 조사되었다. 본 연구의 목적은 사범대학 학생들의 탐구 활동을 통한 수학적 사고발달 과정에 대한 연구이기 때문에 학습에 소요된 시간은 무제한 허용을 원칙으로 하였다.

연구 결과

1. 그래핑 계산기를 활용한 탐구학습에서 사범대학 학생들의 수학적 사고는 어떻게 발달하는가?

1) 학생은 관련된 지식 정보로부터 어떻게 과제 해결의 실마리를 찾아내는가?

가. 단순한 기억 재생을 통해

A조와 B조의 대화에서 약간의 차이점을 볼 수 있다.

【A조의 프로토콜: 과제 7로부터, R은 연구자, K, M, S는 학생】

R3 : 맨 처음 것(귀납적 단계)은 어떻게 찾았나요?

K8 : 원 그림이 제일 쉽잖아요. 그것을 이것에 적용시켰죠.

타원 방정식으로 생각할 수 없나요?

$x^2+4y^2=4$ 를 축소시켰을 때,

똑 같은 형태가 그려진다면 맞지 않을까요?

M3 : 맞네. 해 볼까?

x 를 무엇이라고 해야 되지.

y 도 모르니까, 루트식으로 바뀌져야 되나?(음함수 그래프를 계산기에 나타내는 법을 생각하는 듯)

K98 : 왜 그렇죠?

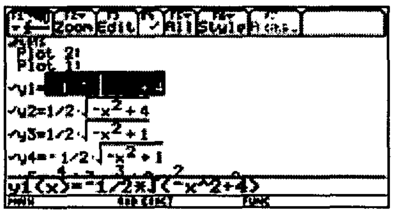
S5 : 루트식으로 하면 안되는데.

K10 : 3차원에서 하면 안되나요?

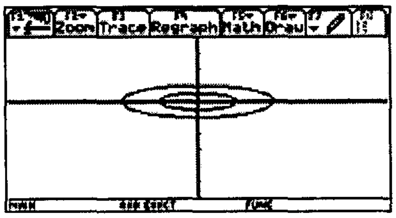
S6 : 간단하게 2차식으로 해보던가.

K11 : Ti-92로 그래프를 한번 그려봐 주세요.

S7 : 구한거야?



<그림 1> 과제 7-1



<그림 2> 과제 7-2

M4 : [계산기를 보이며], $x^2+4y^2=4$는 y1와 y2의 그래프이고 이를 $\frac{1}{2}$로 축소하고 간단히 하면,

$$x^2 \pm 4y^2=1$$
$$4y^2=1-x^2$$
$$\therefore\ y=\pm\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}$$ 는 y3와 y4

결과적으로, 타원에서 이 사실을 확인할 수 있네.

A조는 위에서 나타난 바와 같이 한 케이스, 즉, 타원의 함수식에 K 학생의 추측을 확인해본다. 쉬운 그래프(타원)로 정확히 그래프가 축소되는 것을 확인하고선 여러 경우도 그러리라고 생각하고 일반화를 추진하였고 그 결과를 그래프로 확인하였다. 그러나 B조는 이런 확인하는 절차를 거치지 않는다. 과거에 배웠던 지식을 단순히 기억해 내면서 확인을 연구자에게서 얻으려고 한다.

【B조의 프로토콜: 과제 7로부터, R은 연구자, K, H는 학생】

H1 : y축도 1만큼 평행이동 하고 y축으로 대칭 아닌가?
K1 ; 올라간 것 아냐?
H2 : 아니다.
K2: 한번 미분하면 기울기잖아.
H3 : 이렇게 하면 그래프 나오는 거 아냐?
$y=x^4+3x^3+2x^2-x-2$의 그래프 그리자.
K3 : $x^4+3x^3+2x^2-x-2$
$=x^2(x^2+3x+2)-(x+2)$
$=x^2(x+1)(x+2)-(x+2)$
$=(x+2)\{x^2(x+1)-1\}$
$=(x+2)(x^3+x^2-1)$
$x=-2$일 때 $y=0$ 숫자 바꾸면 $(x+1)(x^3+x^2-1)$ 이렇게 되면 그래프 같지 않아? 두 번째 거 아니야? $x^4+2x^3+x^2-x-1$ [아직까지 문제의 실마리는 보이지 않는다].
H4 : 그래프 안 보이는 부분까지 보는 거 어떻게 해?
H5:
$\frac{1}{2}y=(\frac{1}{2}x)^4+3(\frac{1}{2}x)^3+2(\frac{1}{2}x)^2-(\frac{1}{2}x)-2$(학생이 식을 기억을 해낸 듯).
K4 : 계속해도 y절편 똑같네.
H6 : 대신
2배하면 $\frac{1}{2}\{(2x)^4+3(2x)^2+2(2x)^2-(2x)-2\}$
모양이 반으로 줄어도 기울기 같아.
K5 : 왜 $\frac{1}{2}$ 해줬어?
H7 : $x\to 2x$, $y\to 2y$ 넣어봤더니 축소되더라고.
$2y=(2x)^4+3(2x)^3+2(2x)^2-(2x)-2$
$y=8x^4+12x^3+4x^2-x-1$
[스스로 계산기를 가지고 확인하는 대신 연구자에게 보여준다].
R1 : 어디서 배웠니?
H8 ; 고등학교 때 실력 정석에서 나온 것 같아요. 행렬식으로 x축, y축에 대해 축소, 확대를 한 것 같아요.
R2 : 그럼 문제가 제시하고 있는 것처럼 이미 알고 있는 듯하니 3번째 단계(창의적)는 다양하게 나오겠네?
H9 : 계수 바꿔가면서 다 나올 것 같은데요.
R3 : 제한점은 없으니까 3단계는 더 풍성하게 할 수 있을 것 같은데...
...중략...

위의 B조의 접근을 보면 처음 주어진 문제에 대해 이런 저런 문자 계산을 시도해 보지만 H5에서 단순 식을 기억해낼 때까지 거의 성공적이지 못하다. 또 K5는

학생, H의 의도를 파악하지 못하고 있는 듯하다. 자신의 계산기로 확인해 보는 것보단 연구자에게 설명을 해 봄으로써 확증을 얻으려고 한다. 이에 연구자는 계산기 사용에 대한 부정적인 태도에 기인한 태도임을 파악하고 두 그래프가 일치될 수 있는 방법을 생각해보게 하였다. 예를 들어, 계산기를 각각 가지고 있으므로 Window를 축소전과 축소후로 파트너와 구성하고 두 그래프가 일치한 것인지 알 수 있으므로 조별 스스로 파악할 수 있음을 암시하였다. 그러나 어찌된 일인지 상대적으로 쉬운 과제임에도 불구하고 이 B조에선 더 이상의 진척을 보기 어려웠다.

나. 추측에 의한 패턴에 의해

패턴은 귀납적 단계가 제시하는 문제를 충실히 해결함으로써(거의 모든 과제에서 A조), 또는 일반화된 식의 증명을 요구하는 연역적 단계의 제시된 문제로부터 (과제 3에서 A조) 힌트를 얻어 구해진다.

【A조의 프로토콜: 과제 1로부터, R은 연구자, K, M, S는 학생】

S1: 안되는데....

M1: 가로로 입력해야 하나?

S2: c4=seq((n+c2)·(n×c2),n,1,50) 50까지 넣을 필요 없잖어

M2: 여기서 보면 1을 넣었을 때, 24까지 되거든... 그러니까 2를 넣어보자

K1: 근데 보면 2줄마다 규칙이 있다.

M3: 어! 5로 시작해서 3씩 증가하네. 이거는 5로 시작해야 돼.

K2: c5=(3+c2)+(3×c2)

규칙을 찾아야겠다. 이거 점화수열되는거 같은데. 어~24까지 해야 되겠네. 처음 경우에 a를 1로 고정시키면 b가 24야. 숫자의 패턴이 나오는데 첫 줄은 2씩 증가, 둘째 줄은 3씩 증가하고,…

S3: 1 → 3 5 7 9 11 13 … …

→ $2n+1$

2 → 5 8 11 14 17 20 23 …

→ $3n+2$

3 → 7 11 15 19 23 27 31 …

→ $4n+3$

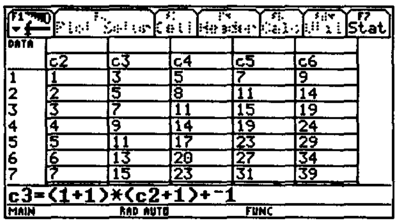
4 → 9 14 19 24 29 34 … …

→ $5n+4$

5 →… … … … … … … … …

→ $6n+5$

n에 대한 수열이 다 나오거든...



<그림 3> 과제 1-1

M4: 이건 군 수열이야... 그러면 이거는 어디까지 해야할까?

K3: 새로운 걸 열어야겠다.

S4: c1=seq(n, n,1,25)

M5: 야 a, b를 찾는 거 아냐?

S6: 아니야... 군 수열 값 속에 속하지 않는 수를 찾는거야. 어? 48이다. 다 홀수로 시작해서 수열이...

K4: 이거를 일반항으로 어떻게 표시하지?

R1: 패턴의 식을 찾아냈잖아. 그 다음은 여기에 해당되지 않는 수를 찾아내야겠지.

M6: 그럼 n을 고정시키고 50까지 x를 넣어야 되나?

S7: 아니지

M7: 아~

<10시 20분>

S8: 그래프로 그려보자. 그럼 모든 걸 다 그려봐야 되는데...

M8: 아니야, 공통되는 것 중에 없는 걸 찾아내면 돼.

S9: $X=c1$을 놓고, $Y=c2$ ~ 다 넣어보자

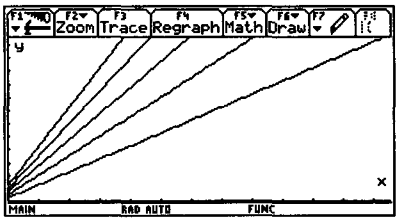
K5: 46아냐? 46없는데 답은 46이네. 46 아니에요?

S10: 답은 46이야

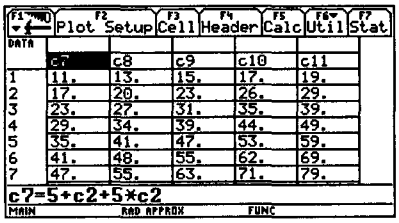
R2: 답을 어떻게 구했어?

M9: 패턴을 찾아보니깐요, 식을 찾은 후에 $a=1$이라

놓고하면 2씩 증가하고, 계속 수를 늘려 나갔더니...



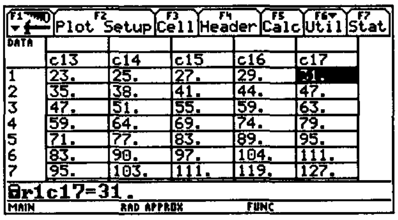
<그림 4> 과제 1-2



DATA	c7	c8	c9	c10	c11
1	11.	13.	15.	17.	19.
2	17.	20.	23.	26.	29.
3	23.	27.	31.	35.	39.
4	29.	34.	39.	44.	49.
5	35.	41.	47.	53.	59.
6	41.	48.	55.	62.	69.
7	47.	55.	63.	71.	79.

c7=5+c2+5*c2

<그림 5> 과제 1-3



DATA	c13	c14	c15	c16	c17
1	23.	25.	27.	29.	31.
2	35.	38.	41.	44.	47.
3	47.	51.	55.	59.	63.
4	59.	64.	69.	74.	79.
5	71.	77.	83.	89.	95.
6	83.	90.	97.	104.	111.
7	95.	103.	111.	119.	127.

r1c17=31.

<그림 6> 과제 1-4

위 A조의 프로토콜은 학생들이 귀납적 사고과정에서 패턴(K2와 S3에서)을 찾아내어 문제의 실마리를 찾아가는 것을 볼 수 있다. 이런 현상은 A조의 거의 대부분의 과제에서 찾아볼 수 있다. Stevenson이 말한 ① data를 만들고, ② data를 조직하고, ③ 패턴을 찾고, ④ 패턴에 따라 더 많은 data를 만들고, ⑤ 패턴에 맞는 식을 세우며, ⑥ 질문에 답한다라고 말한 여섯 단계에서 과제의 해결의 실마리는 ③에서부터 잉태되다가 ⑤에서 결실을 보게 되어 식으로 완성을 보게 된다. 즉, 패턴을 찾아내는 번득이는 통찰력이 탐구력에 가장 필요함을 알 수 있다. 물론 ③단계의 성공은 전 단계 ① ②에서 성공에 기인한 것이기 때문에 ①②에서 성공은 문제를 잘 이해하고 자료를 조직하는 능력에 있음을 알 수 있다. 이 과정이 수학자에겐 쉬울지라도 배우는 학생에게는 엄청난 노력을 요하는 부분이라고 밝힌 바 있다(Pea, 1987). 본 연구에서 B조가 겪는 어려움은 바로 이 점에서 비롯된다고 말할 수 있다. 본 과제에서도 B조는 data는 만들어가나 그것을 효과적으로 조직하는데 매우 서툴다. 반면, A조의 성공은 이 과정에서 계산기를 유용한 도구로 사용하고 있음을 반영한다. 필요한 자료를 손쉽게 조직하며 그 결과를 즉시 확인할 수 있다는 점이 도구의 유용성을 설명한다.

또한, 과제 3에서 A조는 과제의 실마리를 연역적 단계가 제시한 문제로부터 얻어 귀납적 단계의 문제를 해결하고 이를 창의적 단계로 발전하였다. 즉, 귀납적 단계의 패턴을 찾기 위해 주어진 연역적 단계가 제시하는 일반화된 문제유형을 참고하였고(주어진 소인수의 지수를 증가시키는 것보단 새로운 소인수를 증가시키는 것이 사각형의 배열과 관련 있음을), 창의적 단계의 문제들로 쉽게 연결하였다. 제시된 과제로부터 패턴에 대한 힌트를 얻는 것은 학생들이 문제를 이해하는 과정에서 특정 영역(domain-specific)으로 쉽게 나아갈 수 있게 돕는 하나의 유용한 방법이다.

다. 대수적 지식을 연결함으로써

이전에 습득한 대수적 지식을 과제가 요구하는 문제해결에 적용함으로써(거의 대부분의 과제에서 B조) 과제의 실마리가 이루어졌다. B조는 과제 6을 거의 귀납적 단계를 생략한 채 아래와 같이 해결하였다.

【B조의 프로토콜: 과제 6으로부터, R은 연구자, K, H, J는 학생】

...중략[1 시간 반 정도 흐른 후]...

K29 : 판별식에 넣어봐 (f(x)=ax+b, g(x)=cx+d 이고, h(x)=f(x)g(x) 라 가정하였을 때),

H23 : 그렇게 하면,

$h(x)-f(x)=0,\ D=0,\ x?$

$h(x)-g(x)=0,\ D=0,\ x?$ 찾고 있어요.

$L'(x)=a,\ L'(x)=c$인 $g(x)(f(x)-1)=0,$

$g(x)=0\ or\ f(x)=1$인 $ad-bc=0$

(L'은 미분계수를 뜻함).

R : a=c 인지?

H24 : 네? 잘못됐어요. 그림에서도 뻔하듯이 a=-c 이죠! 대신 그 관계를 식으로 하면.

H25

i) $h(x)-f(x)=0,\ f(x)g(x)-f(x)=0,\ f(x)(g(x)-1)=0$

$(ax+b)(cx+d-1)=0$ 중근

$\frac{c}{a}=\frac{d-1}{b}$

ii) $h(x)-g(x)=0$, 마찬가지로

$(cx+d)(ax+b-1)=0$

$\frac{c}{a}=\frac{d}{b-1}$

by i) ii) $\frac{c}{a}=\frac{d-1}{b}=\frac{d}{b-1} \quad \therefore a=-c,\ b=1-d$

$\therefore f(x)=ax+b,\ g(x)=-ax+1-b$ [학생들은 여기서 종료하였다].

위 프로토콜에서 나타나듯이 과제의 그래프가 보이는 성질을 좇아 그와 관련된 대수 성질을 세워서 과제를 해결하는 것이다. 이런 접근에도 다양한 방법이 있을 수 있다. 그러나 B조의 대화에서는 처음부터 관련된 대수성질이 서로 연결되지 못하고 주위를 맴돌다가 거의 1시간 반이 지난 다음에야 식으로 나타내는 것을 관찰할 수 있었다. 본 과제에서 해결의 실마리는 각각 일차함수가 그것들의 합성함수와는 한 점에서 만난다는 사실과 그래서 두 개의 방정식은 중근을 갖는다는 사실을 가지고 해결하였다. 반면, A조는 과제에 적용되는 한 경우, $f(x)=ax$, $g(x)=-ax+1$로 추측을 통해 그래프로 확인해본 다음, 그들의 추측을 일반화시켜 나갔다. 이 과정에서 계산기는 다수의 그래프 표상을 즉시 제공함으로써 학생의 문제해결 과정을 도왔다.

2) 귀납적, 연역적, 창의적 사고는 각각 어떤 관계를 이루며 어떤 특징을 나타내는가?

본 연구에서 사용되었던 연구도구로써 학습 자료는 이들 사고를 바탕으로 진행되는 세 단계(Stevenson, 1995)를 사용하기 때문에 이들 사고사이의 관련성을 파악하는 것은 의미있는 일이라 생각할 수 있다.

귀납과 연역은 본 연구의 탐구 활동에서 중요한 역할을 한다. 귀납은 우리의 지식을 확장하기 위한 가정들을 생성해내기 위하여 추론을 이끌어내는 것을 포함한다(Holyork & Nisbett, 1988). 이 추론은 본 연구에서처럼 패턴을 일반화하는 과정을 통해 이루어진다. 패턴을 구별하고 분석하고 기술하고 일반화하는 능력은 탐구활동에 기본이라고 할 수 있다. 이 과정에서 본 연구에서처럼 여러 가지 많은 수와 그리고 1,000,000과 같은 큰 수를 한꺼번에 다루기에는 계산기의 도움이 매우 필요하다. 수, 기하, 측정에서의 패턴을 관련시키고 이 패턴을 일반화하는 작업은 수식으로 마무리되었고, 이런 과정을 통해 학생들은 수학적 주제들 사이의 관련성을 이해하였다. 이 연결성은 좀 더 추상적인 수학적 사고들의 기초로서 이용이 되는 수학적 사고의 유형을 강화시키므로 창의적 사고로의 발달을 꾀할 수 있다(전 과제에서 A조).

연역은 그 목표가 주어진 진술로부터 타당한 결론을 이끌어내는 것인 체계적인 과정이며 수학적 주장의 타당성이 수립되는 방법이다. 예를 들면, 연역은 학습 제시, 행위의 계획, 규칙, 일반적인 원리를 해석하고 만들어낸다. 이것은 자료를 평가하고 추측과 가정의 결과를 결정하고 비슷한 생각들 사이의 우선순위를 결정하게 된다. 본 연구의 탐구활동은 대체적으로 상황을 주고 그 상황을 수학화 하도록 요구하는 과제(과제 1-5)가 주를 이루므로 변수를 구하고 그들 간의 관계를 식으로 증명했다. 즉, 해석적 사고가 요구되었다(과제 6 참고). 그러나 자주 그 관계식을 증명하는 것을 생략하는 경우도 많았다(과제 3, 4, 5). 그것은 귀납적 단계에서 확인하기 절차를 통해 관계식의 진위가 이미 밝혀졌기 때문으로 사료되며, 그러므로 이들 과제에선 이미 귀납적 단계에서 해결되었기에 거꾸로 풀기나 간접증명이 내재되어 생략되었다고 할 수 있으므로 이런 경우는 종합적 사고로 볼 수 있다. 본 연구에서는 귀납적 단계의 선수 경험으로 인해 연역적 단계의 일반화하기→확인하기→전문화하기 진행과정이 단축되었다고 볼 수 있으며, 또, 연역적 사고에서는 일반적 사실을 전문화로 귀결하기 때문에 확산적 사고가 아닌 수렴적 사고를 구성한다. 그래서 B조가 몇 개의 과제에서 연역적 단계에서는 성공을 하지만 확산적 사고를 주로 필요로 하는 창의적 단계로의 발달은 이루어지기 어렵다. 또한 과제 6에서 B조는 귀납적 단계에서 실패하였어도 연역적 단계에서

성공하는 점으로 보아 귀납적 사고가 반드시 연역적 사고를 선행해야 하는 것은 아님을 보여준다. 대신 서로 보완하는 관계이며, 창의적 단계에서는 여러 패턴을 찾아 수학적 성질을 세우는 귀납적 사고와 이를 다시 증명하는 연역적 사고는 둘 다 중요한 역할을 한다고 가정할 수 있으나 먼저 요구되는 새로운 유형을 볼 수 있는 창의적 사고는 귀납적 사고에서 패턴을 찾는 경험과 밀접한 관계가 있음을 알 수 있다.

이미 언급하였듯이 학생들이 탐구학습에서 자주 대안적인 관점을 생각해내는 것과 한꺼번에 여러 정보 자료를 다루는데 어려움을 가졌는데 이 때 도구로서 계산기의 역할은 이런 과정을 용이하도록 도왔다. 사고가 유연하게 되는 것은 문제해결에서 특별히 중요하다. 그들의 관점을 바꿈으로써 또는 하나 이상의 관점으로부터 문제를 점검하는 것에 의하여 문제해결이 용이해진다. 유연한 사고 역시 창의적 사고에 필요한 요소이다. 이는 개방형 문제에 여러 다른 해를 만들어내는 것뿐만이 아니라 새로운 창의적인 생각을 문제의 풀이에 적용하는 것을 포함한다. 본 연구에서 이런 창의적인 사고가 요하는 세 번째 단계는 매번 학생들이 가장 어려워하는 부분이었다. 과제 1-4에서 창의적 단계로 주어진 과제는 선행의 귀납적, 연역적 단계로 인해 스스로 유창성, 유연성, 독창성, 정교성을 내재하고 있다고 할 수 있다. 앞의 과제 1-4에서 귀납적 사고를 충분히 한 A조는 각 창의적 단계에서 어려워하면서도 학습의 목표는 성취하지만 B조는 그렇지 못하였다. 뿐만 아니라, 창의적 단계에서 과제 5, 6과 7은 앞의 과제들과는 다르게 자신들의 새로운 아이디어를 제공하도록 요구받았을 때 B조는 역시 어떤 산출물을 이끌어 내지 못하였다. 이는 귀납적 사고 과정에서 패턴을 발견해나갈 때 A조는 그 다양성(유창성과 유연성)을 경험했기 때문에 그 경험을 창의적 아이디어의 구성에 어느 정도 활용하였음을 나타낸다. 이들 과제에서 A조가 구성한 문제로는 심화된 일반화의 형태를 나타내었는데 과제 6에서 "접점을 구하는 일반식을 제시"하였고, 과제 7에서는 "주어진 타원의 방정식의 내부 면적에 1/4배가 되는 타원의 방정식을 구하는 문제"를 구성하였다. 이는 창의적 사고의 정교성과 가장 관련이 있어 보인다. 조용욱(1999)은 수학적 창의력 요소 중에 확장적 일반화와 재구성적 일반화로 분류되는 일반화를 포함하였는데 확장적 일반화란 인지 구조의 본질을 변화시키지 않고 이론의 적용을 넓히는 것이라면 재구성적 일반화란 지식 구조가 재조직될 필요성을 가지고 있는 것으로 이것은 확장적 일반화보다 힘든 인지적 전이를 필요로 한다고 하였다. 본 연구에서 A조의 창의력은 재구성적 일반화라고 하기 보다는 확장적 일반화에 더 가깝다고 할 수 있다.

물론, A조가 B조와 달리 문제를 제기할 수 있었다는 사실만으로 창의적이다 라고는 할 수 없으며, 특히 창의적 사고의 인지적 요소 중 독창성은 A조의 문제제기에서도 파악하기 어렵다. 즉, 네 가지 인지적 요소를 포함한 창의적 사고의 개발은 그렇게 쉬운 과정이 아님을 알 수 있다. 대신 연역적 사고에 능한 B조는 이 부분조차도 매우 취약한 것으로 드러났다. 그러므로 전통적으로 연역적 사고 개발에 중점을 둔 우리의 수학 교육과정은 창의적 사고발달에 기여하기에 부족함이 많다고 할 수 있다.

B조가 전반적으로 그들의 탐구 활동에 저조함을 나타냈음에도 불구하고 강점을 보인 부분이 있었는데 그것은 프로그래밍 부분이었다(다음 프로토콜 참고). 과제 4의 프로토콜에서 <그림 7>은 층의 수를 입력하면 총 공의 개수가 산출되는 것이고 <그림 8>은 그 반대이다. 이 두 프로그래밍 사이 즉, <그림 8>을 만들어내기까지 지필 계산을 포함하여 많은 시간이 소요되었다. 이러한 B조의 프로그래밍에는 논리적인 절차적 지식에 대한 강한 믿음이 이런 강점을 가져온 것이라 사료되었으며 알고리즘의 프로그래밍이 연구자의 강의 과목에서도 한 부분을 차지하고 있었기 때문에 이에 대한 과거의 지식의 재생에는 별 어려움이 없었다. 이 프로그래밍 과정에는 지필계산에는 참여하였지만 계산기 사용에 어려움이 많은 학생 H가 전혀 참여하지 않고 있음을 알 수 있다. 완성된 프로그래밍을 사용하는 특징은 중폭의 효과(속도와 용이성)는 매우 높지만 무엇보다도 문제의 창의적 접근에는 새로운 유형으로의 전환에 따른 새로운 프로그래밍을 매번 요구하였기 때문에 시간과 노력에 있어 제한점을 지님을 알 수 있었고, 이 프로그래밍에는 수렴적 사고의 유형이 요구됨을 결론지을 수 있었다.

【B조의 프로토콜: 과제 4로부터, R은 연구자, K, H, J는 학생】

...중략...

J11: 맞네. n번째 층까지의 합. 이게 1000이하. 계산기 오랜만에 써 볼까? 어떻게 하지?

K12: 돌릴려고?

J12 : 프로그램!

K13: 뭘 넣으려고?

J13 : 우리 그거 쓰자. 입력하는 것.

K14 : request를 층 수로하고? (강의에서 사용했던 것을 기억하는 듯).

J14 : 10 층까지 합이면 10 딱 넣으면 입력되는 것.

K15 : 일반적으로 구한다고? 1000만 구하는 것 아니고?

J15 : n에 층을 입력하면 ball 의 합 680개 밖에 안 되? n=17층 맞아. 969개 나왔어. 18층 1140개 [지금까지 모든 과정을 놀랍게도 손으로 해결하였다. 학생 H는 대화에 참여하지 않고 뭔가 열심히 노트에 풀어가고 있다].

K16 : 두 번째 문제가 하나 더 깔리려면 몇 개가 더 필요한지?

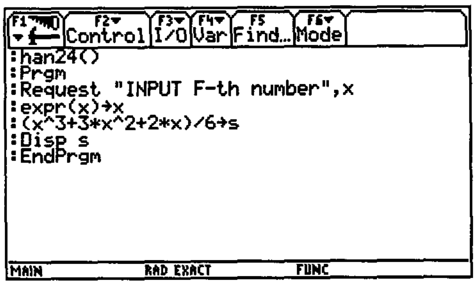
J16 : 4층은 32층에서 4개 증가.

K17 : 18층은 17층보다 18개 증가. 18개 더 필요하잖아. 그럼 마지막 층에 171개.

J17 : 17층 값에서 17층 값 빼면 되잖아.

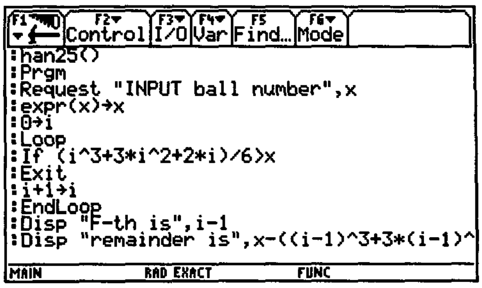
K18 : 171

J18 [계산기에 프로그래밍 한다].



```
F1 F2 Control F3 I/O F4 Var F5 Find... F6 Mode
:han24()
:Prgm
:Request "INPUT F-th number",x
:expr(x)→x
:(x^3+3*x^2+2*x)/6→s
:Disp s
:EndPrgm
MAIN   RAD EXACT   FUNC
```

<그림 7> 과제 4-1 (층수 → 공 개수)



```
F1 F2 Control F3 I/O F4 Var F5 Find... F6 Mode
:han25()
:Prgm
:Request "INPUT ball number",x
:expr(x)→x
:0→i
:Loop
:If (i^3+3*i^2+2*i)/6>x
:Exit
:i+1→i
:EndLoop
:Disp "F-th is",i-1
:Disp "remainder is",x-((i-1)^3+3*(i-1)^
MAIN   RAD EXACT   FUNC
```

<그림 8> 과제 4-2 (공 개수 → 층수)

...중략...

이와는 대조적으로 A조는 알고리즘 창에서 sum을 이용하여 수열의 합을 포함한 다양한 대수식을 처리하여 답을 구하였고, 테이블에서 각 층의 공의 수를 c1에, 그 층까지 소요된 공의 총 수를 c2에 관계식으로 입력하여 결과를 확인하였다. A조는 알고리즘창과 테이블창의 자유로운 이동을 통해 과제해결에 어려움이 없었으므로 굳이 프로그래밍을 시도하지 않았다.

2. 테크놀로지와 상호 작용하는 환경에서 장, 단점은 무엇인가?

Berger가 주장하는 증폭(amplification)의 효과와 개념발달에서 성숙도

물론 증폭(amplification)의 효과와 개념발달은 계산기를 통해 얻을 수 있는 매우 큰 장점이다. 증폭의 효과와 개념의 발달은 A조의 여러 과제에서 확인이 되었다. 계산기가 가져다주는 증폭의 효과는 패턴을 찾는 과정에서 관찰할 수 있는 시행착오 방법과 여러 창을 자유롭게 이동하면서 서로간의 관계성을 확인하는 방법을 통해 학생의 추측을 강화시켰다고 할 수 있다. 그러나 증폭만으로는 마지막 단계인 창의적 단계까지 발달은 어렵다. 창의적 단계의 성공은 귀납적, 연역적 단계에서 충분한 개념발달을 통해 가능함을 알 수 있었으며 계산기를 통해 습득한 개념발달은 창의적 단계에도 연관성있게 적용됨을 알 수 있었다. 이는 학생이 계산기를 아무리 잘 다룬다하여도 계산기의 사용의 결과가 개념의 발달을 이루지 못한다면 창의적 단계로의 사고발달은 보장하기 어려움을 뜻한다. 이런 비슷한 주장에

대해 고호경(2002)의 연구에서도 확인이 되었다. 또한, B조의 프로토콜을 통해 증폭의 효과는 타인의 도움으로 어느 정도 획득할 수 있지만 개념 발달은 자기 스스로의 이해 습득 없이는 불가능함을 알 수 있었다.

계산기 사용에 미숙과 계산기자체의 한계

A조의 활동과는 큰 대조적으로 B조의 활동에선 계산기 조작에 대해 서로 간의 질문이 자주 관찰되었다. 예를 들면, "그래프 하단을 보일 수 있는 방법은 어떻게 하면 되지?" 이러한 질문은 사실 과제의 목표 실현과는 관련이 없는 질문이다. 이런 질문을 고호경(2002)의 연구에서 개념발달 구성 진술과 구별하여 도구 조작적 진술이라 명하였다. B조원들은 계산기 조작에 많은 시간을 할애함으로써(평소엔 소홀히 하다가) 대신 문제해결의 접근에 방해를 받았다. 또한, 문제 해결의 실마리는 이런 도구의 성숙한 사용과 차원을 달리하는 문제해결에 대한 통찰력을 필요로 한다. 왜냐하면 그것은 학생에게 스키마의 부담을 요하는 고차원적 인지적 과정이기 때문이다. 물론 일반적으로 계산기를 사용하지 않고서도 탐구 문제들을 해결할 수 있다. 그러나 본 연구에서 계산기를 사용하지 않고서 전 단계의 문제를 성공적으로 해결할 수 있었던 경우는 발견되지 않았다. 익숙한 계산기의 활용 능력은 이런 탐구문제에 대한 전제조건임을 알 수 있으며 이런 도구는 문제해결에 대한 통찰력의 획득이 쉽게 이루어지도록 돕는다.

본 연구의 탐구 활동에서는 큰 자리 수나 순환 소수와 같은 수를 다룰 때 계산기 자체가 지닌 한계에 부딪히게 되었다. 예를 들어, 과제 2와 같이 순환소수 마디의 패턴을 찾는 문제에서 계산기는 아래 프로토콜이 나타내는 것처럼 일정한 자리 수 뒤엔 반올림을 한다. 그래서 B조는 쉽게 계산기 사용을 포기하고 지필활동을 시작하였다. 물론 어떤 기술공학 도구도 무한 또는 순환 소수를 산출하는 데 있어 모든 자리 값을 다 제시할 수는 없을 것이다. 계산기 기종에 따라 어느 정도의 효과를 이용할 수 있다는 점을 감안하고 거기에 적절한 수학적 성질(본 과제에선 나머지 정리)을 응용할 수 있어야함을 암시한다. 그래서 본 과제에서도 성공한 A조는 이런 계산기의 한계를 이해하고 바로 적절하게 대처해 나아갔다. 이는 문명의 이기를 효율적으로 활용함에 있어 과거 환경에서 생각하지 못했던 새로운 접근 방법을 모색할 수 있음을 뜻한다. 그것은 또 다른 문제해결 전략이 될 수 있다.

【B조의 프로토콜: 과제 2로부터, R은 연구자, K, H, J는 학생】

R12 : $\frac{1}{17}$ 이 자리 수 몇 개 지속되는지 아는 사람?

J56 : [계산기를 두드리며],

$\frac{1}{17} = 0.058823529411765$ 이다.

R13 : 계산기에서 몇 자리가 나와?

K,J,H : 14자리 밖에 안 나오는데요.

R14 : 소수점 옮겨 보는 것은 어떨까? $0.058823529411765 \times 10^{12}$ 하면, 정수 부분을 통해 믿을만한 자리 수를 알 수 있잖아. 계속 그렇게 하다 보면 찾을 수 있지 않을까? [힌트를 제공하고 있다].

J57 : 그럼 순환 마디에요?

R15 : 지연되는 수인가?

J58 : 어 17은 파악불가 수인데. 아니 17은 지연 후 순환되는 수네. 이상하다. 곧장 순환으로 들어가야 하는데.

H4 : $\frac{1}{17}$ 떨어지네. 15자리에서

J59 : 아니야. 순환이야

K56 : 끝에 반올림 되어버리네.

H5 : 응. (특이하게도 학생 H가 대화에 참여하는 빈도수가 현저히 작음을 알 수 있다).

K57 : 그니까 짜증나.

3. 탐구학습에서 학생이 겪는 어려움은 무엇 때문인가?

계산기 사용에 대한 부정적인 인식

왜 A조와 B조는 계산기 사용에서 뿐만 아니라 탐구학습의 과제해결에서 큰 대조를 이루는가하는 것은 본 연구를 수행하는 과정 내내 본 연구자에게 던져지는 질문이었다. 계산기 숙달에 대해 똑같은 시간이 주어졌고 모두에게 필요한 기기들이 학기 내내 주어졌으며 연구자의 강의과목을 똑같이 수강하였는데 이 차이점은 어디서 오는 것일까? 이는 학습의 성취는 학생 개인의 의

지와 그들의 태도에 의해 많은 영향을 받는다고 결론지을 수 있었다.

A조원들은 강의 중에도 계산기를 마치 자신의 필기도구인양 활발히 사용하며 새롭고 유용한 기능들을 익히는데 인색하지 않은 반면 B조원들의 태도는 이와 많이 달랐다. 계산기가 본 연구자의 강의에 중요한 도구임에도 불구하고 B조원들은 강의시간에도 가져오는 곳을 자주 망각하였고, 심지어 자신의 계산기를 사물함에 잠재우고 1~2주를 보내버리는 경우도 관찰되었다. 연구자와의 인터뷰에서도 발견되었듯이 B조 원 중에는 계산기 사용에 부정적인 시각을 지닌 학생이 있었다. "결국 수학의 문제는 혼자 스스로 해결해야하는 것 아닌가요." 하는 태도는 계산기 사용에 의미를 퇴색시켰고, 이런 생각은 조원 전체에게 영향을 미쳤다. 이 학생의 활동에서 자주 발견할 수 있었던 것은 과거의 선행지식에 대한 의존도가 높았다는 점이다. 그래서 이 기억에 의한 선행지식이 제대로 재생되지 않을 땐 거의 탐구과제의 목표실현에 실패를 하였다. 좀 더 자세히 말하자면, 주어진 자료에 나타난 수학적 성질을 파악하고 그 문제 해결을 요구하는 탐구문제에선 강한 직관력과 추측하는 능력이 이루어졌을 때만이 성공적인 선행지식간의 연결도 가능함을 알 수 있었다. 이런 계산기나 테크놀로지에 대한 부정적인 시각은 이 학생만의 문제가 아닐 것이다. 요즘 정보화시대를 맞아 각 대학마다 IT 과목의 신설이 이루어지고 있다. 대학 교육과정의 IT과목에서 학습 성취를 통해 이런 공학 도구의 유용성을 인식하지 못한 대다수가 이에 속하지 않을까하는 생각을 하였으며, 더욱 이 학생의 경우처럼 유용성을 경험할 수 있는 계기가 주어졌어도 인식의 변화를 가져오지 못한 이유는 다음 절에서 설명할 수 있다.

학생 개개인이 갖는 과제집착력과 동기화의 결여

연구자의 강의에서도 관찰되었듯이 A조원들의 연구자의 강의 참여는 매우 활발하며 생산적이었다. 연구자가 제시하는 문제를 어려움 없이 해결하였고, 계산기의 기능을 익히기 위해 새로운 과제를 구성하고 그 결과를 발표하는데 적극적이었으며 조원간의 보완과 상호 지지도가 자주 관찰되었던바 상호작용도 매우 활발하였다고 볼 수 있다. 이는 과제 집착력과 동기화가 그룹 내에서 잘 이루어진 경우이며 과제집착력은 애매모호함에 대한 참을성을 수반한다고 가정할 수 있다. 본 연구에서 제시되었던 대부분의 과제들은 학생들에게 매우 생소했던 것만큼 학생들이 패턴을 찾기 전까진 애매모호함을 견뎌내야 했다. 이 애매모호함을 견뎌내는 힘은 과제집착력에 달려있다. 이와 대조적으로 B조원들은 과제 완성도가 상대적으로 낮았고 서로간의 상호작용도 미미하였고, 오히려 도움은 A조로부터 얻어지는 경우가 많았다. 이는 패턴을 찾는데 실패를 의미하며 때로 찾은 패턴도 불완전(예를 들어, 과제 5)하였으며 이를 반복 사용함으로써 다른 시각에서 문제를 재조명볼 수 있는 기회(유연성)를 찾지 못하고 포기하였다. 앞 절에서 묘사되었던 계산기 사용에 대한 부정적인 인식은 과제집착력과 학습에 대한 동기화를 저하시키는데 영향을 미쳤다고 볼 수 있다. 교육학적 측면에서도 학생 개개인이 갖는 학습 성취를 위한 과제 집착력과 동기화의 중요성은 아무리 강조되어도 지나치지 않다. 그럼 왜 학생의 학습에 대한 과제 집착력과 동기화가 저조하며 이런 저조한 학습 욕구를 강화 시킬 있는 방법은 무엇인가?

오랫동안 수학은 오직 한 가지 (바른) 답과 답을 낼 수 있는 오직 한 가지 방법, 그리고 확산적 사고가 불필요한 패쇄적인 과목으로 인식되었고(Carpenter, Lindquist, Matthews & Silver, 1983; Lampert, 1990; Silver & Marshall, 1990), 학교에서 문제를 푸는 것은 단독적인 활동이고 실제 세계의 문제를 해결하는 것과 분리되어 생각되어왔다. 학생들은 해답을 구할 때 최근에 배운 기술(예를 들어, 절차적 지식)에 의존해야만 하고 모든 문제는 이전에 가르친 몇몇 모델과 일치해야 한다는 신념을 가지고 있다(Silver & Marshall, 1990). 이런 신념을 가지고 있는 학생에게 자료를 만들고 조직해서 패턴을 찾으며 자신의 추측을 검증하는 학습활동은 아마도 매우 무가치하게 여겨졌을 것이다. 대신 가능한 빨리 수식을 세우고 그것을 증명할 수 있는 방법만을 찾는 것이 최선이기 때문에 수학 문제를 해결하는데 기억 능력과 기계적인 절차에 의존하는 것이다. Dossey, Mullis, Lindquist & Chambers(1988)에 의한 미국 국가 평가 자료의 결과는 학교에서 학년이 올라가면서 수학에 대한 그들의 신념 수준이 감소됨을 보여주었는데 이는 우리나라에도 예외가 아닐 것이라 사료되

며, 이런 학습욕구의 저하는 오랫동안 경험한 전통적 수학학습 태도에 기인한 것이라 할 수 있다. 그러므로 이런 부정적인 신념을 변화시킬 수 있는 경험을 제공할 수 있게 지속적인 교육과정의 변화가 요구되며, 교사 스스로도 패턴의 중요성을 인식하고 이런 탐구적 활동을 구성하고 제시할 수 있는 교수방법에서 능력이 필요하고 이에 필요한 학습 환경을 조성할 수 있어야 한다. 이는 바로 예비교사 교육과정에서 이런 수학적 탐구학습을 통한 경험의 중요성을 내포하는 것이다.

탐구학습에 대한 경험부족

이상의 두 절에서 언급되었듯이 우리의 교육과정은 탐구활동에 등한시 하였고, 자연히 학생들은 탐구활동에 매우 낯설어 하였다. 연구자와의 인터뷰와 자가진단에서도 나타났듯이 학생들은 이런 경험을 전에 해본 적이 없어 처음에 매우 어려웠다고 토로하였으며, 그래서 교과서에선 경험할 수 없었던 수학을 만날 수 있어서 본 연구의 참여에 만족한다고 하였다. 물론 탐구활동을 위한 과제로는 실생활의 문제일 필요는 없어나 수학을 다루는 실질적인 문제를 포함하고 있다. 특히 본 연구에서 학생들은 수 체계 속에 존재하는 패턴을 발견하고 선 경이로움을 나타내기도 하였다. 다량의 자료를 조작하고 관리해야하므로 이 때 그래핑 계산기나 컴퓨터와 같은 도구는 매우 유용하게 사용될 수 있다. 또한 산발적인 경험을 쌓기보다는 지속적인 경험을 통해 학생스스로 활용능력을 개발함으로써 테크놀로지 활용에 대한 긍정적인 신념의 획득이 요구된다. 이는 어떤 수학적 도구(하드웨어)를 개발하기보단 사용 목적에 따라 개발된 소프트웨어의 유용성을 살릴 수 있는 방법, 그리고 무엇보다도 자기 스스로가 그 사용의 효과를 경험하고 그 효과를 극대화 할 수 있는 방법을 터득함으로 가능하다. 이를 고호경(2002)의 연구에서는 성숙한 단계로의 계산기 사용의 발달을 통해 이루어질 수 있다고 하였다. 이런 예비교사만이 수학 교실에서 활발한 탐구학습 환경을 만들어갈 수 있으며, 자신이 가르치는 학생들의 탐구정신을 개발할 수 있을 것이다.

결 론

본 연구에서는 수학적 탐구력 신장을 위해 연구도구가 구성되었고, 질적 연구방법을 통해 학생들의 수학적 사고과정이 이 도구를 바탕으로 심도있게 조사되었다. 본 연구에 참여한 학생들은 전체 실험과정에서 매우 큰 대조를 나타냈다. A조의 학생들은 계산기를 유용한 도구로써 사용하면서 주어진 사고 단계에 충실히 따르는 반면, B조의 학생들은 그들의 대화가 매우 산만하고 과제 목표를 반복적으로 확인하는 절차가 여러 번 관찰되었으며 창의적 단계는 거의 성취하지 못하였다. 이는 문제를 이해하는 과정에서 해결의 실마리를 구하려는 노력을 통해 좀더 대화가 조직적이며 목표 중심적으로 진행될 필요가 있었으며 그러기 위해선 도구를 효과적으로 사용할 수 있는 능력을 바탕으로 귀납적 사고의 충실성이 요구되었다. 여기엔 계산기 같은 도구가 단지 문제해결 과정에 속도나 정확성만을 향상시킬 목적으로 보다는 수학적 사고력을 향상시킬 수 있도록 개념발달 과정에서 효과적으로 사용되게 하는 자료개발과 이에 따른 교수법 개발이 중요하다. 따라서 본 연구에서 사용된 연구도구와 탐구 활동을 위한 조별 협동학습은 의의가 크다고 하겠다. 뿐만 아니라, 본 연구에서도 확인할 수 있었듯이 이런 능력을 키우기 위해선 단기적인 IT 과목의 개설보다는 테크놀로지를 활용한 교과목을 통해 지속적으로 자신들의 신념과 태도도 함께 변화시킬 기회가 제공될 필요가 제기되었다.

본 연구의 목적을 위해 연구도구로서 사용되었던 학습 자료는 수체계, 기하, 측정, 함수를 내용으로 각각은 귀납적, 연역적, 그리고 창의적 단계로 구성되었다. 전반적으로 학생들은 귀납적, 연역적 단계에서는 어느 정도 학습 성취를 이루었으나 계산기 사용에 어려움이 많았던 학생들은 창의적 단계에선 매우 저조함을 드러냈다. 또한 창의적 단계를 스스로 구성해야하는 마지막 3개의 과제에서 학생들이 만든 문제는 약간 심화된 유형으로 변형이었으므로 귀납적, 연역적 단계의 문제와 비교하였을 때 독창성을 발휘한 문제제기라고 보기는 어려웠다. 이는 탐구활동에서 인지적 사고 과정을 돕는 그래핑 계산기 활용의 장점을 통해 유창성, 유연성, 정교성은 어느 정도 파악할 수 있었으나 전혀 색다르고 독특한 문제를 만들거나, 참신한 아이디어를 찾아내는 능력(독창성)은 다양한 수학적 사고력을 바탕으로 많은 경험과 노력이 요구됨을 알 수 있다. 또한, 본 연구의

제한점에서 시사하였듯이 후속연구로는 창의적 사고의 범주가 워낙 방대하므로 창의적 사고만을 초점으로 한 체계적인 연구가 시도되어야 할 필요성을 낳는다.

마지막으로, 본 연구의 수행과정에서 사용되었던 조별 활동의 효과를 살펴보면, 비판적 사고의 발달을 가져올 수 있는 조원간의 활발한 의사소통의 중요성이다. 비판적 사고는 문제해결 맥락에서 일어나는데 무엇을 믿고 무엇을 해야 하는지를 결정해야 하는지에 초점을 두는 합리적이고 반성적인 사고이다(Norris & Perkins, 1989). 상호 의사소통 과정에서 이러한 사고는 메타인지의 측면을 포함한다. 조원들 간의 상호작용에 의한 자신들의 행위에 대하여 반성적이 되고, 사고 과정에 집중해나간다. 즉, 그들의 사고는 질문과 관련하여 목표를 향한 방향과 그들의 행동에 대한 적절성을 의식적으로 제시해 준다. 학생들(특히 A조)은 서로 간에 질문을 통해 우리는 무엇을 찾고 있는지, 무슨 자료가 중요하게 사용되고, 무슨 가정이 존재하고, 어떤 결론에 도달해야 하는지를 결정했으며 이 비판적 사고는 문제의 자료와 자신의 현존하는 지식에 기초하여 추론을 하는 것과 이러한 추론의 건전성과 타당성을 판단하는 것을 가능하게 하였다. 이러한 중요한 비판적인 사고 기술이 본 연구에서 학생들의 과제 완성에 매우 중요하게 기여하였음을 짐작할 수 있다. 다시 말해, 조별 활동에서 조원들의 활발한 참여는 학습의 목표를 실현을 이루어가는 데 메타인지를 바탕으로 비판적 사고의 자연스런 발달을 수반함을 알 수 있어 일반 수학 수업에서도 조별활동을 통한 의사소통의 효과를 기대해볼 수 있을 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

가다키리 片桐重男, 1992). 數學的인 생각의 具體化,서울: 경문사.

강옥기 (2001). 수학과 학습지도와 평가론, 서울: 경문사.

고상숙 (2001). 그래핑 계산기를 활용한 탐구학습에서 수학교사의 정신적 모델 개발과정, 2001년 추계 대한수학교육학회 연구발표대회 논문집, pp.823-865.

고호경 (2002). 그래핑 계산기를 활용한 협동학습을 통해 수학적 개념발달과정에서 나타난 학생들의 언어적 사회적 상호작용에 관한 사례연구, 단국대학교 박사학위논문.

교육부 (1997). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서.

김남성 (1993). 창의성개발을 위한 교육 프로그램, 인문과학, 성균관대학교.

김영채 (1999). 창의적 문제해결, 서울: 교육과학사.

조용욱 (1999). 수학교육의 창의력 강화방안, 신라대학교 논문집 48, pp.177-185.

허경철 외 (1991). 사고력 신장을 위한 프로그램 개발연구 IV, 서울: 한국교육개발원.

Barron, L. & Goldman, E. S. (1994). Integrating technology with teacher preparation. In B. Means (Ed.), *Technology and Education Reform*. San Francisco: Jossey-Bass.

Berger, M. (1998). Graphic Calculators: A interpretative framework, *For the Learning of Mathematics*, pp.13-20.

Brooks, D. & Kopp, T. W. (1990). Teachnology and teacher education. In Houston, R. W., Martin Haberman, & John Sikula (Eds.), *Handbook of Research on Teacher Education* pp.498-513, New York: McMillan.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education* 15, pp.35-49.

Carpenter, T. P.; Lindquist, M. M.; Mathews, W. & Silver, E. A. (1983). Results of the third NAEP mathematics assessment: Secondary school. *Mathematics Teacher* **76**, pp.652-659.

Cobb, P. (1986). Clinical interviewing in the context of research programs. In G. Lappen and R. Even (Eds.), *Proceedings of the Eight annual meetings of PME-NA: Plenary speeches and symposium*, pp.20-26, East Lansing: Michigan State University.

Creswell. J. W. (1998). *Qualitative Inquiry and Research Design: Choosing among Five Traditions*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Dossey, J. A.; Mullis, I. V. S.; Lindquist, M. M. & Chambers, D. L. (1988). *The Mathematics Report*

Card: Trends and Achievement Based on the 1986 National Assessment. Princeton: Educational Testing Service.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics* 21, pp.521-544.

Fey, J. T. (1983). *Computing and Mathematics: The Impact on Secondary School Curricula*. College Park, MD: The University of Maryland.

Fox, L.; Thompson, D. & Chan, C. (1996). *Computers in Education*, 20, pp.147-156.

Gallini, J. K. (1983). What computer-assisted instruction can offer toward the encouragement of creative thinking. *Educational Technology* 23(4), pp.7-11.

Guilford, J. P. (1959a). *Personality*. New York: McGraw Hill.

Guilford, J. P. (1959b). Three Faces of Intelligence. *American Psychologist* 14, pp.469-479.

Guilford, J. P. (1977). *Way Beyond the IQ*. Buffalo. NY: Creative Education Foundation.

Guilford, J. P. (1988). Some changes in the structure of the intellect model, *Educational and Psychological Measurement* 40, pp.1-4.

Handler, M. (1993). Preparing new teachers to use computer technology: Perceptions and suggestions for teacher educators. *Computers in Education* 20, pp.147-156.

Harlow, G. (1950). *Curiosity and exploration: Theories and results*. New York: Academic Press.

Hoffmann, D. (1996). What drives successful technology planning? *Journal of Information Technology in Teacher Education* 39(5), pp.32-36.

Holyoak, K. J. & Nisbett, R. E. (1988). Induction. In R. J. Sternberg & E. E. Smith (Eds.), *The Psychology of Human Thought* pp.50-91, Cambridge: Cambridge University Press.

Johnson, J. M. (1980). *Doing Field Research*. New York: Free Press.

Knapp, L. R. & Glenn, A. D. (1996). *Restructing Schools with Technology*, Boston, MA: Allyn and Bacon.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal* 27, pp.29-63.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative Research and Case Study: Application in Education*, San Francisco: Jossey-Bass.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Author.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for School mathematics*. Reston, VA: The Author.

Norris, S. P. & Perkins, D. N. (1989). *Evaluating critical thinking*. Pacific Grove, CA: Midwest Publications.

Orton, A. (1992). *Learning and mathematics: Issues, theory, and classroom practice*. London: Cassell.

Pea, R. D. (1987). Cognitive technologies for mathematics education, A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*, Hilsdale pp.89-122, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ponte, J. P. & Matos, J. F. (1992). Cognitive processes and social interactions in mathematical investigations, In J. P. Ponte,; J. F. Matos,; J. M. Matos. & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in context of practice* pp.239-254, Berlin: Springer Verlag.

Random House Inc. (1990). *Websrer's Desk Dictionary of the English Language*, New York, NY: Random House Company.

Resnick, L. B. (1987). Constructing knowledge in school, In L. S. Liben (Ed.), *Development and Learning: Conflict or Congruence?* pp.19-50, Hilsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics, In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* pp.334-370, NY: Macmillan.

Sharp, A. (1987). What is a commrhkwpy of inquiry? *Analytic Teaching* **8(1)**, pp.13-18.

Silver, E. A. & Marshall, S. P. (1990). Mathematical and scientific problem solving findings, issues, and instructional implications. In B. F. Jones & L. Idol (Eds.), *Dimensions of thinking and cognitive instruction* pp.265-290, Hilsdalem NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Splitter, L. (1988). On teaching children to be better thinkers. *Unicorn* **14(1)**, pp.40-47.

Sternberg, R. (Ed.) (1999). *Handbook of Creative*, Cambridge: Cambridge University Press.

Stevenson, F. W. (1995). *Exploratory Problems in Mathematics,* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Torrance, E. P. (1962). *Guiding Creative Talent,* Eaglewood Cliffs, NY: Prentice Hall.

Torrance, E. P. (1972). Predictive validity of the Torrance test of creative thinking, *Journal of creative behavior* **6**, pp.236-252.

Torrance, E. P. (1999). *Making the creative leap beyond, N.Y.* : Creative Education Foundation Press.

Urban, K. K. (1995). Creativity-A Componential approach, *Post conference China meeting of the 11th world conference on gifted and talented children*, Beijing, China.

Wallach, M. A. & Kogan, N. (1965). *Modes of thinking in young children,* New York: Holt, Rinehart & Winston.

Wildmer, C. & Amburgey, V. (1994). Meeting technology guidelines for teacher preparation, *Journal of Computing in Teacher Education* **10(2)**, pp.12-17.

The Effective Use of a Technology Tool for Students' Mathematical Exploration

Choi-Koh, Sang Sook
Dept. of Mathematics Education, Dankook University, Seoul 140-714, Korea
E-mail: sangch@dankook.ac.kr

This study sought to determine the impact of the graphing calculator on prospective math-teachers' mathematical thinking while they engaged in the exploratory tasks. To understand students' thinking processes, two groups of three students enrolled in the college of education program participated in the study and their performances were audio-taped and described in the observers' notebooks. The results indicated that the prospective teachers got the clues in recalling the prior memory, adapting the algebraic knowledge to given problems, and finding the patterns related to data, to solve the tasks based on inductive, deductive, and creative thinking.

The graphing calculator amplified the speed and accuracy of problem-solving strategies and resulted partly in students' progress to the creative thinking by their concept development.

* ZDM Classification : C35
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C70
* Key Word : Mathematical thinking, Inductive, deductive, & creative thinking, Exploratory learning, Graphing calculator, Qualitative research methodology, Prospective math teachers.

부 록

탐구 1: 연산 속에 수 패턴

문제) 두 양의 정수(같은 수도 가능)를 사용하여 그 둘을 더하고 곱한 후 그 두 결과를 더한다.

1. Inductive Phase: 50보다 작은 수 중에서 이 더한 값이 되지 못하는 수 중 가장 큰 수는 어떤 수인가?

2. Deductive Phase: 이를 정리하여 증명할 수 있는가?

3. Creative Phase: 주어진 문제를 변형하여(예를 들면, 두 양의 정수에서 합하는 대신에 큰 수에서 적은 수를 뺀 다음 곱한 후 그 차와 그 곱을 더한다면…) 생각할 수 있는 다양한 경우를 찾아보시오.

1) 두 개의 다른 양의 정수라면?

2) ① 만약 더하기대신 빼기를 하면 어떠하겠는가? 즉, 뺀 값과 곱한 값을 더하면?
② 만약 두 수를 더하고 곱한 다음 이제 더하기 대신 큰 수에서 작은 수를 빼면 어떠한가?

3) 50보다 작은 수중 가장 많이 다루어지는 수는? 즉 가장 많이 제거되는 수는?

탐구 2: 분수와 소수

문제) 분모가 50 이하인 단위분수 중에서 가장 긴 소수 자릿 수를 갖는 분수는?

Inductive Phase: 분모가 50 이하인 단위분수 중에서 가장 긴 period인 소수 자리수를 갖는 분수는?

목표: 답을 찾는다. (필요한 것은 수의 나눗셈이니 쉬울 터…)
Step ①: data를 만든다.
Step ②: data를 조직한다.
Step ③: 패턴을 찾는다.
Step ④: 패턴에 따라 더 많은 data를 만든다.
Step ⑤: 패턴에 맞는 식을 세운다.
Step ⑥: 질문에 답한다.
패턴을 잘 정리한다.

Deductive Phase: 이를 정리하여 증명할 수 있는가?

정리1) 분수 1/n 의 자릿수는 만약 n이 인수 2와 5로 된 곱수이고, k가 n의 인수 2와 5의 지수 중 높은 수일 때 소수점이하 k자리 후에서 끝난다.

정리2) 분수 1/n이 소수점이하 k까지 지연되다가 r/m(r<m) 꼴의 반복 자리수를 지닌다. 이때, k는 n을 나누는 2와 5의 인수의 지수 중 더 높은 수이고, m은 n을 2와 5로 인수분해 하는 중에 얻어지는 또 하나의 인수이다.

정리3) 만약 1/n이 주기적 소수자리를 나타낸다면 이 주기는 ( )이다.

정리4) 만약 1/n이 지연되는 소수자리 없이 바로 반복되는 소수자리수를 갖는다면 이 n은 ( )이다.

Creative Phase: 주어진 문제를 변형하여 생각할 수 있는 다양한 경우를 찾아보시오. 각 조의 독특한 확장 문제를 만들어 증명하시오.

1) 만약 분수 1/n이 순환소수라고 할 때,

a) n이 두 소수(prime number)의 곱이라면? 아님 세 솟수의 곱이라면 그 순환은?

b) n이 솟수의 제곱이라면? 아님 3제곱이라면?

2) 소수의 확장에서 수들이...

a) 분수 1/7에서 소수점과 순환 비를 제거한다면 우린 142857을 얻는다. 만약 이 수에 2를 곱하거나, 3, 4 등을 곱하면 어떤 수을 얻겠는가?

b) 분수 1/13에서도 위 (a)처럼 해 본다면 같은 경우가 발생하는가? 또 분수 1/17 또는 1/19에서는 어떠한가?

c) 분수 1/7의 순환 소수 개수가 6으로 짝수이다. 이를 처음 세 수, 1, 4, 2, 와 나중 수 8, 5, 7과 비교하여라. 어떤 발견을 할 수 있는가? 다른 분수의 짝수자리의 순환소수를 1/7과 같이 비교하여 보아라. 무엇을 찾을 수 있는가?

d) 만약 순환소수 자리 개수가 3으로 나눠진다면 (c)

와 같이 비교하였을 때 무엇을 찾을 수 있는가?

3) 나머지들과는…

a) 분수 1/7에서 우린 1, 3, 2, 6, 4, 5라는 나머지를 다루었다. 이것을 길게 나누지 않고 구할 수 있는가? 만약 2번째 나머지들을 보면 아이디어를 얻을 수 있다.

b) 1/13, 1/17, 1/19에서 연속적인 그들의 remainder를 보라. 이 나머지들을 찾아낼 수 있는 쉬운 방법이 있는가?

c) 제 1번의 귀납적 방법의 다섯 번째에서 1/17, 1/19, 그리고 1/23의 나누기과정에서 계산기를 사용하여 6번째마다의 나머지 수를 찾는 가장 간단한 방법을 논하였던가?

탐구 3: 수의 배열

Question: 1,000,000보다 작은 수 중 가장 많은 사각형의 배열을 지닌 것은? 그리고 몇 개의 사각형의 배열을 가지나?

o o   o o o   o o o o o o

o o   o o o   o o o o o o

사각형의 성질이란 위와 같이 사각형의 배열을 나타낼 수 있는 수를 의미한다. 그러나 인수 중 1과 2 또는 1과 4와 같은 배열은 선형배열이라 하고 사각형의 배열이라고는 하지 않는다. 그러므로 1과 그 자신의 수는 제외된다.

Inductive Phase

1과 그 자신의 수를 trivial factor라 부른다. 나머지의 인수는 nontrivial factor로 불린다. 또 36과 같은 수는 2×3, 3×12, 4×9, 6×6이나 6이 두 번 사용되므로 그들의 사각형의 배열의 개수는(7(#의 nonotrivial factor) + 1)/2 가 된다. 이런 배경을 가지고 1000000보다 작은 수에서 가장 많은 배열을 지니는 수는?

Deductive Phase

1. 2, 2^2, 2×3, $2^2\times3$, …, $2^2\times3\times5$, 이렇게 리스트를 만들어 가면 6에서 소수 3이, 그리고 60에서 소수 5가, 840에서 소수 7 이 처음 나타나게 된다. 그럼 언제 11이 처음 나타날까? 그럼 13은? 그리고 17은? 이런 식으로 진행하여 새로운 소수의 등장을 예측할 수 있는가?

2. 이 기록지에서 소인수분해에서의 소수의 지수사이의 관계를 말할 수 있는가? 즉, 그 수와 그 수의 소인수의 개수사이에 존재하는 관계는?

3. 그 자신의 수와 소인수 개수를 나타내는 수의 소인수분해에 관해 무엇을 말할 수 있는가?

4. 그 자신의 수들과 그들의 소인수 개수의 수들은 어떤 비율로 증가하는가?

Creative Phase

1. 50×100 배열에서

a) 이 배열에는 몇 개의 다른 사각형이 존재하는가?

b) 이 배열에는 얼마나 다른 사각형이 포함되는가?

예: 3×4는 1개의 1×1, 7개의 2×1, 2개의 3×1, 2개의 2×2, 1개의 2×3을 지닌다.

2. 1000000보다 작은 수에서 가장 많은 사다리꼴 배열을 지닌 수는?

○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○

탐구 4: 피라미드 쌓기

방금 테니스 연습을 끝내고 공들을 모아 피라미드 모양으로 쌓았을 때 얼마나 높이를 가질 수 있겠는가?

만약 1000개의 공이 있다하자. 가장 큰 삼각뿔의 피라미드를 쌓는다고 할 때

1. 너의 피라미드에 몇 개의 공이 들었는가?

2. 너의 피라미드는 몇 층의 높이를 가지나?

3. 한 층을 더 올릴려면 몇 개의 더 많은 공이 필요한가?

Worming Up
만약에 너는 오직 12개의 공이 있다고 하자.

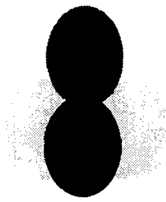


그림 3-1

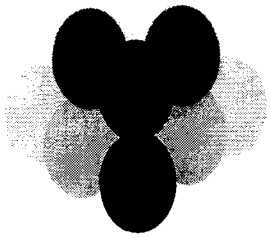


그림 3-2

그림 3-1은 4개의 공으로 2층을 쌓았고, 그림 3-2은 10개의 공으로 3층의 피라미드를 쌓았다. 이 피라미드는 12개의 공으로 가장 큰 피라미드를 쌓을 수 있는 것일까? 이제 4층의 피라미드를 쌓는다고 보자. 공이 얼마나 더 필요한가?

각 층이 아래 그림처럼 이루어져 증가되어 간다면
8개의 공이 더 필요할 것이다.

1. Inductive Phase
공 1000개를 가지고 쌓을 수 있는 층 수는?
공 1000000 개를 가지고 쌓을 수 있는 층 수는?

2. Deductive Phase
1, 3, 6, 10...은 삼각수이다. 즉 필요한 공의 수는 1, 4, 10, 20, 35... 이 연속된 숫자의 비는 4/1, 10/4, 20/10, 35/20, 56/35,... ==> 이들 분수와 전체 층이 가진 총 공수와 사이에 패턴을 찾고 이 패턴을 수식화 하시오. 이 수식을 발견하고서 무엇을 연상할 수 있는가?

3. Creative Phase
(1) 만약 정사각형의 피라미드를 쌓는다면 어떨까? 그리고 삼각형, 정사각형의 피라미드를 제외한 다른 모양의 피라미드가 있는가?

(2) 만약 우리가 초기의 피라미드를 쌓고 나머지 공으로 또 많은 피라미드를 쌓는다면, 예를 들어 1000개에서 남은 공 31개로 20개 공의 피라미드, 1개, 10개 공의 피라미드, 1개, 1개 공의 피라미드 1개하여 4개의 연속적인 피라미드를 만들 수 있다. 이 생각을 이용하여 1000개보다 작은 수의 공으로 만들 수 있는 연속적 피라미드의 개수는?

(3) Deductive Phase(제 2단계)에서 발견한 식이 삼각수의 수를 구하는 식과 매우 유사함을 알 수 있다. 이렇게 비슷한 기하적 대상에 대해 비슷한 대수적 식이 적용되는 또 다른 예들이 있는가? 우리가 이런 유사성을 상위차원의 경우로 확장하여 기하적으로나 수식으로나 타당하게 생각할 수 있는가?

탐구 5: 우표

시간이 갈수록 우표 값은 오른다. 처음 20원에서, 25원, 그리고 가장 근래에는 29원으로 올랐다고 가정하자.

Worming Up
우리가 만약에 3원짜리와 8원짜리의 배열을 만들어 본다면
3, 6, 9, 12, 15, 18, 21,··· 또, 8, 11, 14, 17, 20, 16, 19, 그리고 22원짜리···
이들은 오직 한 방법으로만이 구성되었음을 알 수 있다.
35원의 우표 배열은 두 방법으로 구성될 수 있다. 8, 8, 8, 8, 3과 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 8. 만약 51원의 우표배열을 구성하려면, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 3; 8, 8, 8, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3과 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3으로 세 가지 방법으로 구성할 수 있다.
그러나 1, 2, 4, 5, 7, 10, 13원들은 전혀 만들어질 수

없다. 그래서 13은 3원짜리, 8원짜리 우표로 구성할 수 없는 가장 큰 수이다.

(문제) 우리가 무한개의 25원짜리 우표와 29원짜리 우표를 가지고 있다고 할 때,

1. 우리가 만들 수 없는 가장 큰 배열은 무엇인가?

2. a) 오직 한 방법으로만이 만들어질 수 있는 가장 큰 배열은 무엇인가?

 b) 오직 두 방법으로만

 c) 오직 세 방법으로만

1. Inductive Phase

어떤 답을 구하였는가?

2. Deductive Phase

어떤 식을 세울 수 있는가?

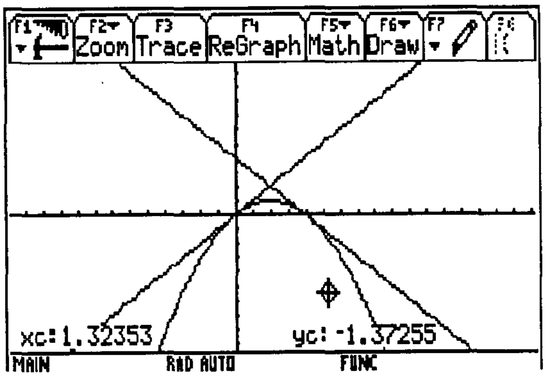
그 식의 정당함을 증명하시오.

3. Creative Phase

다른 경우의 문제를 만들어본다면?

탐구 6: 합성함수

각각 Linear 그래프인 f(x)와 g(x)의 곱으로 이루어진 h(x)= f(x)*g(x)는 f(x)와 g(x)에 의해 접선을 이룬다고 할 때 이를 만족하는 f(x)와 g(x)를 구하시오.



1. Inductive Phase

어떤 답을 구하였는가?

2. Deductive Phase

어떤 식을 세울 수 있는가?

그 식의 정당함을 증명하시오.

3. Creative Phase

다른 경우의 문제를 만들어 본다면?

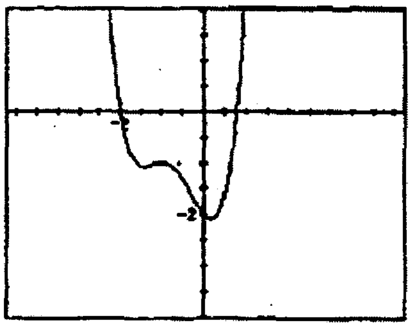
탐구 7: 두개의 그래프

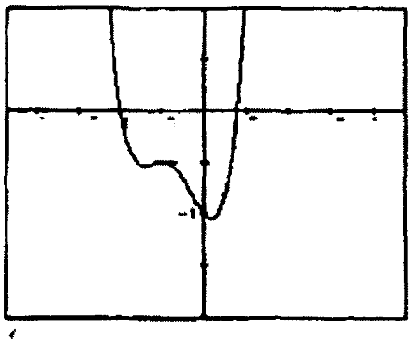
1번의 그래프의 함수식은 $y = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 2$ 이다.

이 두 그래프를 보고서 무엇을 예측할 수 있는가?

1의 그래프를 통해 2의 그래프 함수식을 찾으시오.

1. Inductive Phase





2. Deductive Phase

같은 성질을 가진 수식이 존재함을 증명하시오.

3. Creative Phase

다른 경우의 문제를 만들어본다면?

자가진단 평가

1. 오늘의 문제에서 어떤 수학적 내용을 배웠다고 생각하는가?

2. 본 내용은 수학의 어느 부분에 해당된다고 생각하는가?

3. 오늘 활동에서 자신의 또는 자기 조의 문제해결의 Key는 어디서 얻었다고 생각하는가?

4. 오늘 문제의 어려움은 무엇이었으며 어떻게 그 어려움을 해결하였는가?

5. 오늘 활동에서 계산기는 도구로서 어떤 역할을 했는가?

6. 조별 내에서 자신의 기여도에 대해 묘사해본다면?

7. 지금까지 활동을 통해 자신에게 바라는 것이 있다면?