韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2003, 11. 제 42권, 제 4호, 541-559.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2003, Vol. 42, No. 4, 541-559.

교사 양성 대학에서의 해석학의 학습과 지도

이 병 수 (경성대학교)

I. 서 론

교사 양성 대학 수학과는 수학에 대해 긍정적이고 적극적이며, 깊은 애정으로 수학의 본질과 응용의 가치를 깊이 이해할 수 있고, 학습과 지도를 통해 수학 교육의 의미를 최대한 실행할 수 있는 바람직한 교사 양성을 목적으로 한다. 교육내용학과 교과교육학 및 일반교육학의 효율적인 통합 운영을 바탕으로 수리적 해석학(mathematical analysis)에 관한 다양한 교수 학습 방법의 개발과 함께 최대한의 초·중·고등 교육의 연계를 이룰 수 있는 교육과정 및 교수학습 방법개발이 이 연구의 목적이며, 개발 방향은 신현용(2003)의 내용을 참고로 한다.

Gavalas(2000)는 수학교육체계의 네 가지의 구성 요소로 교사와 학생 그리고 수학 외 교육공학의 중요성을 지적하고 있다. 그러나 수학 교육의 가장 큰 중심은 무엇보다도 학습의 주체인 학생과 학습지도의 주체이자 학습 환경의 보조자인 교사의 역할이다. 수학 강의의 한 축인 교사의 학생을 향한 질문의 양식이나 수준 혹은 형식에 따라 학생들의 수학에 대한 개념의 이해나 수학의 구성 과정에 대한 이해가 달라질 수 있으므로(Mason, 2000) 질문을 자연스럽게 유도하고 이끌어 나가는 것이 교사들의 가장 중요한 학습 환경 조성이다.

교사 양성 대학은 전문적인 수학자의 양성이 목적이 아니고 유능하고 바람직한 학습지도자의 양성이 목적이므로, 수학적 내용의 많고 적음의 문제보다는 수학적 내용의 전달 방법과 전달 내용이 그 무엇보다도 더 중요하다. 따라서 교사는 지도하고 있는 수학 내용을 잘 알고 있어야 할 뿐 아니라, 이전 수준의 학습 내용과 이후 수준의 학습 내용을 심도있게 알고 있어야 한다(Cohen, 2001). 아울러 지도 내용의 타 분야에의 응용 정도도 훤히 알고 있어야 한다. 또한, 수학교육은 실세계와 관련된 내용을 지도하는 것과 함께 학생들이 배우는 수학적 내용을 스스로 실생활 문제 상황으로 상상하고 해결할 수 있게 해야 한다(Zulkardi, 2002). 그러므로 교사 양성 대학은 예비 교사가 습관적으로 수학적 사고를 하는 마음가짐을 가지고 유연하고 상호 활동적인 학습지도를 할 수 있는 능력을 기르도록 지도해야 한다(Krantz, 2001). 따라서 다양한 효과적인 학습 지도 스타일을 경험할 수 있게 하고 활동적인 학습 모형에 참여시켜야 한다.

교사가 미적분학을 효율적으로 잘 지도할 수 있게 하기 위해서는, 교사 양성 대학에서의 해석학의 학습·지도시 미적분학 스키마를 해석학 스키마로 대체하기보다는, 미적분학 스키마를 해석학 스키마에 잘 정제·융합시키는 것이 바람직하다(Tall, 1975). 실제로 해석학의 학습과 지도에서는 교수가 학생들의 직관성을 활용하고 형식적인 질문과 답변을 유도하여 서로 충분한 토론의 기회를 갖는 학습 상황을 연출하는 방향으로 학습 지도를 전개하며, 미적분학의 공간적 직관성을 최대한 활용하는 입장에서 추상적이고 논리적인 해석적 사고 구조의 형성을 도울 필요가 있다. 또한 교수가 학습 내용을 실생활의 문제와 관련시켜 지도하고, 또 학생들이 자연스럽게 수학적 내용을 실생활로 연계시킬 수 있는 능력을 쌓아가는데 도움을 줄 수 있는 보조사로써의 역할을 할 수 있는 방향으로 내용을 전개할 필요가 있다.

본고의 Ⅱ장에서는 해석 영역의 목표와 내용을 다루고, Ⅲ장에서는 해석학의 학습과 지도를, Ⅳ장에서는 중학교 7-가의 일차방정식과 연계하여 '부동점과 근사해'를 학습·지도의 예(例)로 다룬다.

---

* 2003년 9월 투고, 2003년 11월 심사 완료.
* ZDM분류 : B55, D45
* MSC2000분류 : 97B02, 97D02
* 주제어 : 교사양성대학, 예비수학교사, 미분적분학, 미분방정식, 수리해석학, 복소해석학.

II. 해석 영역의 목표와 내용

1. 초 · 중 · 고등학교 해석 영역 목표

수학의 해석 영역의 목표는 물리적, 사회적, 정신적 현상에서의 문제를 종속과 변화 관계인 함수적 관점으로 파악할 수 있는 함수적 사고를 신장시키고, 이를 수학적 내용으로 변환 · 조직화하여 문제를 해결하는 능력과 현상으로 재해석하여 합리적 판단력과 예측 능력을 키우는 것이다. 함수 개념은 두 대상 사이의 순서화된 종속성에서 비롯되는 개념으로 자연 현상이나 사회 현상을 기술하는 수단일 뿐 아니라, 경험을 조직하고 일반화 · 추상화하는 사고의 수단이다. 실질적으로 함수 개념은 현대 수학의 모든 분야에 바탕이 되는 기초 개념 가운데 하나이지만, 부분적으로 복잡한 단계 및 개념과 관련된 많은 부수 개념 때문에 학교수학의 학습과정에서 숙달하기 어려운 개념중 하나이기도 하다. 그러므로 학생들의 함수적 사고를 기르기 위해서는 그들의 인지적 학습능력에 맞는 적절한 수준의 함수적 개념과 접근 방법이 필요하다.

초등학교에서는 비교적 간단한 수와 도형의 배열에서 규칙성을 파악하는 것으로 함수적 개념에 접근한다.

중학교에서는 두 수열 사이의 비례관계를 이용하여 함수의 용어와 개념을 도입하고 직관적인 방법으로 일차 함수 및 이차함수와 관련된 물리적 현상에서 나타나는 함수적 관계를 다룬다.

고등학교에서는 경제, 정치, 사회 등의 모든 분야를 포함한 물리적, 사회적, 정신적인 여러 가지 현상에서 함수적 관계를 인식하고, 보다 복잡한 현상을 해석하는 수단으로서 지수함수나 로그함수, 삼각함수를 도입한다. 또한 변화하는 현상의 관계를 설명하고 해석하는 수단이자 현실 세계의 많은 문제를 모델화하는 중요한 도구로 미적분을 이용한다. 평균치 정리를 포함한 대부분의 학습 · 지도 내용은 유계 폐구간 $[a, b]$에서 실변수 실가함수 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 의 연속성을, 유계 개구간 (a, b)에서 미분 가능성을 가정하고 있다. 또한, 유계 폐구간에서 연속인 함수들은 유계이므로 사실상 특별한 언급없이 유계함수를 다루고 있는 것이다. 실제로 유계 폐구간 $[a, b]$와 유계 개구간 (a, b)는 연결 집합이고 또한 전순서 관계를 가지고 있는 무한 집합이다. 더군다나 유계 폐구간 $[a, b]$는 대표적인 콤팩트(compact) 집합으로 그 중요성은 매우 크다.

2. 초 · 중 · 고등학교 해석 영역 내용

(1) 1-10단계에서는 '규칙성과 함수'의 내용을 기본으로 하여 다음 내용을 위주로 다루고 있다.

1단계 : 규칙적인 배열 속에서 규칙을 찾고 정해진 규칙 속에서 배열하기

2단계 : 다양한 변화의 규칙을 찾고 1~100의 수 배열표에서는 뛰어 세는 규칙을 찾기

3단계 : 규칙에 따라 여러 가지 무늬 그리기

4단계 : 다양한 변화의 규칙을 수로 나타내고 설명하기와 규칙을 상상하고 말이나 글로 표현하기, 규칙과 대응을 학습

5단계 : 여러 가지 이동을 이용하여 규칙적인 무늬 만들기

6단계 : 비와 비율, 비례식, 규칙과 대응 연비와 비례 배분

7단계 : 정비례와 반비례, 함수 개념, 순서쌍과 좌표, 함수의 그래프, 함수의 활용

8단계 : 일차함수의 의미와 그래프의 성질, 일차함수와 일차방정식의 관계, 그래프를 통한 연립일차방정식의 해의 이해 및 일차함수의 활용

9단계 : 이차함수의 뜻, 이차함수의 그래프, 이차함수의 그래프의 성질

10단계 : 함수의 그래프, 합성함수와 역함수, 이차함수의 최대 · 최소, 이차함수의 응용, 유리함수와 무리함수, 일반각과 호도법, 삼각함수의 성질, 삼각형에의 활용

(2) 수학 I 에서는 수열의 극한, 지수함수, 로그함수를 중심으로 해석 영역의 내용이 전개된다.

(3) 수학 II에서는 함수의 극한과 연속성, 다항함수의 미분법으로 미분계수, 도함수, 도함수의 응용이 다항함수의 적분법으로 부정적분, 정적분, 정적분의 활용이 다루어진다.

(4) 미분과 적분에서는 삼각함수 부분에서 삼각함수의 덧셈정리와 삼각방정식이 다루어지고, 함수의 극한 부분에서는 삼각함수의 극한, 지수, 로그함수의 극한, 미분법에서는 여러 가지 함수의 미분법과 도함수의 응용, 적분법에서는 부정적분과 정적분 그리고 정적분의 활용이 다루어진다.

3. 대학교 해석 영역 목표

대학교에서의 해석 영역은, 학습과 일상생활의 문제를 인식하고 해결하는데 필요한 기초 능력을 배양하는 초등학교의 해석 영역과 학습과 일상생활에 필요한 기본 능력과 문제 해결력을 기르는 것이 거의 대부분인 중등학교의 해석 영역, 그리고 적성과 소질에 맞는 개척적인 능력과 학문 및 생활에 필요한 논리적, 비판적, 창의적 사고 능력과 태도를 익히고 개발시키는 것이 목표인 고등학교 해석 영역의 목표를 바탕으로 하며, 그러한 영역들을 아우르고 있다.

주로 수치적, 기호적, 그리고 시각적 표현으로 구성된 직관적인 표현을 다루는 미적분학과는 달리 수리적 해석학은 전적으로 형식적 표현을 기본으로 한다.

실해석학과 복소해석학은 각각 실수계와 복소수계의 특성과 실변수의 실가 함수와 복소 변수 복소가 함수의 특성을 다룬다. 보통 학생들은 해석학 및 복소해석학의 순수 및 응용분야의 주요 내용인 수열과 함수들의 구조 속에서 많은 복잡성과 혼돈을 느끼며, 극한이나 무한개념 및 관련 용어에서 일상적인 의미와의 괴리와 모순에 부딪힌다. 그리고 완비성 공리의 사용이나 충분조건에 의한 추론과 같은 해석학 분야의 특정한 성질을 배우는 데에도 어려움을 가진다. 또한 직관적이고 자생적인 개념과 갈등을 일으킬 수 있는 구조적 정의의 도입과 직관적 사고의 역동적 흐름과는 다른 방식으로 조작하는 한정기호를 포함하는 복잡한 명제에 기초한 증명 등, 해석학과 복소해석학의 분야에서는 형식화에 기인하는 어려움들이 많이 있다.

미분방정식은 물리학, 공학, 경제학, 생물학, 생태학 등의 자연현상 및 사회 현상 그리고 심리 현상 등과 관련된 내용들이 미분방정식적 모델링 과정을 거쳐서 나온 방정식이다. 모델링 과정은 논리적인 문제를 푸는 것도 아니고, 또한 완벽한 지침을 요구하는 것도 아니며 단지 물리적인 식견과 수리적 추론 그리고 상식적인 견해의 조화로운 결합을 강조하며 위의 제 현상과 관련된 예를 들어 수학적으로 묘사하는 과정을 설명하고 있다 (Sanchez 외, 1983).

대학교에서 해석 영역의 목표는 현대 수학의 기본인 극한과 무한개념에 대한 올바른 이해와 함께 이들을 수학적 대상으로 다룰 수 있는 안목을 키우고 점열의 수렴성과 함수의 개념과 성질을 형식화하여 표현하고 엄밀히 증명하는 방법 등, 해석적인 방법에서 문제를 접근하고 해결하는 능력을 갖추게 하는 것이다. 대학수준의 해석 영역에서는 첫째, 이전의 학습에서 다룰 때 보다 좀 더 일반적이고 추상적으로 함수의 개념을 정의역의 특성과 관련하여 다루며, 둘째, 유계 함수, 유계 변동 함수, 연속 함수, 미분가능한 함수, 적분가능한 함수, 볼록 함수, 단조 증가 함수, 단조 감소 함수들의 특성을 바탕으로 학습 내용을 전개하며, 셋째, 함수열 개념을 도입하여 미분가능한 함수열의 극한의 미분가능성, 적분가능한 함수열의 극한의 적분가능성, 연속함수열의 극한의 연속성 등을 다룬다.

미분방정식의 영역에서는 초보적인 수치해석적 접근이나 그래프적 접근을 활용하면서 미분 방정식의 해법을 지도한다. 더욱이 정의를 먼저 제시한 후 정리를 증명하거나 인용함으로써 학생들이 미묘한 이론보다는 대수적 알고리즘에 더 집중하게 하여 형식화에 따르는 어려움을 해결하려고 한다.

4. 대학교 해석 영역 내용

(1) 미분적분학 I · II에서는 함수의 극한과 연속성을 중심으로 평균치 정리를 포함한 주요 정리가 소개되며, 도함수와 응용, 함수의 적분가능성과 적분의 활용, 역함수, 적분법과 그 응용, 무한 수열과 무한 급수, 벡터와 공간 기하, 벡터함수, 편도함수, 중적분, 선적분, 면적분 등이 다루어진다.

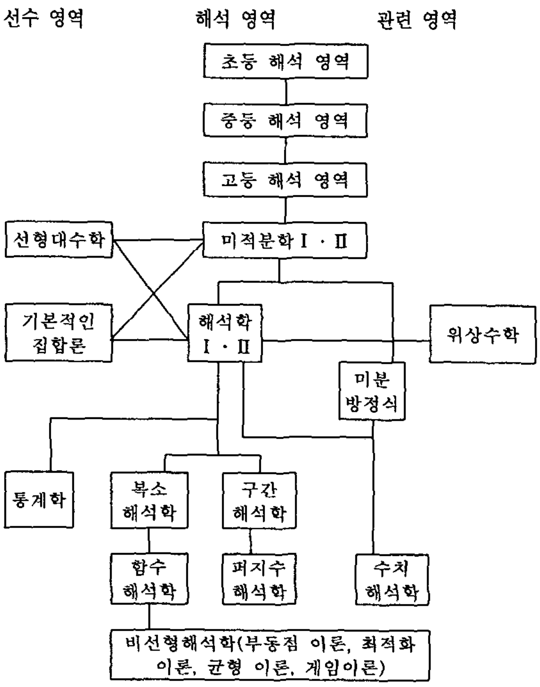
(2) 미분적분학과는 달리 위상적 개념이 도입된 해석학 I · II에서는 실변수 실가 함수 $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$와 실수계 $\mathbb{R}$을 중심으로 이론이 전개된다. 해석학 I에서는 실수계 $\mathbb{R}$의 완비성, 순서성, 대수성, 위상성을 다루고, 유계 폐구간 $[a, b]$의 볼록성, 연결성, 콤팩트성 등을 중심으로 이론이 전개된다. 일변수 함수 $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$의 연속성, 미분가능성, 적분가능성, 유계성, 유계 변동성, 단조성 등이 함께 다루어진다. 이어서 해석학 II에서는 $\mathbb{R}^2$의 대수성, 위상성 등과 유계 폐구간들의 곱 $[a, b]\times[c, d]$의 연결성, 볼록성, 콤팩트성을 함께 다루며 이변수 함수 $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$의 여러 가지 수학적 특성을 다룬다. 구체적으로 수학적 체계와 무한집합, 실수계의 대수적 특성과 순서적 특성, 실수계의 완비성과 위상적 특성, 일반화된 극한 개념, 수열과 급수의 수렴성과 수렴 판정법, 함수의 극한과 연속성, 평등연속과 근사, 함수의 단조성과 그 응용, 리만-스틸체스 적분, 함수열과 함수

항 급수의 평등 수렴성, $\mathbb{R}^2$의 대수적 특성과 순서적 특성, 이변수 실가 함수의 극한 및 연속성과 미분가능성, 이변수 실가 함수의 적분, 이상적분의 평등 수렴성 등이 다루어진다.

(3) 미분방정식에서는 미분의 내용을 근간으로 기본적인 내용과 수학적 모델, 1계 미분방정식과 응용, 고계 선형미분방정식, 2계 선형미분방정식의 응용, 변수 계수 고계 미분방정식 및 응용, 선형미분방정식의 Laplace 변환 해법, 연립 선형 미분방정식, 해의 존재성 등이 다루어진다.

(4) 복소해석학에서는 위상 개념과 대수적 개념을 바탕으로 복소수들의 집합의 수학적 특성, 복소변수 복소가 함수들의 특성과 그 예, 해석함수, 선적분과 전해석함수, 전해석함수의 성질, 해석함수의 성질, 단순연결 영역, 해석함수의 고립된 특이점, 유수 정리와 그 응용, 등각사상 등이 다루어진다.

다음은 이에 따른 해석 영역의 위계도이다.



III. 해석학의 학습과 지도

1. 학습 · 지도의 운영 방향

1.1 운영 방향

수학 교육에서 가장 중요한 일은 무엇보다도 학습의 주체인 학생과 학습지도의 주체이자 학습 환경의 보조자인 교수의 역할이다. 교수의 학습지도 능력이나, 학습지도 경험, 교육철학 등은 퍼지(fuzzy)적이며, 또한 학생들의 학습 능력, 학습 태도, 이전의 학습 내용 등도 퍼지적이다. 수학의 학습 과정을 중요시하는 이유가 여기에 있다. 또한 수학을 생산된 결과물(product)과 함께 생산하는 과정(pocess)으로 보는 견해(Ernest, 1989)에서 생산하는 과정으로 다루는 것이 수학교육의 입장에서 바람직한 이유는 그 과정이 퍼지적 상황을 포함하고 있기 때문이다. 따라서 우리가 가장 중점적으로 그리고 퍼지적으로 다루어야 할 내용은 교수와 학생간의 인간 관계에서 이루어지는 학습 과정 그 자체라고 할 수 있다. 교수의 질문은 학생들로 하여금 수학적 개념이나 기법 혹은 방법의 이해를 돕고 또한 그러한 것들을 이해한 정도를 평가하는데 있어서 교육적 도구의 역할을 한다. 반면 학생들의 질문은 교수로 하여금 학생들의 이해 수준을 직접 느끼게 하고, 자신의 강의 내용의 수준과 방법을 스스로 평가하게 하며, 그에 따른 개선책을 강구하게 만든다. 이러한 느낌과 평가 그리고 개선책의 강구는 학습 현장에서 즉시 이루어지므로 수학교육에서 무엇보다도 중요한 것은 학생들의 직접적인 질문이며, 교수들이 그러한 질문을 자연스럽게 유도하고 이끌어 나가는 것이 중요하다. 특히 해석학은 대수학, 위상수학, 기하학 등과는 달리 교수의 직접적인 설명과 학생들의 직접적인 질문이 필기를 통한 학습 지도보다도 학습 효과에 훨씬 많은 영향을 끼칠 정도로 그 내용이 복잡하므로 교수와 학생간의 자유스런, 직접적인 대화가 우선이어야 한다. 또한, 학생들이 그룹을 지어 그들의 생각과 의문점들에 대한 의견을 교환하고 그들 스스로 동의하거나 혹은 동의하지 않으면서 공동의 의견과 공동의 생각을 만들어 낸다면 수학 학습은 더욱 풍부해질 것이다(Lloyd, 1999; Richards, 1991; Slavin, 1990; Voigt, 1996). 수학교육은 보통 순수적인 면과 응용적인 면의 두 가지 측면을 가지

고 있다. 수학적인 사고와 수학적인 지도 그리고 수학적인 학습의 본성을 이해하는 것이 수학교육의 순수한 일면이고, 또 하나는 그러한 이해를 수학 강의의 개선에 활용하는 것이 수학교육의 응용적인 일면이다(Schoenfeld, 2000). 한편 수학적 사고는 직관적인 사고, 논리적인 사고, 분석적인 사고의 과정을 거치면서 다듬어져야 하며, 논리적인 사고는 이치 논리보다는 퍼지 논리(fuzzy logic)적 입장에서 이루어져야 한다.

교사 양성 대학의 목적은 유능하고 바람직한 수학교육 지도자의 양성이므로, 수학적 내용의 전달 방법이 그 무엇보다도 더 중요하다. 또한 교육은 학습자를 위한 것이므로 학습자 중심으로 이루어져야 한다. 따라서 교수는 학생들이 서로 쉽게 질문을 주고 받으며 토론할 수 있는 학습분위기를 유도하고 지켜주어야 한다. 그리고 질문 내용에 대한 정확한 답변 내용의 마련이 쉽지 않을 때는 솔직하게 이해를 구하고 가까운 시간 안에 다시 만날 것을 약속한 후 준비를 철저히 한다. 한편 학생들이 사전에 충분히 자습을 한 후 질문하는 가를 확인하기 위해 질문의 전후 내용을 설명하게 한다. 만일 전후 내용에 대해 자세히 공부하지 않은 상태에서 무조건적인 질문을 하면 질문 내용을 충분히 숙지한 후 다시 꼭 오게 약속을 받고 돌려 보낸다. 마지막으로 질문자의 질문 태도를 존중하고 동시에 다른 학생들의 참여를 유도하기 위해 한 학생의 질문 내용을 정리하여 모든 학생들에게 일러 주어야 한다.

1.2 평가 기준

절대 평가를 하며 적극적인 발표와 토론에 참가하는 것을 기준으로 한 평가 비율은 다음과 같다.

- 중간 평가 및 기말 평가 : 각 30점
  (open book 시험 포함)
- 수시 간단 시험 : 매 1점 × 10회 = 10점
- 발표 및 질문, 토론 참가
  : 매 2점 × 10회 = 20점
- 필독서(지정 3권)의 독후감 토론 참여
  : 매회 최고 2점 × 5회 = 10점

해석 영역과 관련된 교양도서 3권을 필독서로 지정하고, 3주, 6주, 9주, 12주, 15주의 학습 및 지도가 끝날 때마다 필독서의 내용과 관련된 주제를 설정하고 토론의 기회를 갖는다. 그리고 참여 정도에 따라 매회 최고 2점 만점으로 절대평가하여 성적을 차등 부여한다.

2. 학습 지도 내용의 전개

실수계 $\mathbb{R}$의 수학적 특성은 크게 볼록성 개념을 포함하는 대수적 특성, 전순서 성질(total -ordering property)과 같은 순서적 특성, 연결성(connectedness)과 같은 기하적 특성, 그리고 콤팩트성(compactness)과 같은 위상적 특성으로 나눌 수 있다. $\mathbb{R}$의 대수적 특성은 벡터 공간으로서의 특성을 의미하며 위상적 특성은 보통 위상(usual topology)을 가진 위상 공간의 특성을 의미한다. 미적분학에서 다루는 함수들은 보통 유계 폐구간에서 연속이고 유계 개구간에서 미분 가능한 함수들이다. 미적분학에서 기본적으로 다루는 함수들의 정의역인 구간은 사실상 하나의 볼록집합이다. 많은 종류의 함수들을 좀 더 일반적인 유계 개집합, 또는 유계 폐집합에서 다루게 되므로 위상적 내용을 이해시키는 것은 필요하다. 또한 거리 개념을 이용해서 다루는 수열의 수렴성은 해석학의 전 분야에서 극히 중요한 내용이다. 한편 실변수 실가 함수의 특성으로 크게 연속성(미분 가능성), 적분 가능성, 볼록성, 단조성을 들 수 있다. 함수의 이 네 가지 특성은 공학 등의 여러 분야에서 많이 활용되고 있다.

수열의 수렴에 관한 특성은 응용 분야를 포함한 해석 영역의 모든 분야에서 핵심적인 역활을 하는 수학적 내용이다. 고등학교 학생들이 학습하는 미적분학의 모든 수학적 특성이 극한 개념과 수렴 개념을 그 근간으로 하고 있다. 또한 고등학교 과정에서 본격적으로 다루는 수열은 정의역이 무한 집합이고 변역이 실수 집합인 함수이다. 학생들은 무한 개념에 대한 형식적 정의를 접하기 이전에 수열의 예를 통해서 무한에 대한 기본적인 감각을 익히고 있다. 따라서 이미 수열에 관한 형식적인 정의를 배워 그것에 익숙한 교사들은 학생들의 직관력을 최대한으로 보호하는 입장에서 형식적 정의를 비형식적인 방법으로 풀어나갈 필요가 있다.

극한 개념을 다룰 때 극한값의 존재성과 유일성 그리고 구체적으로 극한값을 구하는 것에 중점을 두고 다루는 것이 극한값의 수렴 과정을 다루는 것 보다 우선이다. 또한 극한값을 변수 과정(variable process)으로 다루

는 것 보다 부동점(fixed point)으로 다루는 것이 보다 가치가 있다. 이러한 가치의 변환은 수렴 과정과 부동점의 응용성에 그 근거를 둔다.

어떤 거리 공간에서 다른 거리 공간으로의 함수의 극한 개념과 주어진 하나의 공간에서의 점열의 수렴성은 그 공간과 함께 그 공간 위에서 정의된 함수의 활용성의 정도를 나타내는 중요한 척도이다. 거리 공간 (X, d_X)의 부분집합 A의 완비성(completeness) 및 닫힘성(closedness)과 관련하여 점열의 수렴성을 다루는 반면, 콤팩트성(compactness)과 관련하여 부분수열의 수렴성을 다루며 축소함수 $f: (X, d_X) \to (Y, d_Y)$를 이용하여 X의 점열의 수렴성을 다룬다. 실수계에서는 실수열이 Cauahy 조건을 만족하는 것과 수렴하는 것은 서로 동치이다. 따라서 실수계에서 실수열의 수렴성을 논할 때 그 수열이 Cauchy 조건을 만족하는지의 여부를 가리는 것이 많이 사용되는 수렴 판정법 중의 하나이다. 한편, 함수열의 평등 수렴성은 점별 수렴성과는 달리 미분, 적분 개념들과 함께 미분가능한 함수열의 극한의 미분가능성과 적분가능한 함수열의 극한의 적분가능성을 보장한다.

따라서 실변수 실가 함수열의 수렴성과 실수열의 수렴성 및 $\mathbb{R}^2$에서의 벡터열의 수렴성의 활용을 중심으로 해석학 내용을 심도있게 전개할 필요가 있다. 그리고 극한이 존재하는 함수들의 집합, 연속 함수들의 집합, 유계 함수들의 집합, 유계 변동 함수들의 집합, 미분 가능한 함수들의 집합, 적분 가능한 함수들의 집합 등이 벡터 공간이 됨을 확인하고 그러한 벡터 공간상에서 함수들의 특성을 전개할 필요가 있다. 또한 직관력을 최대한 활용하는 입장에서 논리적인 수학적 사고 구조의 형성을 도우며, 학습 내용을 실생활의 문제와 관련시켜 지도할 수 있게 하고, 또 학생들이 자연스럽게 수학적 내용을 실생활로 연계시켜 생각하고 풀어나갈 수 있게 도움을 줄 수 있는 보조자로서의 역할을 할 수 있는 예비교사를 양성하는 것을 목적으로 학습 지도 내용을 전개할 필요가 있다. 마지막으로 직관적인 사고와 퍼지적 사고를 유도하면서 논리적 사고와 분석적 사고를 발전시키고, 여러 함수들을 실생활에 활용 및 응용할 수 있으며, 실생활에서의 상황을 수학적으로 모델링할 수 있는 능력을 쌓는 방향으로, 학습·지도 내용을 전개할 필요가 있다.

본고에서는 상상적 개념(concept image)를 최대한으로 발달시킨 후, 그 수준에 맞는 적절한 정의적 개념(concept definition)을 소개하고 지도하는 것을 목표로, $\mathbb{R}$의 세 축인 대수성(볼록성), 순서성, 위상성을 중심으로 $\mathbb{R}$의 수학적 특성을, $\mathbb{R}^2$의 대수성(볼록성), 위상성을 중심으로 $\mathbb{R}^2$의 수학적 특성을 전개하며, 실변수 실가 함수 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$과 이변수 실가 함수 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$의 연속성, 단조성, 볼록성, 미분가능성, 적분가능성 등의 개념을 중심으로 수학적 특성을 다루며 연속함수들의 공간, 미분가능한 함수들의 공간, 적분가능한 함수들의 공간 등과 같은 함수들의 공간을 구별해서 다룬다.

3. 주별 학습·지도 내용

기존의 국내·외 해석학 교재로 1학기 15주, 2학기 15주 동안에 해석학의 전 내용을 학습·지도하는 것은 필자의 20여 년의 경험으로 볼 때 결코 쉬운 일이 아니다. 여러 가지 이유 중에서 두 가지를 든다면 첫째, 학생들의 적극적인 참여 속에서 수업이 진행된 경우에는 강의 예정량의 반 정도의 내용을 소화하기도 쉽지 않았고, 둘째, 교수가 주도적으로 수업을 진행한다면 무엇보다도 학생들의 창조적인 수학적 능력의 발달에 전혀 도움이 되지 못했다. 이러한 이유로 본 연구에서는 해석학의 학습·지도 내용을 주별(해석학 Ⅰ: 15주 + 해석학 Ⅱ: 15주)로 나누어 수업 상황에 따라서, 때로는 교수의 주도적인 수업 진행을 유도하기도 하고, 때로는 예비교사들의 적극적인 수업 참여를 유도하는 방법을 사용할 수 있게 하기 위한 방책으로 다음과 같이 해석학 Ⅰ, Ⅱ의 주별 학습·지도 내용을 구분하여 실시하는 것을 제안한다(정동명·조승제, 2003; Johnsonbaugh & Pfafenberger, 1981; Gaughan, 1987; Strichartz, 1995; Wade, 1995).

실수들의 집합이 무한집합이며 하나의 공리적 체계인 수학적 체계이므로, 해석학의 본 내용을 학습·지도하기 전에 먼저 공리적 수학체계의 구성요소인 무정의 개념, 전체 집합, 집합의 대수, 관계, 연산, 추론 및 규칙, 논리적 공리, 비논리적 공리, 정의, 정리 등을 다루었으며, 특히 무한집합의 의미 파악에 주의를 기울였다.

해석학 I

1주 : 수학적 체계(mathematical system)

• 하나의 공리적 체계인 실수계의 구성 요소(무정의 개념, 전체 집합, 집합의 대수, 관계, 연산, 추론 규칙, 논리적 공리, 비논리적 공리, 정의, 정리)를 이해한다(이병수, 1992).

• 수학의 본질, 특성, 활용을 학습한다(Cournat & Robbins, 1996).

• 현대 수학의 특성 중의 하나인 무한 집합의 개념과 성질 등을 이해한다(박세희 역, 1986; Love, 1989).

◉ 지도상의 유의점

1. 실수계를 각각 공리적 입장과 구성적 입장에서 소개할 필요가 있다(정동명 · 조승제, 2003).

2. 학생들은 무한 개념에 대해 나름대로 제 1직관을 형성하고 있으므로 무한 집합에 대한 학생들의 발생적 직관을 최대한으로 보호하면서 형식적 정의를 무리없이 받아들일 수 있도록 유의하여 지도할 필요가 있다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. '점', '직선' 등은 무정의 개념이다.

2. '부등식 $2<3$'에서 기호 '$<$'는 하나의 순서관계이다.

3. '미분적분학'은 수학적 체계 중의 하나이다.

4. 초, 중, 고등학교에서 다루는 자연수 집합, 유리수 집합, 실수 집합은 각각 하나의 전체 집합이다.

5. 명제 함수 '$2x+1=5$'는 x의 값에 따라 참이거나 혹은 거짓인 명제가 된다. 따라서 $2x+1=5$가 옳은 문장이 아니라고 언급한 것(최봉대 외 6인, 2002)은 무리가 있음을 확인한다.

2주 : 집합과 함수

• 가산 무한 집합의 특성을 이해하고 수학적 귀납법을 학습한다.

• 함수의 여러 가지 개념과 특성을 이해한다.

◉ 지도상의 유의점

1. 단사함수, 전사함수의 개념을 지도시 반드시 정의역, 치역의 범위와 직접 관련이 있음을 주지시켜야 한다. 예를 들면, 함수 $f(x)=x^2$의 정의역이 $[0,\infty)$인 경우에는 f가 단사함수이지만 $(-\infty,\infty)$인 경우에는 f가 단사함수가 아니다.

2. 함수 f와 집합 연산인 합집합, 교집합, 여집합 등과의 상호 교환성(교환법칙 또는 결합법칙) 여부를 암시해 준다. 예를 들면, $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$ 또는 $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$의 성립 여부는 사실상 기호들의 교환 가능성 문제임을 암시한다. 함수에 의해서 정의역에서의 합집합 등의 연산이 치역에서도 보존된다.

3. 유리수 집합은 조밀성을 가지고 있고 자연수 집합은 그렇지 않으므로 유리수 집합 $\mathbb{Q}$의 농도와 자연수 집합의 농도는 다르다고 생각하는 경향이 많다. 따라서 학생들 스스로 유리수 집합이 가산집합임을 증명할 수 있는 전단사 함수 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$을 찾도록 유도하면 $\mathbb{Q}$의 가산성에 대한 거부감을 줄일 수 있다(Kang & Lee, 1996).

4. $f^{-1}(B)$는 역함수 f^{-1}에 대한 집합 B의 상이 아니고, 단지 B의 역상 기호임을 주지시킨다. 즉, $f^{-1}(B)$의 f^{-1}는 역함수와는 무관하다. $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$의 역상은 각각 A와 B의 역상의 합집합, 교집합, 차집합과 같다. 즉

$$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$$
$$f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$$
$$f^{-1}(A-B)=f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)$$

가 성립한다.

5. 초, 중, 고등학교에서 '함수' 개념을 어떻게 지도하고 있는가를 스스로 복습하고 확인하게 한다. 그리고 그러한 지도 내용의 연관 관계를 스스로 확인하게 한다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. 자연수 집합은 하나의 가산 무한 집합이다.

2. 수학적 귀납법은 페아노(Peano) 공리를 만족하는 자연수 집합의 성질 때문에 성립한다.

3. '규칙성과 함수' 단원이 연계 내용이다.

3주 : 실수계의 대수적 특성과 순서적 특성

• 실수 집합 $\mathbb{R}$의 대수적 특성을 이해한다.

• 실수 집합 $\mathbb{R}$의 순서적 특성을 이해한다.

◉ 지도상의 유의점

1. 자연수 집합, 유리수 집합, 실수 집합의 순으로 수 집합이 확장, 발달되었음을 여러 가지 특성을 통해서 보여준다.

2. 어릴 때부터 실수 집합과 연산 $(+, \times)$에 아무런 비판없이 길들여져 온 학생들에게 실수 집합은 단지 실수들로 이루어진 집합이 아닌 일반적인 집합이며 덧셈, 곱셈 연산도 그냥 주어진 일반적인 연산임을 이해시켜야 한다. 즉 실수계 $(\mathbf{R}, +, \times)$은 사실상 하나의 추상적인 수학적 체계이며, 실수 집합과 연산 덧셈 및 곱셈은 특별한 하나의 예에 불과함을 이해시켜야 한다.

3. 0보다 큰 수는 양수라는 것에 익숙해 있는 학생들에게 공리적 입장에서 양수 개념을 지도하는 상황을 잘 이해시켜야 한다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. 자연수 집합은 덧셈, 곱셈에 관해서 닫혀 있다.

2. 고교과정에서 다루는 함수들은 사실상 정의역, 변역이 모두 실수들의 집합이다.

4주 : 실수계의 완비성

• 유리수 집합의 조밀성, 무리수 집합의 조밀성 그리고 실수 집합의 조밀성을 학습한다.

• 상한과 하한, 유리수 집합의 Cauchy 완비화 등을 이해한다.

• 상한과 하한의 관계성을 학습한다.

• 임의 실수 x에 수렴하는 증가하는 유리수열 $\{r_n\}$이 존재함을 학습한다.

◉ 지도상의 유의점

1. 상한[하한]과 최대값[최소값]의 차이를 이해시킨다.

2. 학생들 스스로 예를 만들어서 상한, 하한을 찾도록 지도하여 상한, 하한의 개념에 익숙하도록 지도한다.

3. 유리수 집합의 조밀성으로 인해 주어진 실수에 수렴하는 증가하는 유리 수열이 존재함을 다음의 예를 통해 이해시킨다.

(1) 무리수 e는 유리수열

$\langle 2, 2.7, 2.71, 2.718, 2.7182, \cdots \rangle$의 극한이다.

(2) 무리수 π는 유리수열

$\langle 3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \cdots \rangle$의 극한이다.

4. $a \neq 0$이고 m, n이 자연수일 때 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$이 성립하는 것을 m, n이 정수일 때, m, n이 유리수일 때, m, n이 실수일 때도 성립함을 확인시킨다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. 지수가 실수까지 확장될 수 있음을 직관적으로 이해하도록 하게 한다(교육부, 2001).

2. 지수법칙이 지수가 유리수일 때도 성립함을 이해하게 하고, 지수가 실수일 때는 지수의 법칙을 지수가 유리수일 때의 지수의 법칙으로 이해하게 한다(교육부, 2001).

3. 상한과 하한은 각각 최대값, 최소값의 확장된 개념이다.

4. 고교 과정에서 다루는 모든 수렴하는 수열이 사실상 Cauchy 수열인 이유는 완비성을 가진 실수열이기 때문이다.

5주 : 실수계의 위상성

• 절대치 함수의 특성, 위상, 근방, 개집합, 폐집합, 콤팩트 집합, 연결집합, 집적점 등을 학습한다(장영식, 2003; Eisenberg, 1974).

◉ 지도상의 유의점

1. 절대치 함수의 특성을 이해시킨다.

2. '위상'이란 연산 $\cup$과 $\cap$에 의해 닫혀있는 하나의 '집합족'임을 주지시킨다.

3. 개집합의 정의를 이용하여 폐집합을 정의하거나 혹은 폐집합의 정의를 이용하여 개집합을 정의하는 것은 공리적으로 전개하는 과정은 다르지만, 똑같은 수학적 체계인 하나의 위상을 이룬다는 것을 주지시킬 필요가 있다.

4. 콤팩트(compact) 집합 A의 정의를 이용하여 A가 콤팩트 집합이 아닌 필요충분조건을 주지시킬 필요가 있다.

5. $[a, b]$의 연결성(connectedness)이 중간값 정리에 이용된다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. 개구간 (a, b)는 특별한 개집합이며, 폐구간 $[a, b]$는 특별한 폐집합이고 또한 콤팩트 집합이다.

2. 사실상 중·고등학교 과정에서 기본적으로 다루는 영역인 9개의 구간 $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$, (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ 만이 연결집합이다.

3. 실수계 $\mathbb{R}$의 멱집합(power set)은 하나의 '위상'이다.

4. 방정식 $x^2-2=0$는 구간 $[1,2]$에서 근을 갖지만 집합 $\mathbb{Q}\cap[1,2]$에서는 근을 갖지 않는다. $\mathbb{Q}\cap[1,2]$는 연결집합이 아니기 때문이다.

6주 : 수열과 극한

• 극한의 정의를 학습하고, 그 특성을 조사한다.

• 수렴하는 수열들의 집합이 벡터 공간이 됨을 이해한다.

◉ 지도상의 유의점

1. 수열은 정의역이 자연수 집합이고 변역이 주어진 전체집합임을 확인시킨다.

2. 수렴하는 수열의 의미, 활용 가치를 언급할 필요가 있다.

3. 수렴하는 수열들의 집합이 하나의 벡터 공간임을 먼저 확인한 후, 그 원소인 수렴하는 수열들의 특성을 다루는 학습 지도가 의미를 가질 수 있음에 유의한다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. 수렴하는 수열들의 합(차, 곱, 상)은 수렴한다.

2. 수렴하는 수열들의 극한의 합(차, 곱, 상)은 원수열들의 합(차, 곱, 상)의 극한과 같다.

7주 : 극한의 일반화

• 일반화된 극한 개념인 상극한과 하극한의 특성을 이해한다.

• 상극한과 하극한의 관계성을 학습한다.

◉ 지도상의 유의점

1. 상극한, 하극한 개념을 $\varepsilon-\mathrm{N}$ 용법으로 지도할 때 극한 개념의 $\varepsilon-\mathrm{N}$ 용법과 비교해서 관련시켜 이해시킨다.

2. 모든 수열이 수렴하지는 않지만 상극한과 하극한은 항상 존재한다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. 수열 $(-1)^n$의 극한은 존재하지 않지만 상극한은 1, 하극한은 -1이다.

2. 수열 $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$의 상극한과 하극한은 0이다. 따라서 극한은 0이다.

8주 : 중간 시험 (예상 문제)

• 1주~7주간의 학습 내용을 확인 및 복습한다.

9주 : 수열의 수렴과 수렴 판정

• 부분수열, Bolzano -Weierstrass 정리, Cauchy 수열 등의 개념 이해와 함께 특성을 학습한다.

• 수열의 수렴 판정법을 이해한다.

◉ 지도상의 유의점

1. 부분수열의 개념을 정의역과 변역이 자연수 집합인 함수와 수열의 합성함수임을 주지시킨다.

2. 수열의 수렴성은 중요한 내용이므로, 수렴하지 않는 원래 수열이 수렴하는 부분수열을 가지는 조건을 찾는 것은 매우 중요하다. 원 수열에 유계성이 보장되면, 수렴하는 부분수열을 잡을 수 있으므로 최소한 원 수열의 유계성은 보장되어야 한다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. 유계 수열 $\langle(-1)^n\rangle$은 수렴하지 않으나 부분수열 $\langle 1\rangle$과 $\langle -1\rangle$은 수렴한다. 볼짜노-와이어스트레스 정리가 바로 적용된 예이다.

10주 : 급수의 수렴과 수렴 판정법

• 무한 급수의 수렴성과 수렴 여부의 판정법을 학습한다.

◉ 지도상의 유의점

1. 무한급수의 수렴의 정의가 수열의 수렴의 정의에서 나온다는 것을 주지시켜야 한다.

2. 따라서 무한급수의 수렴 판정 역시 부분합 수열의

수렴 판정에 연유하고 있음을 주지시킨다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. 초월함수인 $\sin x$, $\cos x$, e^x 등이 무한급수로 표현된다.

2. 고등학교에서 무한 급수 판정법을 배운다.

3. 특별한 언급이 없는 한, $y=\sin x$의 정의역은 실수들의 집합 $\mathbb{R}$ 이다.

11주 : 함수의 극한

• 함수의 극한 및 극한 정리, 함수의 극한 개념의 확장 등을 학습한다.

• 극한이 존재하는 함수들의 집합이 벡터 공간임을 이해한다.

◉ 지도상의 유의점

1. 극한이 존재하는 함수들의 집합이 하나의 벡터 공간임을 먼저 보인 후, 극한이 존재하는 함수들의 특성을 확인할 필요가 있다.

2. 다루고자 하는 함수의 정의역이 집합일 때는 집적점의 의미를 주지시킬 필요가 있다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. 수렴하는 두 함수의 합(차, 곱, 상)은 수렴한다.

2. 수렴하는 두 함수의 극한의 합(차, 곱, 상)은 두 함수의 합(차, 곱, 상)의 극한과 같다.

12주 : 함수의 연속성

• 연속 함수의 특성, 응용을 학습한다.

• 연속 함수들의 공간의 특성을 이해한다.

◉ 지도상의 유의점

1. 한 점에서 함수의 연속성을 먼저 다룬 후 정의역에서 연속성을 다룬다.

2. 유계 폐구간 $[a,b]$에서 정의된 연속함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$은 유계이다.

3. 연속함수 f에 의한 유계 폐구간 $I=[a,b]$의 상 $f(I)=[\inf f(I), \sup f(I)]$도 유계 폐구간이다. 일반적으로 $f([a,b])=[f(a),f(b)]$이 성립하지 않는다. 예를 들면, $I=[0,2\pi]$, $f(x)=\sin x$일 때, $f([0,2\pi])=[-1,1]\neq[0,0]=[f(0),f(2\pi)]$이다.

4. 함수 f가 점 $x=a$에서 연속이면 $\lim_{x\to a} f(x)=f(\lim_{x\to a} x)$이므로 함수 f와 기호 lim가 서로 상호 교환 가능함을 주지시킨다. 즉, 연속이란 정의역에서의 수열의 극한이 함수 f에 의해 보존되는 것이다.

5. 한 점 $x=a$에서 연속인 함수들의 집합이 하나의 벡터 공간임을 확인시킨다.

6. 연속함수들의 집합이 벡터공간임을 보인다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. 고교과정에서 다루는 평균치 정리, Rolle의 정리 등은 유계 폐구간 $[a,b]$에서 함수의 연속성을 전제로 한다.

2. 연속함수 $f(x)=\frac{1}{x}$는 비유계 개구간 $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$와 유계 개구간 $B=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<1\}$에서는 유계가 아니다. 그러나 비유계 폐구간 $C=\{x\in\mathbb{R}\mid 1\leq x\}$에서는 유계이다.

13주 : 평등연속과 근사

• 평등 연속성의 특성, 근사 정리(Weierstrass 근사 정리 및 Bernstein 근사 정리)를 학습한다.

◉ 지도상의 유의점

1. 평등 연속성의 활용 가치에 중점을 두고 점별 연속성과 비교하면서 지도해야 한다.

2. 함수 f가 주어진 영역에서 평등 연속이 아닌 것과 동치인 조건을 특별이 지도할 필요가 있다.

3. 같은 함수일지라도 정의역에 따라 평등연속일 수도 있고, 아닐 수도 있음을 확인시킨다(예를 들면, $y=\frac{1}{x}$은 $(0,1]$에서 평등연속이 아니다. 그러나 $[\varepsilon,1]$, $0<\varepsilon<1$에서는 평등연속이다.).

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. 상수함수는 정의역에 관계없이 항상 평등연속인 함수이다.

14주 : 함수의 단조성과 응용

• 증가 및 감소 함수의 특성을 학습한다.

• 연속 역정리(continuous inverse theorem)를 학습한다.

◉ 지도상의 유의점

1. 연속성(미분 가능성), 단조성, 볼록성을 구별하여 지도한다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. 도함수의 증감을 이용해서 극대값, 극소값을 추적한다.

15주 : 기말 시험 (예상 문제)

• 9주~14주간의 학습 내용을 확인 및 복습한다.

해석학 II

1주~2주 : 함수의 미분가능성과 미분의 응용

• 함수의 미분가능성과 미분의 응용을 학습한다.

• Taylor 정리, 볼록 함수, Newton 방법 등을 이해한다.

◉ 지도상의 유의점

1. 미분가능한 함수들의 집합이 하나의 벡터공간임을 보이면, 좀 더 넓은 사고로 함수의 미분가능성을 다룰 수 있다.

2. $\frac{d}{dx}(kf(x)+g(x))=k\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$이므로 미분기호 $\frac{d}{dx}$는 일종의 선형함수이다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. 로피탈 법칙의 활용이 관련된다.

2. 최적화 이론, 확률론, 함수해석학, 수치해석학, Fourier 해석학 등에서 많이 활용되는 함수 $f: I \to \mathbb{R}$의 볼록성 개념은 고교과정에서 다루는 '아래로 볼록(위로 오목)'과 같은 의미이다.

3주~4주 : Riemann 적분

• 리만 적분가능성, 리만 적분의 특성, 미적분의 기본정리, 극한으로서의 적분을 학습한다.

• 유계 폐구간 $[a, b]$에서 단조인 함수는 적분 가능함을 학습한다.

• 근사 적분을 소개한다.

◉ 지도상의 유의점

1. 적분의 정의가 유계폐구간 $[a, b]$ 대신에 compact 집합에서도 가능함을 이해시킬 필요가 있다.

2. 단조 함수가 적분 가능함을 예를 들어가면서 설명할 필요가 있다.

3. 보통 고교과정에서는 유계 폐구간 $[a, b]$에서 정의된 연속함수의 적분가능성을 논하고, 대학과정에서는 유계 폐구간 $[a, b]$에서 유계함수의 적분가능성을 논한다. 함수가 유계 폐구간 $[a, b]$에서 연속이면, 유계이지만 그 역은 보장하지 못한다. 따라서 유계 폐구간 $[a, b]$에서 정의된 연속함수들의 집합은 유계함수들의 집합의 진부분집합이다. 그러므로 대학과정에서 다루는 적분의 범위가 고교과정의 그것보다 훨씬 넓다.

4. 유계 폐구간 $[a, b]$ 위에서 유계인 함수의 적분을 논할 경우에는, 적분의 존재성을 확인함과 동시에 적분의 값을 구하는 것이 주요 목적이다.

5. 유계 폐구간 $I=[a, b]$상에서 정의된 연속함수의 적분은

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k')\Delta x_k$$

로 정의하고 유계함수의 적분은

$$\int_a^b f(x)dx = \sup\{L(p,f) \mid p \in \mathscr{P}(I)\}$$

$$(=\inf\{U(p,f) \mid p \in \mathscr{P}(I)\})$$

로 정의함을 구별하여 지도할 필요가 있다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. 고교과정에서 다루는 적분은 리만 적분이다.

2. 반지름이 a인 원은 실질적으로 장축, 단축이 a인 타원이다(원의 넓이 πa^2, 장축이 a, 단축이 b인 타원의 넓이는 πab).

5주 : 특이 적분과 유계 변동 함수

• 여러 종류의 특이 적분을 다룬다.

• 유계 변동 함수의 특성을 학습한다.

◉ 지도상의 유의점

1. 유계 함수와 유계 변동 함수의 관계성, 응용성 등

을 예를 들어 비교하면서 학습 지도할 필요가 있다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. 고교과정에서 다루는 함수의 유계성은 유계 변동 함수를 학습하기 위한 기본 내용이다.

6주~7주 : Riemann-Stieltjes 적분

• 리만-스틸체스 적분가능성을 학습하고, 리만-스틸체스 적분의 특성을 이해한다.

◉ 지도상의 유의점

1. 리만-스틸체스 적분이 사실상 리만 적분의 일반화라는 것에 초점을 맞추어 설명하되 형식적 정의에 바탕을 두기보다는 직관적인 이해를 갖게 한다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. $\dfrac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$이다. 이것은 $d(\sin x) = \cos x \cdot dx$를 의미하므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, d(\sin x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x \cdot dx$$

이다.

8주 : 중간 시험 (예상 문제)

• 1주~7주간의 학습 내용을 확인 및 복습한다.

9주 : 함수열과 함수항 급수의 평등 수렴성

• 함수열의 점별 수렴과 평등 수렴의 특성을 이해한다.

• 함수항 급수의 평등 수렴을 중점적으로 학습한다. 특히, 미분 가능한 함수열의 평등 수렴에 의한 극한 함수의 미분 가능성과 적분 가능한 함수열의 평등 수렴에 의한 극한 함수의 적분 가능성을 이해한다.

◉ 지도상의 유의점

1. 평등 수렴성이 점별 수렴성보다 더 활용성이 있음을 다양한 예를 들어가면서 설명할 필요가 있다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. 수렴하는 수열은 사실상 평등 수렴하는 상수 함수열이다.

10주 : $\mathbb{R}^2$ 공간의 대수적 특성

• $\mathbb{R}^2$의 대수적 구조, $\mathbb{R}^2$ 공간에서의 거리 개념을 학습한다.

◉ 지도상의 유의점

1. $\mathbb{R}^2$의 대수적 특성을 지도시 $\mathbb{R}$의 대수적 특성의 확장임을 이해시킨다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. Pythagoras 정리, 평행사변형법칙 등이 이에 해당된다.

2. 최적화 문제(김원경 외 2인, 2002)에서 제약조건

$$\begin{cases} 20x + 5y \le 400 \\ 15x + 10y \le 450 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

을 만족하는 (x, y)들의 집합은 유계이고, 폐(closed)이며 또한 볼록이다.

11주 : $\mathbb{R}^2$의 위상적 특성

• $\mathbb{R}^2$의 위상적 개념을 중심으로 개집합과 폐집합의 특성을 학습하고 벡터열과 compact 집합의 특성을 학습한다.

◉ 지도상의 유의점

1. 유한 차원 공간에서는 compact 집합이 유계 폐집합이지만 모든 추상 공간에서 다 그런 것은 아님을 언급한다.

2. $\mathbb{R}^2$의 위상적 개념은 $\mathbb{R}$의 위상적 개념의 확장임을 이해시킨다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. 유계 폐구간 $[a, b]$와 $[c, d]$의 곱 $[a, b] \times [c, d]$는 $\mathbb{R}^2$에서는 compact 집합이다.

2. 고등학교 실용수학에서 다루는, 선형계획법의 제약조건을 만족하는 영역은 모두 compact 집합이다.

12주 : 이변수함수의 극한과 연속성

• 이변수함수의 극한, 연속성 등을 학습한다.

◉ 지도상의 유의점

1. 이변수함수의 극한을 다룰 때 고정점 (a, b)에 수렴하는 순서쌍들의 열 $\langle(x_n, y_n)\rangle$의 수렴 방향은 무한이 많음을 일변수함수의 우방향, 좌방향의 2개 방향과 구별하여 이해시킨다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. 이변수함수의 최대치·최소치를 보장하는 기본적인 집합은 compact 집합이고, 정의된 함수는 연속함수이다.

2. 일변수함수에 대한 중간값 정리가 유계 폐구간 $[a, b]$의 연결성(connectedness)을 이용하는 것처럼 2변수함수에 대한 중간값 정리도 유계 폐구간 $[a, b]$와 $[c, d]$의 곱 $[a, b]\times[c, d]$의 연결성을 이용하고 있다.

13주~14주 : 이변수실가함수의 미분가능성, 이상적분의 평등수렴성

• 이변수실가함수의 편미분과 편적분을 학습한다.

• 이상적분의 평등 수렴성을 학습한다.

◉ 지도상의 유의점

1. 이변수함수의 편적분의 극한과 극한의 편적분이 같을 때의 최소한의 조건이 무엇인가에 중점을 두고 지도한다.

2. 이변수함수 $f(x, y)$의 x에 대한 적분 후의 y에 대한 미분과 y에 대한 편미분 후의 x에 대한 적분이 같기 위한 최소한의 조건의 지도에 중점을 둔다.

◉ 제 7차 교육 과정과의 연계성

1. 이변수 함수의 편미분은 대학과정에서 처음으로 소개되는 내용이다.

15주 : 기말 시험 (예상 문제)

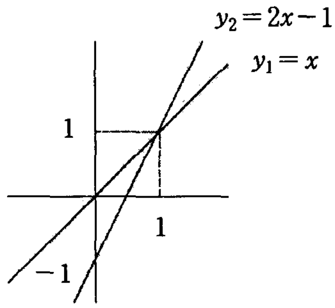
• 9주~14주간의 학습 내용을 확인 및 복습한다.

Ⅳ. 학습·지도의 예(例) : 부동점과 근사해

해석학의 부동점 및 근사해와 관련된 내용을 학습과 지도의 예로 제시한다.

다음의 예 1은 중학교 7-가 수준의 일차방정식 문제이다.

예 1. 방정식 $x=2x-1$의 근은 <그림 4-1>에서 처럼 두 직선 $y_1=x$와 $y_2=2x-1$이 만나는 점의 x좌표이다.



<그림 4-1>

중등수학에서는 두 함수의 정의역에 관한 조건이나 함수의 특성에 관해 특별한 제한을 제시하지는 않지만, 두 함수 y_1과 y_2는 정의역 $\mathbb{R}$에서 연속인 함수이다. 또는 $x=1$을 포함한 유계 폐구간, 예를 들면, $[0,2]$에서 연속이다.

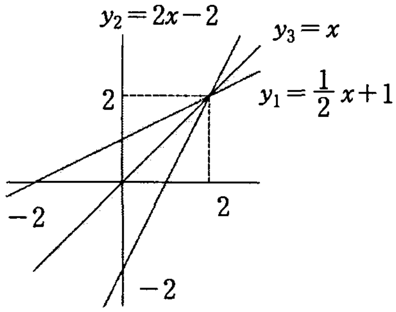
또한 연립방정식

$$\begin{cases} y_1=\frac{1}{2}x+1 \\ y_2=2x-2 \end{cases}$$

을 동시에 만족하는 x의 값은 <그림 4-2>에서 처럼 세 직선

$$\begin{cases} y_1=\frac{1}{2}x+1 \\ y_2=2x-2 \\ y_3=x \end{cases}$$

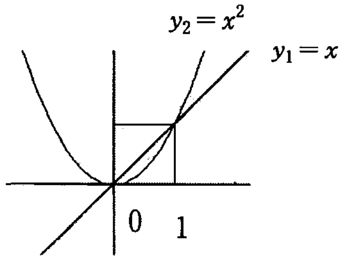
이 공동으로 만나는 점의 x좌표이다.



<그림 4-2>

이 연립방정식의 경우에도 마찬가지로 세 함수의 정의역이나 함수의 특성에 관해 특별한 언급이 없지만 세 함수 모두 $x=2$를 포함하는 유계 폐구간, 예를 들면 $[0, 4]$에서 연속이다.

방정식 $x=x^2$의 근은 <그림 4-3>에서 처럼 직선 $y_1=x$와 곡선 $y_2=x^2$과의 교점의 x좌표인 $x=1$이다.



<그림 4-3>

위의 두 함수도 마찬가지로 $x=1$를 포함하는 어떤 구간에서 연속이다.

일반적으로 방정식 $f(x)=x$를 만족하는 x의 값을 함수 f의 부동점(fixed point)이라고 하며, 이 경우의 부동점은 연립방정식

$$\begin{cases} y_1=x \\ y_2=f(x) \end{cases}$$

의 교점의 x값이다.

또한, 방정식 $f(x)=g(x)=x$를 만족하는 x의 값을 함수 f와 g의 공통 부동점(common fixed point)이라고 하며, 이 경우의 공통 부동점은 연립방정식

$$\begin{cases} y_1=x \\ y_2=f(x) \\ y_3=g(x) \end{cases}$$

의 교점의 x의 값이다.

앞의 연립방정식

$$\begin{cases} y_1=x \\ y_2=2x-1 \end{cases}$$

을 만족하는 $x=1$은 함수 $f(x)=2x-1$의 부동점이며, 연립방정식

$$\begin{cases} y_1=\frac{1}{2}x+1 \\ y_2=2x-2 \\ y_3=x \end{cases}$$

을 동시에 만족하는 $x=2$는 두 개의 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x+1$과 $g(x)=2x-2$의 공통 부동점이다.

또한 연립방정식

$$\begin{cases} y_1=x \\ y_2=x^2 \end{cases}$$

의 두 근 $x=1$과 $x=0$는 함수 $f(x)=x^2$의 부동점이다. 이 경우의 부동점은 앞의 두 경우와 달리 두 개이다. 반면, 변환함수 $f(x)=x+a$ $(a\neq 0)$는 부동점을 가지지 않는다.

사우더 Schauder는 부동점의 존재성과 관련된 그의 논문에서 다음과 같은 정리를 발표했으며(Schauder, 1930) 30여년 뒤 브라우더 Browder가 이를 좀 더 일반화시켰다(Browder, 1967).

정리 1. 집합 K가 Banach 공간 X의 부분집합이라고 하자.

(i) K가 compact이고 볼록(convex)이며,

(ii) 함수 $f: K\rightarrow X$가 연속이라고 하자.

그러면 함수 f는 K에서 부동점을 가진다.

[예 1]에서 다룬 세 함수는 모두 Schauder의 정리 1 (Schauder, 1930)의 가정을 만족시킨다. 부동점 $x=1$, 0, 2 등을 포함하는 유계 폐구간으로 $K=[-2,5]$을 잡으면,

첫째, K는 Banach 공간인 $\mathbb{R}$의 compact이고 볼록인 부분집합이다.

둘째, 앞에서 소개한 모든 함수는 $K=[-2.5]$에서 연속인 실가 함수이다.

따라서 함수 $y=2x-1$, $y=\frac{1}{2}x+1$, $y=x^2$, $y=2x-2$는 모두 부동점을 가지는 것을 알 수 있다.

참고. 미분방정식의 해에 수렴하는 근사해열을 구해서 그 극한인 해를 구하는 방법은 부동점 정리를 사용해서 해를 구하는 위상적(位相的) 방법과 구별된다. Brown(1993)은 다음과 같은 Cauchy-Peano의 존재 정리

"함수 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$가 점 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$의 근방에서 연속일 때 어떤 양수 α가 존재해서 초기치 미분방정식

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

를 만족하는 연속함수가 구간 $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$에 유일하게 존재한다."

에서 근사해열을 추적하는 방법과 싸우더 Schauder의 부동점 이론을 이용한 위상적 방법을 소개하고 있다.

예 2. 수열 $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$의 극한이 0이라는 내용은 중·고 교과정의 학생들에게는 당연한 사실로 인지되고 있다.

수열 $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$은 완비성을 가진 실수계 $\mathbb{R}$에서 Cauchy 수열이므로 다음의 Cauchy 수렴 기준에 의해 극한이 존재함이 보장된다.

정리 2. Cauchy 수렴 기준

실수열 $\langle x_n \rangle$에 대해 다음의 두 명제는 서로 동치이다;

(i) 수열 $\langle x_n \rangle$이 수렴한다.

(ii) 수열 $\langle x_n \rangle$이 Cauchy 수열이다.

예 3. 수열 $\left\langle \frac{1}{\sqrt{n}} \right\rangle$은 0에 수렴한다. 다음의 단조 수렴정리를 지도할 때 수열 $\left\langle \frac{1}{\sqrt{n}} \right\rangle$이 감소하고 아래로 유계임으로 단조 수렴 정리를 적용할 수 있음을 설명한다.

정리 3 (단조 수렴 정리). 아래로 유계인 감소 수열 $\langle x_n \rangle$은 수렴하며 그 극한은 $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}$이다.

예n4. 실수계 $\mathbb{R}$에서 얻어진 수열 $\langle x_n \rangle$을 $x_1=1$, $x_2=2$, $x_n=\frac{1}{2}(x_{n-2}+x_{n-1})$ $(n>2)$로 정의하면,

첫째, 수학적 귀납법을 이용하여 수열 $\langle x_n \rangle$이 Cauchy 수열임을 확인한다.

둘째, 실수계 $\mathbb{R}$이 완비성을 가진 위상 벡터공간이므로 Cauchy의 수렴 기준에 의해 수열 $\langle x_n \rangle$의 극한이 존재함이 보장된다.

셋째, 수열 $\langle x_n \rangle$의 극한을 x라고 할때 관계식 $x_n=\frac{1}{2}(x_{n-2}+x_{n-1})$의 양변에 극한을 취함으로써 항등식 $x=\frac{1}{2}(x+x)$를 얻을 수 있다. 이 식은 극한 x를 구하는데 전혀 도움이 되지 않으므로 첨자가 홀수인 수렴하는 부분수열 $\langle x_{2n-1} \rangle$을 염두에 두면 다음의 식

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-1}} \\ &= 1+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \end{aligned}$$

을 얻을 수 있다. 따라서 양변에 극한을 취하여 수열 $\langle x_n \rangle$의 극한 $x=\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = 1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$을 얻는다.

참고. 생활 속의 Fibonacci 수열

위의 예와는 달리 다음의 관계식을 가지는 수열

$$x_1=1,\ x_2=1,\ x_n=x_{n-2}+x_{n-1}\quad (n>2)$$

은 구체적으로

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ⋯

으로 셋째 항 이후의 항들의 값이 앞의 두 항의

합인 수열이다. 피보나치 수열로 불리는 이 수열은 $+\infty$로 발산함을 알 수 있다.

그러나 이러한 피보나치 수열의 앞의 항에 대한 바로 뒤의 항의 비율에 의해서 생긴 새로운 수열

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \cdots$$

은 수렴하며, 그 극한은 BC카드, A4용지 등과 같은 황금직사각형에 활용되는 황금비율인 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

피보나치 수열은 파스칼의 삼각형, 이항정리와 확률 그리고 자연과 식물, 흥미로운 수학적 계략, 수학적 항등성 등과 관계가 깊으며 실제 우리의 자연 속에서 쉽게 발견할 수 있다.

정의 1. 수열 $\langle x_n \rangle$이

$$|x_{n+2}-x_{n+1}| \le k|x_{n+1}-x_n|, \quad n\in \mathrm{N}$$

을 만족하는 상수 $0<k<1$가 존재하면 수열 $\langle x_n \rangle$은 축소수열(contractive sequence)라고 한다.

정리 4. 축소수열은 Cauchy 수열이다. 따라서 수렴한다.

예 5. 2차방정식 $2x^2-5x+2=0$의 근을 구하는 방법은 다양하다. 그러나 $x^3-7x+2=0$의 근을 구하는 것은 2차방정식의 근을 구하는 방법으로는 불가능하다. 그러나 우선 근의 존재성과 존재 범위를 확인할 수 있다.

첫째, $f(x)=x^3-7x+2$라 하면 $f(0)=2$이고 $f(1)=-4$이다. 따라서 구간 $(0,1)$안에 적어도 한 근이 존재함을 알 수 있다. 그리고 $f(x)=x^3-7x+2$가 구간 $(0,1)$에서 연속이므로 중간값 정리에 의해 $0\in(-4,2)$에 대해 $f(x)=0$를 만족하는 x가 구간 $(0,1)$ 상에 존재함이 보장된다.

둘째, $x^3-7x+2=0$를 $x=\frac{1}{7}(x^3+2)$로 변형하여 축소수열 $\langle x_n \rangle$을 얻는 방법을 강구할 수 있다. 먼저 초항 x_1을 구간 $(0,1)$에서 잡고 반복수열 $x_{n+1}=\frac{1}{7}(x_n^3+2)$ $(n\ge 1)$을 정의하면 수열 $\langle x_n \rangle$은 개구간 $(0,1)$에 있는 수열임을 확인한다. 또한

$$\begin{aligned}|x_{n+2}-x_{n+1}| &= \frac{1}{7}|(x_{n+1}^3+2)-(x_n^3+2)| \\ &= \frac{1}{7}|x_{n+1}-x_n|\,|x_{n+1}^2+x_{n+1}x_n+x_n^2| \\ &\le \frac{3}{7}|x_{n+1}-x_n|\end{aligned}$$

이 되어 $\langle x_n \rangle$은 축소수열이 된다.

셋째, 축소수열 $\langle x_n \rangle$이

$$|x_m-x_n| \le \frac{k^{n-1}}{1-k}|x_2-x_1| \quad (n>m)$$

을 만족하는 Cauchy 수열이 되어 $\langle x_n \rangle$의 극한이 존재함을 또 다시 보장한다.

넷째, $x_{n+1}=\frac{1}{7}(x_n^3+2)$의 양변에 극한을 취하고 그 극한을 r이라고 하면 r은 방정식 $x^3-7x+2=0$의 한 근으로 $(0,1)$ 상에 존재한다. 정확한 근을 알 수 없으므로 근사근을 구하고자 초항을 $x_1=\frac{1}{2}$이라 두고

$$|x_n-r| \le \frac{k^{n-1}}{1-k}|x_1-x_2| = \frac{1}{20}\frac{3^{n-1}}{7^{n-2}}$$

을 얻어 r의 근사값과 오차 범위를 얻는다.

V. 결 론

본고에서는 대학교 해석학의 학습 지도 내용과 초·중·고등학교에서의 해석 영역간의 관련성을 확인하고 초·중·고등학교에서의 해석 영역이 어떻게 대학교의 해석학의 학습·지도 내용으로 확장되고, 전개되어 나가는가를 중심으로 총 30주별의 지도 내용을 지도상의 유의점 및 제 7차 교육과정과 연계하여 다루었다.

예를 들면, 왜 유계 폐구간 $[a,b]$을 바탕으로 연속함수, 미분가능한 함수, 또는 적분가능한 함수에 관한 이론의 전개가 이루어지고 있는가를 언급할 필요가 있음을 지적하고 있다. 또한, 이러한 구간의 특성이 함수 해석학, 비선형 해석학 등의 응용 분야에서 추상 공간의 기본틀이라고 할 수 있는 유계성, 폐성, 볼록성, 연결성 또는 콤팩트성을 가진 부분집합으로 일반화되어 추상 공간에서의 벡터 함수들의 연속성, 미분가능성, 적분가능성 등과 관련된 많은 중요한 정리와 이론에 활용되고 있음을 보이고 있다.

이러한 맥락에서 볼 때, 예비교사는 중·고등학교에서 학습·지도하고자 하는 내용보다 훨씬 깊고 넓게 학습·지도를 할 준비가 되어 있어야 한다. 예를 들면, 실수계 $\mathbb{R}$보다 더 일반적인 추상공간인 Hilbert 공간에서 폭 넓은 이론을 학습할 필요가 있다. 마찬가지로 수열의 극한을 다룰 때는 좀 더 일반적인 상극한, 하극한 개념에 익숙해야 하며, 연속 개념을 다룰 때 상한 연속, 하한 연속의 개념에 익숙해야 한다.

한편 바람직한 해석 교육을 위해서는 교사들이 무엇보다도 먼저, 여러 가지 종류의 함수들의 집합에 대한 시스템을 숙지해야 함을 언급했다. 즉 연속 함수들의 집합, 유계 함수들의 집합, 유계 변동 함수들의 집합, 단조 함수들의 집합, 극한을 갖는 수열들의 집합 또는 극한을 갖는 함수들의 집합, 미분가능한 함수들의 집합, 적분가능한 함수들의 집합 등의 구조성과 그들간의 관계성을 다루었다. 연속인 함수와 수열의 극한과의 관계, 평등함수열의 극한과 미분과의 관계, 평등함수열의 극한과 적분과의 관계 또는 단조 함수를 이용한 유계 변동 함수의 표현, 등이 그 예이다.

전반적으로 본고에서는 실수계 $\mathbb{R}$의 대수적 성질, 전순서적 성질, 위상적 성질을 바탕으로 실수열의 수렴성과 함수열의 수렴성 등을 중심으로 해석학의 학습·지도 방향을 제시했으며 완비성을 가지고 있는 실수계 $\mathbb{R}$에서는 모든 Cauchy 수열이 수렴하는 것을 기본으로 해석학의 내용을 다루고 있다.

미적분학의 학습·지도에서 가장 중요한 것은 공간에 대한 직관성이며, 해석학의 학습·지도에서 가장 본질적인 것은 형식적인 사고이다. 공간에 대한 직관성은 미적분학의 경우에는 실선에 대한 직관성을 의미하며 실선에 대한 직관성의 발달은 완비성 개념이나 수열의 극한 또는 함수의 연속성을 이해하는데 크게 도움이 된다. 또한 유계 폐구간과 연결성 개념에 대한 이해는 연속성에 대한 형식적 사고를 직관성에 관계지워주는 기본적인 내용이다.

교수는 예비교사들이 학습·지도현장에서 미적분학 내용을 보람있게 잘 지도할 수 있도록 장기적인 계획을 세워 미적분학에 대한 직관적인 접근과 해석학에 대한 형식적인 접근을 잘 배합시켜 해석학을 지도해야 한다. 즉 미적분학의 근본인 직관적인 사고를 최대한으로 이용하여 해석학의 추상적이고 형식적인 체계의 이해를 돕기 위해 미적분학 스키마를 해석학 스키마에서 잘 정제시켜야 한다. 또한 공간적인 직관력을 발전시키기 위해서는 먼저 기하학적 입장에서 미적분학을 지도해야하므로 교수는 해석학의 학습·지도에서 이점을 간과해서는 안된다. 그리고 모순을 이용한 증명과 같은 극히 형식적인 증명을 지도하기 위해 단순 추론 또는 간단한 복합 추론에 먼저 익숙하도록 지도해야 한다.

결론적으로 미적분학이 공간에 관한 직관을 포함한 구체적인 경험에 의한 직관성을 최대한 활용하고 있는 점을 감안하여, 해석학의 학습·지도시에는 전 단계에서는 미적분학의 직관적인 것과 해석학의 형식적인 것을 병행하여 학습·지도를 하고 후 단계에서는 완전한 형식적 사고를 학습·지도하여 해석학에 대한 추상적이고 논리적인 식견을 갖도록 해야 한다.

참 고 문 헌

교육부 (2001). 고등학교 교육과정 해설, 서울: 대한교과서주식회사.

김원경 외 2인 (2002). 실용수학, 서울: 범문사.

박세희 역 (M. Cline 저) (1986). "수학의 확실성", pp.368-370, 민음사.

신현용 (2003). 교사 양성 대학 수학교육과 교육 과정 및 교수-학습 방법 개발에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **42(4)**, pp.431-452, 서울: 한국수학교육학회.

이병수 (1992). 수학의 이해, 경성대학교 출판부.

장영식 (2003). 위상수학 기초론, 서울: 경문사.

정동명·조승제 (2003). 실해석학 개론, 서울: 이우출판사.

최봉대 외 6인 (2002). 수학 10-가, 서울: (주)중앙교육진흥연구소.

Browder, F. E. (1967). *A new generalization of the Schauder fixed point theorem*, Math. Annalen **174**, pp.285-290.

Brown, R. F. (1993). *A Topological Introduction to Nonlinear Analysis*, Birkhäuser, Boston.

Cohen, A. (2001). *Two reactions to the mathematical eduaction of teachers*, Notices of the AMS, pp.985-988, American Mathematical Society.

Cournat, R. & Robbins, H. (Contributor) (1996). What is Mathematics?) : *An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford University Press.

Eisenberg, M. (1974). *Topology*, Holt, Rinehart and Winston, Inc. New York.

Ernest P. (1989). *Philosophy, Mathematics, and Education.*, Int. J. Math. Edu. Sci. Tech. **20(4)**.

Gaughan, E. D. (1987). *Introduction to Real Analysis*, Brooks/Cole Publishing Company California.

Gavalas, D. (2000). *Study of the 'teaching system' according to systems theory*. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol **31(2)**, pp.261-268.

Johnsonbaugh, R. & Pfaffenberger (1981). *Foundations of Mathematical Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York.

Kang, M. K. & Lee, B. S. (1996). *A discussion on the countability of the set of rational numbers*; A case study, Proceedings of the Seventh Southeast Asian Conference on Mathematics education, pp.239-250.

Krantz, S. G. (2001). *Two reactions to the mathematical eduaction of teachers*, Notices of the AMS, pp.989-991, American Mathematical Society.

Lloyd, G. M. (1999). *Two teachers' conceptions of a reform-oriented curriculum*: Implications for mathematicst teacher development. Journal of Mathematics Teacher Education **2**, pp.227-252.

Love, W. P. (1989). "*Infinity ; The twilight zone of mathematics.*", Math. Teacher **82**, pp. 284-292.

Mason, J. (2000). *Asking mathematical questions mathematically*. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. **31(1)**, pp.97-111.

Richards, J. (1991). *Mathematical discussions*. In E. von Glasersfeld (Ed., Radical Constructivism in Mathematics Education. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Sanchez, D. A.; Allen, Jr. R. C. & Kyner, W. T. (1983). *Differential Equations*, An Introduction, Massachusetts, Addison- Wesley Publishing Company, Inc.

Schauder, J. (1930). *Der fixpunktsatz in funktionalräumen*, Studia Math. **2**, pp.171-180.

Schoenfeld, A. H. (2000). *Purposes and methods of research in mathematics education*. Notices of the AMS, pp.641-649.

Slavin, R. (1990). *Research on cooperative learning*: Consensus and controversy. Educational Leadership **47**, pp.52-54.

Strichartz, R. S. (1995). *The Way of Analysis*, Jones and Bartlett Publishers, Boston.

Tall, D. O. (1975), *A long-term learning schema for calculus and analysis*, Mathematical Education for Teaching **2(2)**, pp.3-16.

Voigt, J. (1996). *Negotiation of mathematical meaning in classroom process*: Social interaction and learning mathematics. In L.P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin & B. Greer(Eds.), Theories of mathematical learning. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. pp.21-50.

Wade, W. R. (1995). *An Introduction to Analysis*, Prentice Hall, NJ.

Zulkardi (2002). *How to design mathematics lessons based on the realistic approach?* RME. Literature Review.

Learning and Teaching of Mathematical Analysis in Teachers College

Lee, Byung-Soo
Department of Mathematics Kyungsung University, Busan 608-736, Korea
E-mail: bslee@ks.ac.kr

This paper considers learning and teaching of mathematical analysis in teachers college.

It concentrates on showing a way how learning and teaching of mathematical analysis should be considered for mathematical teachers training.

It is composed of five chapters including Chapter Ⅰ as an introduction and Chapter Ⅴ as a concluding remarks.

Chapter Ⅱ deals with goal and contents of global mathematical analysis.

The main Chapter, named Chapter Ⅲ, demonstrates exhibition of contents, way of operations, and contents of teaching and learning of mathematical real analysis.

Chapter Ⅳ shows an example of learning and teaching of mathematical real analysis concerning to fixed points and approximate solutions.

* ZDM Classification : B55, D45
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97B02, 97D02
* Key Word : Teachers college, future mathematics teachers, differential calculus, differential equations, mathematical analysis, complex analysis.