韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2003, 11. 제 42권, 제 5호, 637-646.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2003, Vol. 42, No. 5, 637-646.

수학교육에서 시각적 표현에 관한 소고

이 대 현 (전주공업고등학교)

I. 서 론

수학적인 아이디어가 표현되는 방법은 그 아이디어를 이해하고, 사용할 수 있는 방법을 제공하는데 중요하기 때문에, 표현의 문제는 수학교육에서 중요한 주제이다 (NCTM, 2000). 이것은 수학의 개념·원리·법칙 등의 다양한 표현이 수학적 개념이나 관계를 쉽게 이해할 수 있도록 뒷받침하는 중요한 요소로 간주되며, 문제해결력 신장을 촉진시키는 중요한 역할을 하는 것으로 받아들여지기 때문이다. 즉, 학생들은 수학적 개념·원리·법칙 등의 여러 가지 수학적 표현에 접할 때, 그들의 수학적 사고 능력을 확장시킬 수 있는 중요한 도구들의 집합을 갖게 된다.

특히, 다이어그램이나 함수의 그래프, 수형도와 같은 시각적 표현의 이용은 오랜 기간 동안 수학의 중요한 부분이 되어 왔으며, 이러한 수학적 표현들은 원래의 개념의 의미를 좀 더 직관적으로 전달해 줄뿐만이 아니라, 문제의 원형을 구체적으로 표현해 주는 기능을 가지고 있다.

그럼에도 불구하고, 유클리드적 사고를 강조해 온 우리의 수학교육은 연역적인 논리체계의 수립에 집착함으로써, 분석적이고 논리적인 대수-언어적 기호체계를 선호해 왔으며, 이에 따라 시각적 표현은 논리적 사고의 부수적인 역할로만 다루어져 왔다. 그러나, 컴퓨터와 같은 교수매체의 개발과 이용은 학습자의 지식 구성에 시각적 표현이 중요한 역할을 한다는 것을 보이고 있다. 이것은 시각적 표현이 유한적이고 공간적인 구조를 선호하는 인간의 인지 구조와 유사하며, 이로 인해 학습자가 시각적 표현을 이용하여 수학적 사실을 직관적으로 쉽게 인지할 수 있기 때문이다.

따라서, 본 연구에서는 수학교육에서 최근에 더욱 강조되고 있는 표상 및 표현 중에서, 특히 시각적 표현을 중심으로 이에 대한 수학 교수학적 의의 및 역할에 대해 고찰해 보고자 한다. 이를 위해 먼저, 수학 교수-학습에서 시각적 표현의 가치와 시각적 표현 자체가 안고 있는 한계로 인해 야기될 수 있는 문제점에 대하여 분석하기로 한다. 그리고, 일선 현장에서 이용 가능한 시각적 표현을 통한 문제해결의 실례를 예제 중심으로 살펴보기로 한다.

II. 수학 교수-학습에서 시각적 표현

수학적 표현은 수학의 핵심적인 내용인 동시에 수학적 활동에 연관된 인지의 핵심이라고 할 수 있다. 즉, 수학적 표현은 수학적 모델링을 통해 현실 상황의 문제를 해결하도록 하는데 중요한 요소이며, 학생들이 수학적 개념이나 관계를 이해하도록 도와주고, 여러 가지 수학적인 주제에 대해 의사소통이 가능하도록 하며, 수학적 개념들간의 연결성을 형성해 준다.

여기에서 표현이라는 용어는 수학적인 개념이나 관계를 파악하는 행동이나 형태 그 자체를 모두 일컬으며, 외적으로 관찰 가능한 과정들과 산물뿐만이 아니라, 수학을 하는 사람들의 정신 속에서 내적으로 일어나는 과정들과 산물들 모두에 적용된다(NCTM, 2000). 따라서, 표현은 학교 수학에서 특히 관심의 대상이 된다. 이에 대해, NCTM(2000)은 수학 수업 프로그램은 수학에 대한 이해를 촉진시켜서 유치원에서부터 모든 학생들이 다음과 같이 할 수 있도록 수학적 표현을 강조해야 한다고 권고하고 있다.

* 2003년 5월 투고, 2003년 11월 심사 완료.
* ZDM분류 : D5
* MSC2000분류 : 97D50
* 주제어 : 표현 및 표상, 시각적 표현, 문제해결, 시각적 표현의 한계, 직관.

· 수학적 아이디어를 조직하고, 기록하고, 의사소통할 수 있는 여러 가지 표현들을 창조하고 사용하기

· 문제를 풀기 위하여 수학적 표현들을 선택하고 적용하고 번역하기

· 물리적, 사회적, 수학적 현상을 모델링하고 해석하기 위하여 표현을 이용하기(p. 67).

수학적 표현에 관련된 중요한 연구 결과로는 Bruner(1960)의 EIS이론을 들 수 있는바, 이 이론은 "어떤 교과든지 지적으로 올바른 형식으로 표현하면 어떤 발달 단계에 있는 아동에게도 효과적으로 가르칠 수 있다(이홍우 (역), 1997, p. 92)." 는 것으로 요약될 수 있다. Bruner의 EIS이론은 활동적-영상적-상징적 표현의 세 가지 양식을 거침으로써 지적 발달이 이루어진다고 보는 것으로, Bruner이론의 핵심은 표현 체계라고 할 수 있다. EIS이론은 표현 양식에 따라 학생들의 이해 정도가 차이가 있다는 시사점을 제시하지만, 각 표현 체계에서 양방향에 대한 고려 없이 활동적→영상적→상징적 단계로의 발달만을 생각했다는 점과 학생들이 자신의 활동을 반성하여 사고 수준의 비약을 경험할 수 있도록 유도하지 못한다는 한계가 있다.

한편, Lesh(1983)는 수학과 관련된 표현 체계를 '경험에 기초한 실세계 상황, 조작적 모델, 그림이나 다이어그램, 구어적 언어, 구문적 기호'로 나누어 제시하고 있다. 또한, Nakahara(1994)는 Bruner와 Lesh의 표현 체계를 정리하여 실제적 표현(실세계의 상황, 실물에 의한 표현 등), 조작적 표현(인위적인 구체물이나 교구 등에 의한 표현), 그림 표현(그림, 다이어그램, 그래표에 의한 표현), 언어적 표현(일상적인 언어를 이용한 표현), 기호적 표현(숫자, 문자, 연산 기호 등과 같은 수학적 기호를 이용한 표현)으로 나누고 있다(장혜원, 1997에서 재인용).

위의 분류와는 달리, Skemp(1986)는 수학에서 이용되는 기호 체계를 이분화 하여, 언어-대수적 기호와 시각적 기호로 나누어 제시하고 있다. 그는 모든 종류의 다이어그램이나 기하학적 도형들을 시각적 기호의 예로 제시하고, 이것들이 직관적 사고에 유용하다고 진술하면서, 두 사고 체계를 <표 1>과 같이 비교하여 제시하고 있다.

<표 1> 시각적 기호와 언어-대수적 기호

시각적 기호	언어-대수적 기호
모양, 위치 등 공간 성질의 추상화	수와 같이, 공간적 형태와 무관한 성질의 추상화
의사소통하기가 어렵다	의사소통하기가 쉽다.
보다 개별적인 사고를 표상	보다 사회화된 사고를 표상
통합적, 구조를 명시	분석적, 세부사항을 명시
동시적	순서적
직관적	논리적

특히, Skemp에 의해 시각적 기호로 제시되고 있는 시각적 표현은 직관적 사고와 관련하여 수학적 사실을 즉각적으로 이해하도록 도와주며, 문제해결 과정에서도 유용한 단서나 해결책을 제공해 주는 도구이다.

이러한 의미에서, 시각적 표현은 추상적인 수학적 지식, 개념, 원리, 법칙을 지도하는데 효과적인 방안의 하나로, 이해에 깊이와 의미를 주고 문제해결에 믿음직한 안내자를 제공하며, 창의적인 발견을 고취시키는 마음의 눈에서 형성된 그림을 통한 직관이라고 할 수 있다(신동선 · 류희찬, 1998).

Hilbert도 그의 책 '기하학과 영상(Geometry and Imagination)'의 서문에서 다음과 같이 쓰고 있다.

> 수학에서 우리는 두 가지 경향을 발견한다. 하나는 미궁 속에 있는 연구 중인 대상에서 고유의 논리적 관계를 구체화하기 위해 시도하는 추상화로의 경향이고, 다른 하나는 연구 중인 대상의 직접적인 이해나 그들 관계의 구체적인 의미를 강조하는, 생생한 관계를 촉진하는 직관적인 이해로의 경향이다. (중략) 우리는 시각적인 영상의 도움으로 다양체의 사실과 기하학의 문제, 그리고 그 이상의 것들을 설명할 수 있다. 이것은 탐구와 증명 방법의 기하학적 윤곽을 묘사하는 많은 경우에 가능하다(Zimmermann & Cunningham, 1991, p. 1에서 재인용).

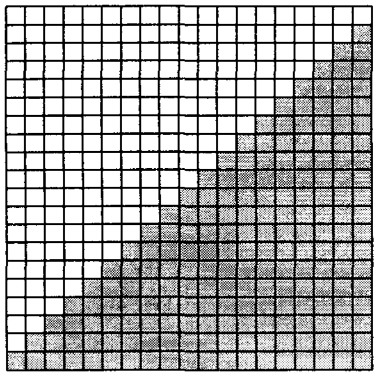
이러한 Hilbert의 견해는 시각적 표현이 손으로 그려지거나 컴퓨터에 의해 생성되든지 간에, 수학적인 개념 · 원리 · 법칙, 또는 문제들의 기하학적이거나 그래프적인 표현이 수학학습에서 중요함을 암시한다.

마찬가지로, 시각적 표현은 수학과 과학 분야에서, 때때로 창의적인 활동에서 중요한 역할을 수행해 왔다. Poincaré(1905)는 시각적 이미지를 바탕으로 연구하는 수학자를 직관적인 수학자로 분류하고, 이 범주에 독일 수학자 Felix Klein을 인용하고 있다. Klein은 그가 상상했던 시각적 표현을 가지고 연구를 수행하였고, 이 시각적 표현은 문제해결 과정에서 직관적인 해법을 제시해 주었다. 유사한 예시는 육각형 구조인 벤젠 분자의 원자의 배열을 발견한 Kekule의 일화에서도 발견된다. 이와 같이, 시각적 표현은 창의적인 활동에 중요한 역할을 수행해 왔음을 알 수 있다.

시각적 표현을 통한 창의적인 수학 활동의 또 다른 예로 Wertheimer(1945)가 제시하고 있는 Gauss의 일화를 들 수 있다. 다음은 Gauss가 1부터 100까지의 자연수의 합을 구하는 문제에 접하여 가졌을 거라고 Wertheimer가 생각한 예시이다.

> 새 집의 홀 안 벽을 따라 계단이 만들어지고 있다. 그것은 19계단으로 이루어진다. 벽 맞은 편 쪽 계단의 끝에는 계단의 높이와 폭이 같은 정사각형 모양의 널판지를 붙이기로 하였다. 목수는 그의 조수에게 가게에 가서 그 널판지를 사오라고 하였다. 조수는 "널판지를 몇 개나 사올까요?"라고 물으니, 목수는 "너 스스로 알아내도록 해"라고 대답하였다. 조수는 1+2=3; +3=6; +4=10; +5=・・・등과 같이 헤아리기 시작하였다. 목수는 "너는 왜 머리를 쓰지 않니? 그것들을 일일이 헤아려야만 하니?"라고 비웃었다.
>
> 독자 여러분, 여러분이 조수라면 어떻게 하시겠습니까? 여러분이 좋은 방법을 찾아 내지 못하였다면, 나는 "계단이 벽을 따라 만들어지지 않고 양쪽에 정사각형의 널판지가 필요하다면 어떻게 되겠습니까? 종이를 잘라 계단 양쪽의 패턴을 생각해 보라고 권유를 하면 도움이 되겠습니까?" 라고 질문을 할 것입니다(Wertheimer, 1945; 矢田部達郎(역), 1952, p. 119).

Wertheimer는 계단 널판지의 모양을 큰 도형의 반으로 시각화하도록 제안하고 있다. 계단의 한 면에 똑같은 다른 조각을 맞추면 <그림 1>과 같은 직사각형이 된다. 따라서, 문제는 $(19\times20)\div2 = 190$으로 간단히 해결된다.



<그림 1> 등차수열의 합의 모델

대부분의 수학 문제들이 시각적으로 재구성되기에는 어려움이 있으나, 위의 예에서와 같이 도형으로 재구성된 시각적 표현이 문제해결에 결정적인 단서를 제공하였음을 말해준다.

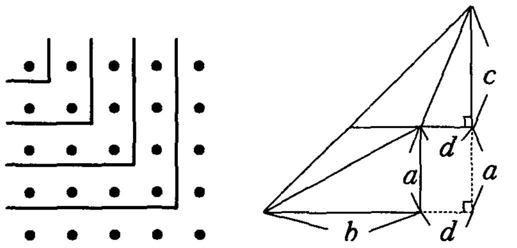
이러한 의미에서, 수학의 개념・원리・법칙 또는 수학 문제의 시각적 표현은 수학적 사실이나 수학 문제에 대한 이미지를 형성하는 과정이며, 이러한 이미지를 이용하여 수학적인 발견이나 이해에 효과적으로 이용되어진다. 따라서, 시각적 표현에서 수학교육의 관심은 수학적 개념이나 문제를 이해하거나 문제를 해결하기 위한 도구로서, 적절한 시각적 표현을 학생들에게 제공해 주거나 그들 스스로 시각적 표현을 이끌어 낼 수 있도록 하는 것이다.

그러나, 수학자나 수학 교사에게 수학적 사실의 시각적 표현은 엄격한 논리적 전개에 의한 논증에 비해 최소한의 가치만을 가지는, 또는 단지 수학적인 기억술의 방안으로 치부되어 왔다. 이런 관점을 가진 교사들에게서 지식을 전수 받은 학생들이 수학적 논증의 과정에서 시각적 표현이나 시각적인 사고를 할 것이라고는 기대할 수 가 없을 것이다. 이러한 현상에 대해, Hadamard (1945)는 일반적으로 고등수학이 비시각적인 구조에서 다루어져야 한다는 견해를 수학 공동체가 여전히 받아들이고 있다는 것을 제시하고 있다.

원리와 관계되는 일련의 문제에 대해서는 일상적인 공간에 대한 우리의 직관에 기대할 수 없다는 점을 이해할 것이다. 그래서 도형의 성질이 해석 기하

학에 의해 수식으로 환원될 수 있는 것과 마찬가지로, 모든 추론은 수식화 하지 않을 경우에도 이런 절차가 가능함을 확신할 수 있어야 한다. (중략) 예를 들면, 조르당 정리에 대한 증명은 완전히 수식화 할 수 있을 때에만 만족스러운 것이다(pp. 102-103).

그러나, 수학 교육계가 '언어로 진술되지 않고 시각적 표현으로 보여지는 증명을 증명이라고 할 수 없다'는 견해를 수용한다면, 수학적으로 의사소통 할 수 있는 중요한 부분을 상실하게 되는 것이다. 또한, 그 자체가 증명은 아니라고 할지라도, 증명 과정을 생생하게 하고 그 사실을 구체적으로 인식하게 하는 중요한 측면을 포기하게 되는 것이다.



$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

<그림 2> 언어로 진술되지 않은 두 식의 증명(Nelsen, 1993)

결론적으로, 시각적 표현은 단지 그림을 통한 수학적 사실이나 문제의 표현만을 의미하지는 않는다. 시각적 표현은 수학적 사실과 문제해결에 통찰과 의미를 부여해 준다. 시각적 표현이 수학 교수-학습에 더 효과적이기 위하여, 시각적 표현은 수학적 사고의 다른 유형이나 다른 표현의 형태와 연결되어야 한다. 즉, 학생들은 수학적 사실들이 기호적으로, 수치적으로, 그래프로 어떻게 달리 표현될 수 있는가를 알아야 하며, 특별한 문제 상황에 어떤 것들이 어떤 제약을 가지고 있는지 파악해야 하고, 적합한 표현 방안을 선택해야 한다.

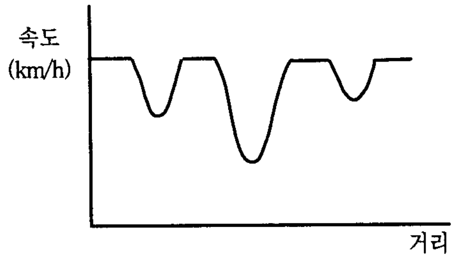
Ⅲ. 시각적 표현의 한계

시각을 통하여 습득된 정보는 문제해결 과정에서 오류를 일으키기도 한다. 특히, 시각에 의해 습득된 정보가 왜곡되어 해석되어지는 것은 우리의 시각에 한계가 있으며, 시각을 통하여 얻은 정보를 지나치게 과신하기 때문이다. 예를 들면, 어떤 대상을 볼 때, 동일한 장소에서 동일한 대상을 보더라도 관찰자에 따라 대상을 다르게 인식할 수 있다. 즉, 두 관찰자의 망막에 맺힌 상은 같다고 할지라도 동일한 시각 경험을 갖지 않을 수 있다.

이와 같이, 시각을 통하여 습득된 정보는 인식된 대상에 대해 명확한 분석이 이루어지지 않을 때, 사물의 특성을 왜곡시키는 원인이 되기도 한다. Müller-Lyer의 Mach 착시는 이러한 예로 볼 수 있다.

이러한 예는 수학의 개념을 설명하거나 문제해결을 위한 도구로 이용되어지는 시각적 표현의 경우에도 마찬가지이다. 시각의 한계나 시각을 통하여 얻은 정보에 대한 지나친 과신 때문에 발생하는 오류를 수학 문제해결과 관련하여, 문제에 주어진 시각적 표현이 문제해결에서 오류 발생의 원인이 되는 것, 어떤 개념을 설명하거나 표현하기 위한 시각적 표현이 오류 발생의 원인이 되는 것, 그리고 시각적 표현 자체가 안고 있는 한계가 오류 발생의 원인이 되는 것의 세 측면으로 나누어 제시해 보기로 한다.

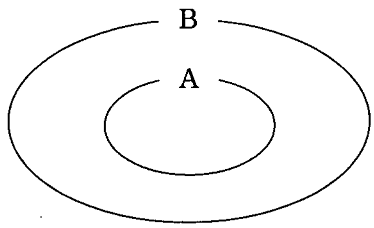
첫째, 문제에 주어진 시각적 표현이 문제해결에서 오류 발생의 원인이 되는 예로는 Janvier의 연구를 들 수 있다. Janvier(1981)는 자동차 경주 트랙의 출발점을 출발한 자동차가 트랙을 2바퀴째 달리는 상황을 아래 그림과 같이 속도와 거리의 관계로 주어진 그래프로 표현하고, 이 자동차가 달리는 트랙에는 몇 개의 굽은 곳이 있는가를 물어 보았다. 이 연구에서 11~15세의 아이들은 주어진 그래프와 실제 트랙을 혼동하여 굽은 곳의 개수가 6, 8, 9라고 답하였다. 특히, 아이들은 최고의 속도나 최저의 속도는 옳게 구함으로써, 기호적인 수준과 그림적인 수준에서 그래프를 동시에 바라보는 흥미로운 결과를 보여 주었다.



<그림 3> 속도와 거리와의 그래프

이 문제에서, 아동들은 주어진 문제에 옳게 답하기 위하여 시각적으로 표현된 그래프의 규약을 이해해야만 한다. 즉, 주어진 그래프가 실제의 공간과는 차이가 있음을 알아야 하며, 그래프 상에서 함수 값의 증감이 실제의 상황에서는 어떻게 해석되어야 하며, 그런 그래프가 나타나는 이유는 무엇인가 등에 대하여 이해하여야 한다. 결론적으로, 주어진 문제의 시각적 표현을 이해 할 때에는 '표현 자체의 특징'과 '표현에 내재된 변인 사이의 관계'를 파악하도록 해야 한다.

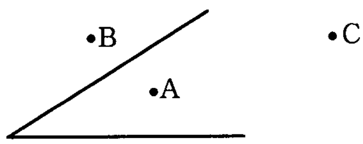
둘째로는, 어떤 개념을 설명하거나 표현하기 위한 시각적 표현이 오류 발생의 원인이 되는 것을 들 수 있다. 예를 들면, 반점으로서 점을 나타내거나, 띠로서 선을 나타내는 식가적 표현은 이후에 '선분의 길이가 다른 두 선분 위의 점들이 일대일 대응이다'라는 사실을 받아들이는데 어렵게 한다. 점이 실제적인 물리적 반점이라면 길이가 긴 선분이 더 많은 점을 갖고 있게 되지만, 점의 개념은 실제적으로 크기가 없는 0차원 대상일 뿐이다. 또 다른 예로, 직관적 모델의 한 예인 다이어그램 모델을 들 수 있는데, Fischbein(1987)은 직관적 모델을 언급하면서 다이어그램 모델은 그 모델이 가지고 있는 규약을 알지 못하면, 오히려 주어진 표현이 주는 제약으로 인해 개념 이해나 문제해결에 어려움을 준다고 제시하고 있다. 이러한 예로 벤다이어그램을 들 수 있다. 부분집합을 나타내기 위한 벤다이어그램은 부분집합에 대한 의미를 즉각적으로 이해하게 하는데 유용한 도구이지만, '$A \subset B$'에는 '$A=B$'인 경우도 있다는 사실을 받아들이기 어렵게 한다.



<그림 4> $A \subset B$ 에 대한 시각적 표현

결과적으로 벤다이어그램의 규약을 알고 있는 학생들만이 문제해결을 위한 유용한 도구로 벤다이어그램을 이용할 수 있는 것이다. 이러한 예는 수형도에도 마찬가지이다. 수형도는 경우의 수를 파악하기 위한 유용한 도구이지만, 수형도가 가지는 순서적인 나열식 배열의 의미를 알지 못하면 무의미한 도구가 되어 버릴 수 있다.

셋째, 시각적 표현 자체가 안고 있는 한계가 오류 발생의 원인이 되는 것을 들 수 있다. 이러한 예로, 시각적 표현이 주는 유한성에 근거하여 도형의 개념적 이해를 오도하는 경우를 들 수 있다.

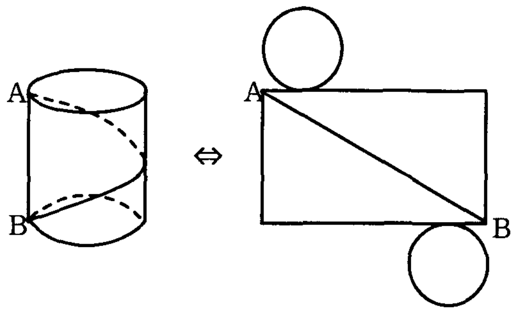


<그림 5> 각의 내부와 외부의 점

위의 <그림 5>에서 각의 개념에 대하여 충분히 이해를 했다면, 각의 내부와 외부의 점을 구분할 수 있겠지만, 주어진 그림이 나타내는 유한성에 종속되어 학생들은 점 C를 외부의 점으로 간주해 버리기도 한다.

또, 다른 예로 3차원 도형을 2차원 도형으로 표현하는 경우와 그 역의 상황에서, 실제 상황과 시각적 표현이 다르게 나타나는 경우를 들 수 있다. 아래 <그림 6>과 같은 원기둥에서 개미가 A지점에서 한바퀴를 돌아 아래 B지점으로 내려오는 최단거리를 묻는 문제에서, 학생들은 최단거리가 3차원 공간에서는 곡선으로 표현되지만, 2차원 평면에서는 직선으로 표현된다는 것을 알아야 한다. 이 경우에 학생이 겪는 어려움은 3차원 도형이 갖는 속성을 2차원 평면으로 적절하게 표현해야 한다는 것

이다. 따라서, 그림 자체에서 보여지는 성질을 그대로 해석하지 말고, 2차원 평면으로 표현할 때 필요한 정보를 파악해야 한다.



<그림 6> 원기둥과 그 전개도

이상과 같이, 문제해결자는 시각적 표현이 내포하고 있는 개념적 의미를 명확히 파악하지 않고 그 표현을 이용할 경우에 여러 가지 오류를 야기 시킬 수 있다. 따라서, 문제해결자는 시각적 표현이 내포하고 있는 개념적 의미를 명확히 파악하여야 하며, 이런 경우에 시각적 표현은 수학 문제해결 과정에서 더욱 강력한 매개체가 된다. 이를 위해, 학생들은 각자 스스로의 시각적 표현을 구성하도록 격려되어야 하며, 이를 통해 시각적 표현의 한계를 스스로 인식하고, 그 한계를 극복하여 문제해결의 유용한 도구로 이용하도록 해야 할 것이다.

Ⅳ. 시각적 표현을 통한 문제해결의 몇 가지 사례

수학 문제해결 과정에서 문제해결자는 문제에 주어진 상황을 내적 표상으로 바꾼 후에, 문제를 구성하는 요소들을 해석하는 문제이해 단계부터 문제해결을 시작한다. 이때, 주어진 문제의 여러 조건들은 문제해결자의 직접적인 인식을 통하여 이해하기 어려운 것들이 많이 있다. 이러한 경우에, 주어진 문제를 구체적이고 확실하며 실용적으로 다루기가 편리한 시각적 표현으로 변형하는 것은 유용하고 효과적인 방안이 될 수 있다.

특히, 시각적 표현은 학생들이 추상적이고 불확실하며 우리의 사고의 폭을 넘는 무한의 대상을 사고하는 것보다, 쉽게 지각할 수 있고 구체적으로 다루어지고 우리의 사고 영역 내에서 다룰 수 있기 때문에 문제해결에 유용하며 중요한 역할을 한다. 그리고, 시각적 표현은 Dienes(1960)가 제시하고 있는 '지각적 다양성의 원리'의 측면에서 볼 때에도, 주어진 문제의 시각적 표현이 주어진 문제의 조건을 다양하고 구체적으로 제시함으로써, 학생들의 문제해결력을 신장시키는데에도 용이하다.

또한, 제 7차 수학과 교육과정(교육부, 1997)에서도 수학과 교수학습은 "직관이나 구체적인 조작활동에 바탕을 둔 통찰 등의 수학적 경험을 통하여 형식이나 관계를 발견하고, 수학적 개념·원리·법칙 등을 이해한다(p. 29)." 라고 제시하고 있으며, 이를 실현하기 위한 각 영역별 내용의 학습 방안에 대해 권고하고 있다. 예를 들면, 수학 10-가 단계의 수와 연산의 영역에서는 집합의 연산 법칙을 이해시키도록 제시되어 있는바, 집합의 연산법칙을 되도록 벤다어그램으로 확인하도록 학습상의 유의점을 제시함으로써, 시각적 표현을 이용한 구체적인 지도를 권고하고 있다.

마찬가지로, 제 7차 수학과 교육과정은 국민공통 기본 교육과정의 수학을 각 단계별로 기본과정과 심화 과정으로 나누어 구성하고 있으며, 학생의 능력과 수준, 단계간의 연계성, 지역성 및 현실성을 고려하여 보충, 심화학습의 기회를 제공하고 있다(교육부, 1997, p. 84). 특히, 보충과정의 내용은 기본과정의 내용을 더 낮은 난이도로 하향 초등화하여 구성하도록 제시하고 있는데, 이를 위한 방안의 하나로 어떤 정리와 이에 대한 증명을 시각적 표현을 통해 정리가 성립함을 보이는 것도 유용할 것이다.

이상과 같이, 시각적 표현은 수학 교수-학습의 여러 상황에서 중요한 역할을 수행할 수 있음을 알 수 있다. 특히, 수학 문제해결과 관련하여 학생들은 주어진 문제 상황을 시각적 표현으로 재구성함으로써 문제해결에 옳은 경로를 발견할 수 있다. 이러한 측면에서, 다음에 제시된 몇 가지 문제들은 시각적 표현을 이용하여 직관적으로 문제해결의 단서나 해결책을 구할 수 있는 예시이다.

<예시 1> 한 농장에 닭과 토끼가 13마리가 있다. 닭과 토끼의 다리는 모두 36개이다. 이 농장에는 몇 마리의 닭과 토끼가 있는가?

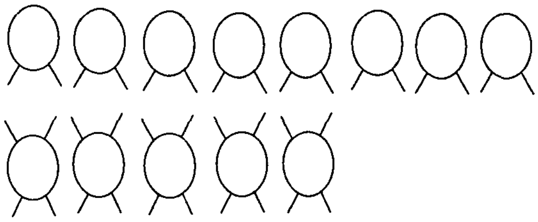
위의 문제는 다양한 전략을 이용하여 해결 가능한 것

이다. 문제가 설정된 상황은 연립 일차방정식이지만, 변수와 방정식의 개념을 학습하지 않은 초등 학생들도 시각적 표현을 이용하여 주어진 문제를 풀 수 있다.

(풀이 1) 연립 방정식($x+y=13$, $2x+4y=36$)을 세워서 해결하면, 닭은 8마리이고, 토끼는 5마리이다.

(풀이 2) 표 만들기 전략을 이용한다. 이 경우에 시행착오 전략은 만들어질 표의 양을 줄일 수 있다.

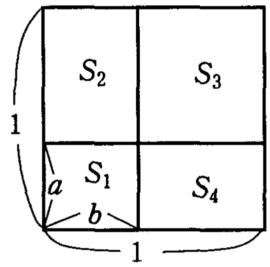
(풀이 3) 문제 상황을 그림으로 표시하여 보면 쉽게 문제를 해결할 수 있다(Fischbein, 1977).



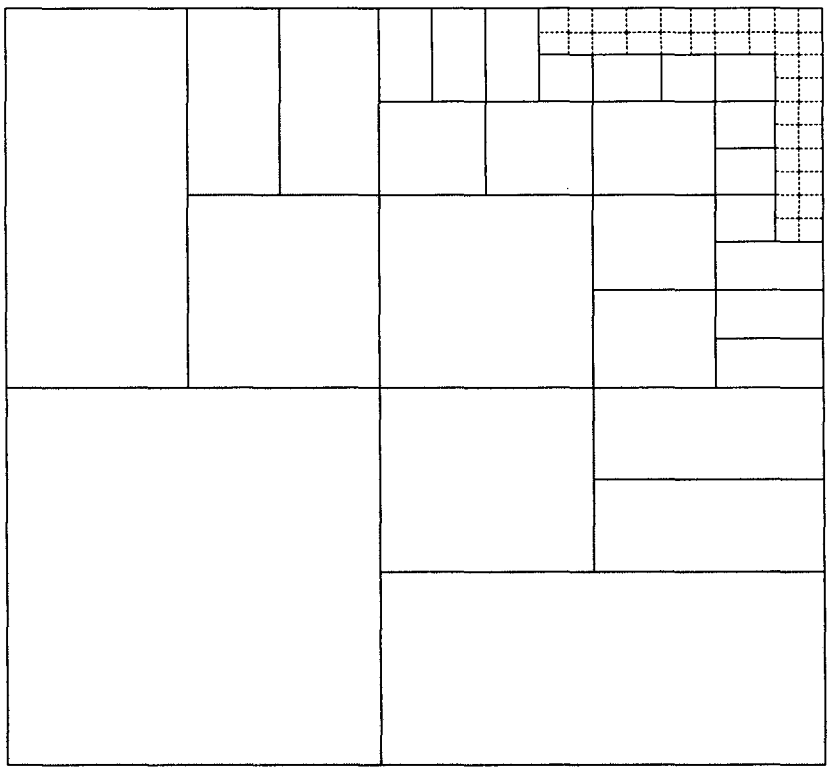
<예시 2 : 절대 부등식의 증명> $0<a<1$, $0<b<1$ 일 때, $ab+1 > a+b$를 증명하여라.

(풀이 1) $ab+1-a-b=(a-1)(b-1)>0$ 이므로 $ab+1 > a+b$이다.

(풀이 2)



$$a+b-ab=(S_1+S_4)+(S_1+S_2)-S_1$$
$$=S_1+S_4+S_2<1$$



<그림 7> 무한급수의 시각적 표현의 예(Nelsen, 1993)

<예시 3 : 무한급수> 다음 무한급수의 값을 구하여라.

$$1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{4}\right)+4\left(\frac{1}{8}\right)+\cdot\cdot\cdot$$

등차수열과 등비수열의 곱의 형태로 주어진 무한 급수의 경우에도, 도형을 이용하여 합을 쉽게 구할 수 있다.

(풀이) 앞의 <그림 7>과 같이, 넓이가 1인 네 개의 정사각형에서 주어진 급수들에 해당되는 영역을 계속해서 색칠해 간다. 이 과정을 한없이 계속하면, 색칠한 부분의 넓이는 4가 된다. 따라서, 주어진 식의 값은 4가 됨을 알 수 있다.

이상에서 제시된 몇 가지 예에서 알 수 있듯이, 주어진 문제의 시각적 표현은 문제해결에 직접적인 해결책을 제공해 줌을 알 수 있다. 수학교육에서 시각적 표현이 다양하게 이용될 수 있음은 기지의 사실이며, 특히 문제해결과 관련하여 Polya(1957)의 권고안 대로 "그림은 기하 문제의 대상이 될 뿐만이 아니라, 기하학적이 아닌 모든 문제풀이에 중요한 도움이 된다(p. 93)."는 것과 같이, 시각적 표현은 중요하게 다루어져야 할 것이다.

V. 결 론

수학 교수-학습에서 표현은 수학의 핵심적인 내용인 동시에 수학적 활동에 연관된 인지의 핵심이라고 할 수 있다. 특히, 다이어그램이나 함수의 그래프 표현, 수형도와 같은 시각적 표현의 이용은 원래의 개념의 의미를 좀 더 구체적으로 전달해 줄뿐만이 아니라, 문제의 원형을 다각적으로 표현할 수 있도록 함으로써, 문제해결에 직접적인 단서나 해결책을 제공해 주기도 한다.

이에 본 연구에서는 수학교육에서 강조되고 있는 시각적 표현을 중심으로, 이에 대한 수학 교수학적 의의 및 역할에 대해 고찰해 보았다. 먼저, 수학 교수-학습에서 시각적 표현의 가치에 대하여 알아보았다. 일반적으로, 표현은 외적으로 관찰 가능한 과정들과 산물뿐만이 아니라, 수학을 하는 사람들의 정신 속에서 내적으로 일어나는 과정들과 산물들 모두에 적용된다(NCTM, 2000). 특히, 시각적 표현은 직관적 사고와 관련하여, 수학적 사실을 즉각적으로 이해하도록 도와주며, 문제해결 과정에서도 유용한 단서를 제공해주는 도구이다. 이러한 예로는, 시각적 표현을 이용하여 생산적 사고의 발현을 경험한 Gauss의 일화나 육각형 구조인 벤젠 분자의 원자의 배열을 발견한 Kekule의 일화를 들 수 있다. 이와 같이, 시각적인 표현은 창의적인 활동에 중요한 역할을 수행해 왔음을 알 수 있다.

다음으로는, 시각적 표현 자체가 안고 있는 한계로 인하여 야기될 수 있는 문제점에 대하여 분석하였다. 시각을 통하여 습득된 정보는 인식된 대상에 대한 명확한 분석이 이루어지지 않을 때, 사물의 특성을 왜곡시키는 원인이 되기도 한다. 이것은 수학의 개념을 설명하거나 문제해결을 위한 도구로 이용되어지는 시각적 표현의 경우에도 마찬가지이다. 문제해결과 관련하여 이러한 원인을 문제에 주어진 시각적 표현이 문제해결에서 오류 발생의 원인이 되는 것, 어떤 개념을 설명하거나 표현하기 위한 시각적 표현이 오류 발생의 원인이 되는 것, 그리고 시각적 표현 자체가 안고 있는 한계가 오류 발생의 원인이 되는 것이라는 세 측면으로 나누어 제시하였다. 이와 같이, 시각적 표현이 오류를 일으킬 수 있다는 사실은 수학 교실에서 학생들 스스로가 시각적 표현을 구성하도록 지도되어야 하며, 이를 통해 시각적 표현의 한계를 스스로 인식하고, 한계를 극복하여 문제해결의 유용한 도구로 이용하도록 해야 함을 암시 받을 수 있다.

마지막으로, 일선 현장에서 이용 가능한 시각적 표현을 통한 문제해결의 실례를 예제 중심으로 제시하였는데, 제시된 몇 가지 예에서 주어진 문제의 시각적 표현이 문제해결에 직접적인 해결책을 제공해 줌을 알 수 있다.

결론적으로, 시각적 표현은 문제해결을 이끄는 안내자의 역할을 수행하며, 수학적 사실의 이해에 도움을 주는 유용한 도구이다. 따라서, 수학 교사는 수학 교수-학습에서 시각적 표현의 중요성을 강조하여야 하며, 이를 위해 시각적 표현을 통한 개념 이해나 문제해결의 상황을 학생들에게 제시하여야 한다. 또한, 수학 교사는 학생들에게 특별한 문제 상황에 적합한 시각적 표현을 구안하도록 발문하고, 시각적 표현에 관련된 개념적 이해도 겸비하도록 지도해야 한다.

참 고 문 헌

교육부 (1997). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.

신동선 · 류희찬 (1998). 수학교육과 컴퓨터, 서울: 경문사.

장혜원 (1997). 수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구-표상 모델 개발을 중심으로-, 서울대학교 박사학위논문.

Bruner, J. S. (1960). *The process of Education*. New York: Vintage Books. 이홍우(역) (1997). 교육의 과정. 서울: 배영사.

Dienes, Z. P. (1960). *Building up Mathematics*. Hutchinson Educational, Ltd.

Fischbein, E. (1977). Image and Concept in Learning Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 8, pp.153-165.

__________ (1987). *Intuition in science and mathematics: An Educational Approach*. Dordrecht: D. Reidel Publisching Company.

Hadamard, J. (1945). *The Mathematician's Mind: The Psychology of Invention in the Mathematics Field*. Princeton University Press.

Janvier, C. (1981). Use of Situations in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics* 12, pp.113-122.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*, Th Mathematical Association of America.

Poincaré, H. (1905). *La Valeur de la Science*. 김형보(역) (1983). 과학의 가치. 서울: 단대출판부.

Polya, G. (1957). *How to solve it: 2*, New York: Doubleday.

Skemp, R. R. (1986). *The Psychology of Learning Mathematics: 2*. Harmonsworth: Penguin.

Wertheimer, M. (1945). *Productive Thinking*. New York: Harper & Brothers Published. 矢田部達郎 (譯) (1952). 生産的 思考. 岩波現代叢書.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). Editers' Introduction: What is Mathematical Visualization. In Zimmermann, W. & Cunningham, S.(Eds.). *Visualization in Teaching and Learnin Mathematics*, New York: The Mathematical Association of America.

A Study on the Visual Representation in Mathematics Education

Lee, Dae-hyun
Jeon-Ju Technical High Scoool, 548-2, Youi-dong, Jeonju, Korea
E-mail: leedh6@hanmail.net

Visual representation is very important topic in Mathematics Education since it fosters understanding of Mathematical concepts, principles and rules and helps to solve the problem. So, the purpose of this paper is to analyze and clarify the various meaning and roles about the visual representation.

For this purpose, I examine the status of the visual representation. Since the visual representation has the roles of creatively mathematical activity, we emphasize the using of the visual representation in teaching and learning. Next, I examine the errors in relation to the visual representation which come from limitation of the visual representation. It suggests that students have to know conceptual meaning of the visual representation when they use the visual representation.

Finally, I suggest some examples of problem solving via the visual representation. This examples clarify that the visual representation gives the clues and solution of problem solving.

Students can apprehend intuitively and easily the mathematical concepts, principles and rules using the visual representation because of its properties of finiteness and concreteness. So, mathematics teachers create the various visual representations and show students them. Moreover, mathematics teachers ask students to design the visual representation and teach students to understand the conceptual meaning of the visual representation.

* ZDM Classification : D5
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Word : representation, visual representation, problem solving, limitation of the visual representation, intuition.