韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2003, 11. 제 42권, 제 4호, 503-521.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2003, Vol. 42, No. 4, 503-521.

중등 교사 양성을 위한 기하 영역의 교육과정 개발

박 혜 숙 (서원대학교)

I. 서 론

학교 수학의 목표는 크게 정신도야적 측면과 실용적 측면, 문화적 가치 및 심미적 측면으로 나누어 볼 수 있다. 그 중에서 기하교육은 논리적 사고능력을 발달시키고 공간에 대한 직관력을 발달시키기 위한 것(Geddes & Forthunato, 1993)으로 가장 중요한 위치를 차지하고 있다.

또한, 小平(1991)는 다음과 같이 기하교육의 중요성을 설명하고 있다.

> 당시 중학교에서 평면기하를 배웠다. 현대 수학의 입장에서 보면 당시의 평면기하는 엄밀하지 않았을지도 모르지만 그 때 배운 논리는 엄밀한 논리였다. 논리를 배울 때에는 논리를 여러 경우에 적용해 보지 않으면 안 된다. 평면기하는 논리적으로 구성된 체계로서 이것을 배울 때 논리를 항상 의식해서 사용해야 한다. 수학의 교육과정에서 논리를 이용한 풍부한 경우를 제공하는 교재는 평면기하밖에 없을 것으로 생각된다. 평면기하는 논리를 가르치기 위한 최적의 교재이다.

그러나 대부분의 학생들이 기하를 수학의 다른 영역에 비하여 어려워하고 있다(김영국 외, 2000). 이것은 기하의 문제는 개념의 이해와 개념의 적용을 정확히 해야 하기 때문이다. 더욱이 최근 유클리드 기하가 학교 수학에서 그 위치가 약화되어 이에 제대로 적응하지 못한 학생들이 기하를 더욱 어려워하고 있다. 그 원인은 유클리드 기하는 공리・정의・정리를 수학의 논리적 기초로 보고 그로부터 수학적 지식을 연역하여 새로운 정리를 증명해 나아가는 기하로서, 이러한 공리적 체계는 논리적 추론의 순수성을 강조하여 추상적이고 형식적으로 흐르기 쉽기 때문이다. 그래서 1900년대 이후 수학의 실용성과 직관을 강조하면서 유클리드 기하에 대한 비판이 일어났고, 학교 수학에서도 그것이 반영되고 있다.

平成 10년(1998년) 12월에 고지된 일본의 新學習指導要領에서는 도형의 내용에 대하여 '논리적 사고력과 직관력을 육성'하는 점을 중시하고, 특히 이들을 육성하기 위하여 '관찰・조작이나 실험'이 강조되고 있다. '관찰・조작이나 실험'은 문제의 발견에 도움이 될 뿐 아니라 증명을 하는데도 도움이 된다고 하였다(小關照純, 2001).

제 7차 수학과 교육과정에서도 학생들의 구체적인 경험에 근거하여 사물의 현상을 수학적으로 해석하고 조작하는 활동, 구체적인 사실에서 점진적으로 추상화 단계로 나가는 과정, 직관이나 구체적인 조작 활동에 바탕을 둔 통찰 등의 수학적 경험을 통하여 형식이나 관계를 발견하고, 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 이해하도록 하고 있다(교육부, 1998).

이러한 변화에 따라서 학교 수학에서의 기하교육에 대한 교수-학습 방법이 변화되어야 할 것이며, 교사 양성 대학에서의 기하 영역 교육과정도 시대의 흐름에 맞도록 변화할 필요가 있다. 특히 순수 학문으로서의 기하학을 지도하는 것이 아니라 초・중등학교 교사로서의 기본 소양을 갖추기 위한 기하학의 지도를 위해서는 각급 학교에서의 기하 영역의 숙지와 함께 다양한 분야와의 관련성도 함께 고려하여 보다 폭 넓은 기하학 내용을 제공할 필요가 있다.

이에 따라 본 연구에서는 먼저 기하교육의 목표를 알아보고, 교사양성 대학을 포함한 학교급별의 기하교육의 목표를 설정하였다. 또, 초・중등학교에서의 기하 영역의 목표와 연계하여 교사양성 대학에서의 기하 영역의 교육

---

* 2003년 9월 투고, 2003년 11월 심사 완료.
* ZDM분류 : B55, G15
* MSC2000분류 : 97B50, 97C70
* 주제어 : 교사교육, 기하교육, 교육과정.

과정을 개발하였다. 또, 개발된 교육과정과 신현용(2003)에서 제시된 9가지 기본 방향에 맞추어 교수-학습 방법 및 그에 알맞은 교재를 개발하였는데, 전체적인 내용은 연구 보고서 '교사 양성 대학 수학교육과 교육과정 및 교수-학습 방법 개발(신현용 외, 2003)'에 있다.

본고에서는 기하 영역 중에서 유클리드 기하와 비유클리드 기하를 기본으로 하는 '기하학I', 고등학교에서 다루는 해석기하와 관련된 '기하학II', 그리고 '미분기하'의 세 강좌에 대한 교육과정을 제시한다. 한편, 각 강좌에서의 교재의 예시는 지면관계상 생략하고, 각 강좌에서의 특징적인 평가문제나 토론문제를 제시하는 것으로 대신하고자 한다.

II. 기하교육의 목표

1. 기하 영역의 목표

Branford(1908)는 기하가 다음과 같은 실험적 단계, 직관적 단계, 학문적 단계를 거쳐서 발달한 것으로 보고 있다.

첫 번째 실험적 단계는 특수한 사실만을 입증할 수 있지만 완전히 또는 절대적으로 보편적인 사실을 제안할 수 있는 것은 아니며, 주로 사용하는 정신 활동은 감각-지각이다. 전 과정이 구체적인 단위로 측정하는, 즉 실험하는 것이며, 근사적으로 특정한 사실만을 보여줄 수 있는 것으로, 고대 이집트 수학의 특징이라 할 수 있다.

두 번째 단계인 직관적 단계는 일반적 혹은 보편적인 사실을 입증할 수 있고 증명의 과학적인 이상을 제시할 수 있으나 필요할 때마다 감각적 경험에 의존하는 단계이다. 실험적 증명은 많은 예를 통하여 증명하지만 아무리 많은 예가 주어진다고 해서 일반성이 수립될 수 없다. 반면에 직관적 증명에서는 창조력이 그 고유의 증명방법으로 작용하기에 직관을 형성하기에 충분하다는 점에서 실험적 증명과 다르다. 직관적 증명에서 사용되는 정신적 활동은 감각-지각과 개념을 똑같이 조합한 것이다. 이것은 고대 수학의 특징이며 초기의 인도와 그리스 수학의 많은 부분의 특징이다.

세 번째 단계인 학문적 단계는 이미 발견한 일반적인 사실을 상호적으로 연결하는 체계화를 의미한다. 완전한 학문적 증명은 새로운 감각-인식적 정리와 공리는 하나도 쓰지 않는다. 그러나 그 모든 것들을 가정된 기초로 시작할 때 놓고, 순수하게 논리적인 추론만을 사용한다. 우세한 정신 활동은 추상적인 개념이다. 그것은 후기 그리스 수학의 많은 부분과 현대 유럽 수학의 대부분의 특징이다(Branford, 1908; 우정호 외, 2003 재인용).

이러한 단계적인 발달에 맞추어, 교사양성 대학에서의 기하학은 초·중등학교에서의 실험적 단계로서의 기하학, 직관적 단계로서의 기하학을 전제로 하여 학문적 단계로서의 기하학이 지도되어야 할 것이다.

기하 영역의 정신도야성, 실용성, 문화적 가치 및 심미성과 관련된 목표와 다음에 제시하는 초·중등학교의 학교급별 기하 영역의 목표는 한국교육과정평가원(2000, 2001)의 '수학과 교육 목표 및 내용 체계화 연구'를 참조하기 바란다.

2. 학교급별 기하 영역의 목표

2.1 초등학교에서의 기하 영역의 목표

초등학교 기하 영역의 목표는 조작과 관찰에 의하여 도형의 성질을 추론할 수 있는 능력을 기르도록 하는데 초점을 두어 다음과 같은 구체적인 목표를 설정할 수 있다.

· 직육면체와 정육면체의 부피와 겉넓이를 구할 수 있도록 한다.

· 직관적으로 도형이나 사물의 대칭과 합동을 이해하도록 한다.

· 도형의 이동과 조작 활동을 통하여 공간감각의 개발과 실생활에서의 수학의 유용성을 강조한다.

2.2 중학교에서의 기하 영역의 목표

중학교 기하 영역의 목표는 관찰과 조작을 통한 도형의 탐구, 평면도형의 성질의 추론, 대칭과 닮음의 이해와 적용, 도형의 양에 대한 측정을 강조한다.

· 도형의 성질에 대한 연역적 추론을 도입하고, 원에서 현, 접선, 원주각에 대한 간단한 성질을 다룬다.

· 작도 방법을 직관적으로 이해하고, 직관적 활동과 귀납적 추론을 통하여 평면도형의 성질을 탐구하며, 입체

도형의 겉넓이와 부피 구하는 방법을 이해하도록 한다.

·도형의 대칭, 합동, 닮음을 이용하여 무늬를 만들어 보고, 수학의 아름다움을 인식할 수 있도록 심미적 측면을 강조한다.

2.3 고등학교에서의 기하 영역의 목표

고등학교 기하 영역의 목표는 변환과 공간도형의 성질의 탐구와 증명, 좌표와 벡터를 이용한 도형의 이해, 기하학적 문제해결, 삼각비의 이해와 활용에 초점을 두고 있다.

·고등학교에서는 평행이동, 대칭이동, 회전이동, 축소, 확대 등의 이해를 강조하고, 이를 활용한 간단한 최대 최소 등의 문제를 다룬다.

·좌표와 벡터 접근 방식으로 도형을 표현하고 추론하도록 한다. 이 때, 이차곡선은 간단히 취급하며, 벡터의 기본연산(합, 차, 내적)을 다룬다.

·삼각비를 도입하며 실제적인 문제에 적용할 수 있도록 한다.

2.4 교사양성 대학에서의 기하 영역의 목표

교사양성 대학에서의 기하 영역의 목표는 유클리드 기하와 비유클리드 기하의 관계를 파악하여 기하학의 변천 과정을 이해하고, 해석기하와 미분기하, 위상수학을 학습함으로써 기하 영역과 학교수학과의 연관성을 파악하도록 한다.

·기하학I에서는 유클리드 기하학을 공리론적으로 접근하여 기본 내용을 파악하고, 비유클리드 기하학으로의 발전 과정을 다룬다. 비유클리드 기하학의 세부 내용은 다루지 않고, 대신에 아핀기하와 사영기하 등의 여러 가지 기하를 접할 수 있도록 한다.

·기하학II에서는 해석기하를 다루는데, 평면과 3차원 공간에서의 도형을 주로 다루고 학교수학과의 연관성을 살펴본다.

·미분기하학에서는 3차원 유클리드 공간 속에서의 곡선과 곡면에 대한 미분기하의 기본적인 개념과 이론을 다루도록 하며 너무 깊게 다루지 않도록 한다.

·위상수학에서는 공리적인 방법으로 정의되는 추상적인 기하를 인식하여 폐포, 연속함수, 분리공리, 컴팩트 공간, 공간의 연결성 등을 다룬다.

III. 기하 영역의 교육과정

1. 초·중등학교 기하 영역 교육과정

1.1 우리나라의 제 7차 교육과정

가. 국민 공통 기본 교육과정(단계형 수준별)

제 7차 교육과정에서의 수학교과는 단계형 수준별 수업을 하도록 되어 있으며, 초등학교 1학년부터 고등학교 1학년까지를 국민 공통 기본 교육과정으로 정하고 있다. 이에 따른 도형 및 측정 영역의 내용은 교육부(1998)를 참조한다.

나. 고등학교 선택 중심 교육과정

제 7차 교육과정에서는 고등학교 2학년과 3학년을 선택 중심 교육과정으로 운영하고 있어서, 일반 선택 과목으로 '실용수학'을 제시하고 심화 선택 과목으로서 '수학I', '수학II', '미분과 적분', '확률과 통계', '이산수학'의 5과목을 제시하고 있는데, 그 중에서 기하 영역의 내용은 '수학II'의 '이차곡선, 공간도형, 공간좌표, 벡터'의 부분과 '미분과 적분'에 포함되어 있다. 자세한 내용은 교육부(1998)를 참조한다.

2. 교사양성 대학에서의 기하 영역 교육과정

2.1 기하 영역의 내용

가. 우리나라 사범대학에서의 기하학

현재 각 대학의 사범대학에서는 저마다의 교과과정에 의하여 기하교육을 하고 있다. 기하학은 유클리드기하, 타원기하, 쌍곡기하, 아핀기하, 사영기하, 위상기하, 미분기하, 해석기하, 프랙탈기하, 택시기하 등 여러 종류로 이루어져 있다. 이 중 위상기하와 미분기하를 제외한 나머지 기하에 대한 포괄적인 내용이 기하학 혹은 기하학개론이라는 강좌에서 다루어지고 있으므로 각 대학마다 특색을 지니고 있음을 알 수 있다. 실제로 기하학 강좌

는 해석학이나 대수학에 비하여 매우 다양하게 운영되고 있으므로 중등 교사로서 필수적으로 갖추어야 할 기본 지식이 소홀히 다루어질 우려도 있고, 교사 임용시험의 출제에서도 어려움을 겪고 있다. 몇 개 대학의 기하학 강좌 개요는 박혜숙(2003)을 참조한다.

나. 기하학 강좌에 포함될 필수 요소

교사양성 대학에서 다루어야 할 기하 영역의 강좌는 기하학I, 기하학II, 미분기하학, 위상수학의 4강좌로 요약할 수 있으며, 각 강좌에서 다루어야 할 필수 요소를 나열하면 다음과 같다.

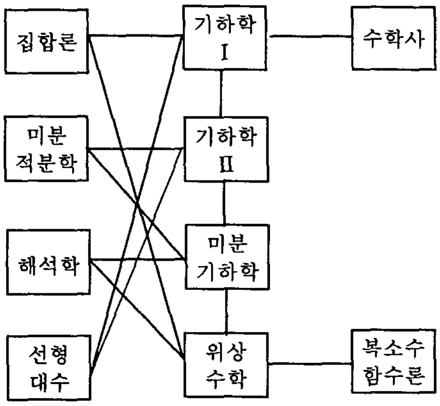
1) 기하학I
- 학교수학과 유클리드 기하학
- 유클리드 기하학의 기본 내용
- 비유클리드 기하학의 발전
- 유한체 위에서의 아핀기하
- 유한체 위에서의 사영기하
- 공선변환
- 클라인의 분류에 의한 기하학

2) 기하학II
- 학교수학과 해석기하학
- 평면에서의 해석기하
- 공간에서의 해석기하

3) 미분기하학
- 학교수학과 미분기하학
- 곡선의 개념
- 곡률과 비틀림
- 곡면의 개념
- 곡면의 기본형식
- 여러 가지 곡률

4) 위상수학
- 위상
- 연속함수
- 수렴성
- 분리공리
- 컴팩트공간
- 연결공간

2.2 기하 영역의 관련성



IV. 각 강좌별 교육과정

1. 기하학I

1.1. 성격과 목표

기하학은 공간을 연구하는 학문으로서 공간에 접근하는 방법에 따라서 그 명칭이 달라진다. 현재 학교 수학에서의 기하는 직관기하, 유클리드 기하, 해석기하, 위상기하, 변환기하, 벡터기하 등의 내용이 혼합되어 있으며, 연령에 따라서 다양한 기하학을 배우고 있다. 그 중에서도 유클리드 원론의 전개 양식은 기하교육에 큰 비중을 차지하고 있다.

고대 그리스에서부터 시작한 유클리드 기하학은 모든 수학 영역에서 기초가 되는 것인데, 유클리드 원론에서 유래된 정의, 공리, 공준으로부터 정리를 증명하는 연역적·공리적 체계이다. 유클리드 기하에 대한 교육적 가치는 주로 직관의 계발이다. 유클리드 기하의 교육은 타고난 심미적이고 철학적인 면을 다룬다. 언어적 주장의 명확화, 논리적 추론의 순수성을 강조하는 유클리드 기하에 대한 학습이 계산 공부보다 교육적으로 큰 가치가 있다.

최근 유클리드 기하는 전보다 학교 수학에서 그 위치가 약화되어 학생들이 기하를 더욱 어려워하고 있다. 이러한 쇠퇴의 원인은 내용에 대한 불만족보다는 유클리드 기하의 본질을 형성하는 논리적 추론에 의해 야기되는 어려움에서 기인한다.

또한, 대부분의 학생들이 수학의 여러 영역 중에서 기

하 문제를 해결하는데 있어서 상당한 어려움을 느끼고 있는데, 그 이유 중의 하나는 기하 문제들은 개념의 이해와 개념의 적용을 정확히 해야 하는 것이기 때문이다.

중등학교까지 주로 배우고 있는 유클리드 기하를 보다 완벽하게 하기 위하여 여러 가지 시도가 이루어졌는데, 평행선 공리를 부정하면서 등장한 비유클리드 기하를 비롯하여, 결합기하, 공리기하 등이 연구되었으며, 아핀기하와 사영기하도 등장하였다. 최근에는 기하의 구조를 연구하는 데에 대수적 구조가 적용되며, 특히 디자인, 그래프와 같은 유한 결합구조를 갖는 유한기하의 연구는 유한군론, 암호학 등과 깊은 관계가 있다.

기하학I 강좌에서는 힐베르트가 제시한 유클리드 기하의 공리적 접근과 비유클리드 기하의 종류에 대하여 알아보고, 강좌의 후반부에서는 아핀평면과 사영평면에 대하여 유한 기하를 위주로 하여 다룬다. 또, 클라인에 의한 기하학의 분류를 다룬다.

1.2 내용체계

유클리드 기하학	· 기하학의 기원 · 여러가지 기하학 · 공리적 방법 · 유클리드 원론의 구성
결합기하학	· 논리울 · 결합기하학 · 그림의 위험
힐베르트 공리계	· 유클리드 기하에서의 결함 · 순서공리군 · 합동공리군
중립기하학	· 중립기하학 · 엇각정리 · 외각정리 · 각과 선분의 크기 · 평행공리의 역할
비유클리드 기하학	· 평행공준을 증명하려는 시도 · 쌍곡기하학 · 타원기하학
아핀평면	· 결합구조 · 평면 · 아핀평면 · 유한아핀평면
사영평면	· 사영평면 · 쌍대성의 원리 · 유한사영평면
유한체 위의 아핀평면과 사영평면	· 체와 벡터공간 · 아핀평면 AG(2, F) · 사영평면 PG(2, F) · 사영평면과 아핀평면과의 관계
공선변환	· 공선변환군 · 사영평면 PA(2, F) 위의 사영변환 · 아핀평면 AG(2, F) 위의 아핀변환
클라인분류	· 변환군에 의한 기하학의 분류

1.3 기하학I의 내용

가. 유클리드 기하학

(1) 기하학의 흐름을 이해하고 여러 가지 기하학의 종류를 확인한다.

(2) 공리적 방법의 필요성을 이해하고 공리의 개념을 익힌다.

(3) 유클리드 원론의 구성과 5개의 공준을 이해한다.

(4) 평행공준을 증명하려는 시도에서 유클리드 기하의 문제점을 찾아낼 수 있다.

<용어와 기호> 공리, 공준, 무정의 용어, 직선, 선분, 반직선, 반향, 각, 보각, 직각, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$

나. 결합기하학

(1) 논리율을 익히고 활용할 수 있다.

(2) 결합공리를 이해하고, 결합공리를 이용하여 간단한 명제를 증명할 수 있다.

(3) 그림에 의존하여 증명된 내용에서 오류를 지적할 수 있다.

<용어와 기호> 결합기하학, 결합공리

다. Hilbert 공리계

(1) Euclid 기하에서의 결함과 순서공리, 합동공리, 연속공리, 평행공리를 이해한다.

(2) 순서공리를 이용하여 간단한 명제를 증명할 수 있다.

(3) 합동공리를 이용하여 간단한 명제를 증명할 수 있다.

(4) 선분과 각의 순서관계를 이해하고 이를 적용할 수 있다.

<용어와 기호> 순서공리, 합동공리, 연속공리, 평행공리, 아르키메데스의 공리, 데데킨트의 공리, 공리기하, 같은 쪽, 반대쪽, 사이에 있다, Pasch의 정리, 횡선정리, 삼각형의 내부, $AB<CD$, $\angle ABC < \angle DEF$

라. 중립기하학

(1) 중립기하학의 의미를 이해한다.

(2) 엇각정리를 증명할 수 있다.

(3) 외각정리를 증명할 수 있다.

(4) 각과 선분의 크기가 정해지는 의미를 이해한다.

(5) 사케리-르장드르의 정리를 이해하고 삼각부등식을 증명할 수 있다.

(6) 평행공리의 동치인 사실을 인식하고 이해한다.

(7) 삼각형의 내각의 합에 관한 정리를 이해한다.

<용어와 기호> 중립기하학, 내각, 엇각, 엇각정리, 외각정리, 수선의 발, 외각, 내대각, 둔각, 예각, 삼각부등식, 사케리-르장드르의 정리, 볼록, 결손, 직사각형, $\angle A°$, $\overline{AB}$

마. 비유클리드 기하학의 발전

(1) 평행공준을 증명하려는 여러 시도를 이해한다.

(2) 쌍곡기하학의 개념을 이해한다.

(3) 쌍곡기하학에서의 벨트라미-클라인의 모형을 이해한다.

(4) 타원기하학의 개념과 그 모형을 이해한다.

(5) 쌍곡기하학과 타원기하학의 차이점을 이해한다.

<용어와 기호> 쌍곡기하학, 쌍곡공리, 등거리, 타원기하학, 분리공리, 배경대응, (A, B | C, D)

바. 아핀평면

(1) 주어진 결합구조로 모형을 만들 수 있다.

(2) 평면의 뜻을 이해하고 평면인지 아닌지 판별할 수 있다.

(3) 아핀평면의 뜻을 이해하고 아핀평면인지 아닌지 판별할 수 있다.

(4) 아핀평면이 되기 위한 필요충분조건을 증명할 수 있다.

(5) 유한 아핀평면의 성질을 이해하고 적용할 수 있다.

<용어와 기호> 결합구조, 점, 직선, 유한 결합구조, 평면, 결정한다, 교점, 만난다, 평행, 공선점, 공점선, 비공선점, 비공점선, 4점도형, 아핀평면, 평행류, (아핀평면의) 위수, $p \vee q$, $M \wedge L$, pr(L), (p)

사. 사영평면

(1) 사영평면의 뜻을 이해하고 사영평면인지 아닌지 판별할 수 있다.

(2) 쌍대성의 원리를 이해하고 주어진 명제를 쌍대명제로 바꿀 수 있다.

(3) 사영평면에서는 쌍대성의 원리가 성립함을 이해한다.

(4) 사영평면이 되기 위한 필요충분조건을 증명할 수 있다.

(5) 유한 사영평면의 성질을 이해하고 적용할 수 있다.

(6) 아핀평면과 사영평면의 관계를 이해한다.

<용어와 기호> 사영평면, 쌍대명제, 자기쌍대, 4선도형, (사영평면의) 위수, 무한원점, 무한원직선, S^d, L_∞

아. 유한체 위의 아핀평면과 사영평면

(1) 체와 벡터공간의 개념을 이해한다.

(2) 아핀평면 AG(2, F)의 점과 직선의 표현을 이해한다.

(3) 유한체 위의 아핀평면 AG(2, q)에서 간단한 경우의 구체적인 구조를 말할 수 있다.

(4) 사영평면 PG(2, F)의 점과 직선의 표현을 이해한다.

(5) 유한체 위의 사영평면 PG(2, q)에서 간단한 경우의 구체적인 구조를 말할 수 있다.

(6) 아핀평면과 사영평면의 점과 직선의 대응관계를 이해한다.

<용어와 기호> 아벨군, 체, 갈로아체, 벡터공간, 벡터, 기초체, 스칼라, 부분공간, 일차종속, 일차독립, 기저, 차원, GF(q), $\langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle$, AG(2, F), L_{abc}, PG(2, F), $[(a_1, a_2, a_3)]$, AG(2, q), PG(2, q)

자. 공선변환군

(1) 공선변환군의 뜻을 이해한다.

(2) 부동점, 부동직선의 뜻을 이해한다.

(3) 사영평면 위의 사영변환의 뜻을 이해하고 사영변환인지 아닌지 판별할 수 있다.

(4) 주어진 사영변환의 부동점과 부동직선을 구할 수 있다.

(5) 임의의 4점을 다른 4점으로 보내는 사영변환을 구할 수 있다.

(6) 사영변환과 아핀변환의 관계를 이해한다.

(7) 아핀평면 위의 아핀변환의 뜻을 이해하고 아핀변환인지 아닌지 판별할 수 있다.

(8) 유클리드 평면 위에서의 합동변환은 2가지밖에 없음을 증명할 수 있다.

<용어와 기호> 대칭군, 정칙행렬, 일반선형군, 공선

변환, 자기동형사상, 공선변환군, 자기동형군, 부동부분집합, 부동점, 부동직선, 점별로 고정됨, 선별로 고정됨, 사영변환, 사영변환군, 아핀변환, 아핀변환군, Euclid 변환, 등장변환, 합동변환, $Mat_n(F)$, $GL_n(F)$

차. 클라인의 분류에 의한 기하학

(1) 기하학의 흐름을 파악하고, 변환군에 의하여 기하학을 분류할 수 있음을 이해한다.

(2) 평면에서의 2차곡선의 분류를 하고, 그 특성을 알 수 있다.

1.4. 교수-학습 내용

가. 강좌의 소개

본 강좌에서는 비 유클리드 기하의 성립 과정을 알아보고, 아핀 기하와 사영 기하의 중요한 성질을 주로 유한 기하의 예를 통하여 알아본다.

기하학I 강좌에서는 힐베르트가 제시한 유클리드 기하의 공리적 접근을 다루고 이를 바탕으로 비유클리드 기하의 종류에 대하여 알아본다(Greenberg, 1988; 구광조 · 오병승, 1991; 엄상섭, 1978 참조). 이 때, 유클리드 기하에서의 세부적인 증명 내용 등은 자세히 다루지 않고, 강좌의 후반부에서는 클라인에 의한 기하학의 분류(백용배, 1982 참조)와 아핀평면과 사영평면에 대하여 다룬다(박승안, 1993 참조).

나. 선수 과목

본 강좌는 대학에서 기하학을 처음 접하는 학생을 대상으로 하고 있으므로, 수학에 대한 선수 지식은 거의 필요 없지만, 체와 백터 공간의 개념을 알고 있는 학생은 유한 아핀 평면과 유한 사영 평면의 정의에 쉽게 접근할 수 있다. 따라서 집합론과 선형대수를 수강한 학생은 기하학I 강좌를 손쉽게 배울 수 있다. 그러나 본 강좌에 포함된 집합론이나 선형대수는 많은 내용을 요구하지 않으므로 그 강좌를 수강하지 않은 학생도 이 강좌를 이수할 수 있다.

다. 교수-학습 방법

1) 교수-학습 방법 및 주안점

(1) 유클리드 기하는 중학교에서부터 배운 내용이지만 이 강좌에서는 공리와 정의를 다시 엄밀히 하여 공리기하적인 입장에서 기초적인 내용을 다시 다루도록 지도한다.

(2) 간단한 내용이라도 주어진 공리와 정의, 이미 증명된 사실만을 가지고 논리적으로 추론할 수 있는 연습을 하도록 지도한다.

(3) 중학교에서 배우는 기하와 공리기하적인 유클리드 기하와의 차이점을 파악할 수 있도록 지도한다.

(4) 기하학의 흐름과 비유클리드 기하로의 발전에 대하여 파악하고, 유클리드 기하와 비유클리드 기하와의 차이점을 확실히 알 수 있도록 지도한다.

(5) 아핀기하와 사영기하는 2차원 평면의 경우로 제한하며, 특히 유한기하의 경우를 간단한 예를 통하여 지도하도록 한다.

2) 교육공학의 활용

(1) 유클리드 기하에서의 증명을 GSP나 JAVA 등을 활용하여 확인할 수도 있다.

(2) 본 강좌에서 참조할 수 있는 대표적인 인터넷 사이트를 소개하면 다음과 같다.

<유클리드 기하와 비유클리드 기하>

- http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/Euclid.html
- http://www.southernct.edu/%7Egrant/nicolai/
- http://cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/

<아핀평면과 사영평면>

- http://www.anth.org.uk/NCT/
- http://www.fractal.co.kr
- http://sunsite.auc.kd/cgfa/escher/

라. 타 과목과의 관련성

(1) 유클리드 기하는 '8-나' 단계와 '10-나' 단계와 밀접한 관계를 갖고 있다. 그러나 중등학교에서는 지나친 엄밀성을 피하기 위하여 간단히 다루고 있는 부분도 많으므로 이 강좌를 통하여 엄밀한 기하로의 재구성을 할 수 있다.

(2) 비유클리드 기하는 상대성 이론이나 양자 역학, 그리고 최근에 활발히 연구되고 있는 끈이론 등에 영향을 주었으므로 기하학 뿐아니라 물리학에까지 그 영향력

을 확대하고 있다.

(3) 아핀평면과 사영평면은 대수학에 기초를 두고 설명할 수 있으며, 대수에서의 변환군의 개념이 적용되어 기하학이 유클리드 기하, 아핀기하, 사영기하로 분류되는 데 큰 역할을 하고 있다.

(4) 사영평면 및 사영공간은 대수기하 등에서의 기초 공간으로 그 유용성이 높은 부분이다.

(5) 이 강좌에서는 선형대수학의 기본 개념을 도입하여 설명하고 있으므로 이 부분을 확실히 하면 선형대수학이나 현대대수학의 학습에 도움을 줄 것이다.

마. 초·중등 학교 수학과 교육과정과의 연계

제 7차 교육과정에서는 교수-학습에 대하여는, 학생들의 구체적인 경험에 근거하여 사물의 현상을 수학적으로 해석하고 조직하는 활동, 구체적인 사실에서 점진적인 추상화 단계로 나가는 과정, 직관이나 구체적인 조작 활동을 통하여 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 이해하는 것을 강조하고 있다. 또 문제 해결을 위한 합리적이고 창의적인 해결 계획을 작성하여 실행한 다음, 반성 과정을 거치는 사고 태도를 기르도록 강조하고 있다(교육부, 1998).

제 7차 수학과 교육과정의 1단계에서부터 10단계까지의 도형 및 측정 영역에서 다루는 내용을 간단히 살펴보면 다음과 같다.

1단계에서는 여러 가지 물건의 직관적인 관찰과 구성 등의 활동을 통하여 사각형, 삼각형, 원 등 기본 도형의 모양과 특징을 알고, 이를 활용하여 여러 가지 모양 만들기를, 2단계에서는 선분, 직선, 삼각형, 사각형, 원 모양의 구체물을 이용하여 기본 평면도형을 그려 보고, 그 구성 요소를 알며, 여러 가지 모양 만들기와 주어진 쌓기나무로 여러 가지 입체도형 만들기를 학습한다.

3단계에서는 각, 직각, 직각삼각형, 직사각형, 정사각형의 이해와 원 그리기 및 그 구성 요소를 다루고, 4단계에서는 이등변삼각형, 정삼각형, 예각삼각형, 둔각삼각형과 삼각형, 사각형의 내각의 크기의 합, 사다리꼴, 평행사변형, 마름모의 변, 각, 대각선에 대한 간단한 성질을 학습한다.

5단계에서는 직육면체, 정육면체의 구성 요소, 성질, 전개도, 평면도형에서 선대칭과 점대칭, 합동인 도형 식별과 자와 컴퍼스로 삼각형 그리기를, 6단계에서는 각기둥과 각뿔의 구성 요소와 성질, 각기둥의 전개도, 원기둥, 원뿔의 구성 요소와 성질, 원기둥의 전개도, 회전체의 성질을 학습한다.

7단계에서는 기본적인 도형인 점, 선, 면, 각에 대한 간단한 성질을 파악하고 삼각형의 합동조건을 이해하며, 평면도형과 입체도형의 성질을, 8단계에서는 삼각형과 사각형의 성질, 도형의 닮음, 닮음의 응용을 학습한다.

9단계에서는 피타고라스의 정리와 그 활용, 원과 직선, 원주각을, 10단계에서는 평면좌표, 직선의 방정식, 원의 방정식, 도형의 이동에 대하여 학습한다.

1.5 평가 및 토론 문제

(1) 탈레스의 기하학 분야에서의 업적에 대하여 논하여라.

(2) 공리의 필요성을 말하고 유클리드가 제시한 5가지 공준을 말하여라.

(3) 3가지 작도 불가능 문제에 대하여 조사하고 작도와 종이접기로 만들 수 있는 도형의 차이점에 대하여 논의해 보아라.

(4) 택시 기하에 대하여 조사하고 중·고등학교에 택시기하를 도입하였을 때 변화되는 내용에 대하여 논의해 보아라.

(5) 프랙탈 기하에 대하여 조사하고 토론해 보아라.

(6) 삼각형의 합동조건에서 SSS, ASA, SAS합동조건의 증명방법에 대하여 논의하여라.

(7) 해석학에서 실수의 완비성에 대하여 조사하고 힐베르트의 공리기하와의 관련성에 대하여 논의하여라.

(8) 중학교에서 배우는 유클리드 기하의 내용 중에서 평행공리가 없으면 성립할 수 없는 부분을 찾아보아라.

(9) 유클리드 기하학과 비유클리드 기하학의 차이점을 적고, 비유클리드 기하학으로 발전하는 과정에 대하여 기술하여라.

(10) 평행공준을 증명하려고 시도한 여러 수학자들에 대하여 조사하고 발표하여라.

(11) 프랙탈 중에서 코흐곡선과 시어핀스키 삼각형에 대하여 조사하고, 이 프랙탈 도형이 만들어지는 과정을 아핀변환을 사용하여 설명하는 방법에 대하여 논의하여라.

(12) 테셀레이션에 대하여 조사하고, 그 중의 한 가지 테셀레이션을 택하여 그 도형이 만들어지는 과정을 합동변환을 사용하여 설명하는 방법에 대하여 논의하여라.

2. 기하학II

2.1 성격과 목표

해석기하는 유클리드 3차원 공간 속의 곡선과 곡면을 방정식을 이용하여 표현해 보고, 또 각 도형의 성질을 방정식을 사용하여 살펴보는 기하학이다. 이것은 17 세기에 데카르트가 좌표평면을 도입함으로써 시작되었으며, 현재의 대수기하의 초보적인 단계이다. 해석기하는 고등학교를 졸업한 학생이면 충분히 이해할 수 있는 내용으로, 유클리드 기하에서의 도형의 개념을 명확하게 해 준다.

고대 그리스 수학자들은 자와 컴퍼스만을 이용한 작도 문제에 대한 연구를 계속하면서, 자와 컴퍼스로 작도할 수 있는 직선과 원 이외의 곡선인 원뿔곡선에 대하여 흥미를 갖고 연구하였다. 원뿔곡선에 대한 연구는 이미 플라톤의 아카데미아 시대부터 활발하게 진행되었고, 아르키메데스나 유클리드의 저술에도 있었다. 그 중에서 대표적인 것은 그리스의 수학자인 Menaechmos와 Apollonius의 연구였다.

그 후 데카르트의 좌표 도입과 함께 해석기하학은 미적분학과 결합되어 크게 발전하였고, 원뿔곡선론, 곡면론으로 다시 미분기하학으로 발전되었으며, 1950년대 이후에는 대수기하학으로 발전하게 된다.

해석기하학의 전반부가 원뿔곡선론이라면 후반부는 공간기하학이 된다. 공간기하학은 벡터를 사용하면 쉽게 이해될 수 있는데, 벡터 해석학은 19세기 물리학을 대표하는 전자기학에서 필수적인 수학적 도구가 되었으며, 현대에 와서는 공학 및 의학분야에 이르기까지 널리 응용되는 중요한 개념이 되었다.

또한, 벡터는 공간에서의 기하학뿐 아니라 대수학에서 선형대수의 중요한 부분을 차지하고 있는데, 17세기에 기하학과 대수학을 결합시킨 해석기하학이 나타나면서 직선이나 평면을 일차방정식으로 표현할 수 있었다. 고등학교에서는 기하학적인 유향선분을 이용하여 벡터를 도입하고 후에 순서쌍의 성분으로 벡터를 표현하게 된다 (우정호 외, 2002).

본 강좌에서는 초등 해석기하인 평면에서의 직선, 원뿔곡선의 개념 및 성질을 살펴보고, 이차곡면을 분류해 본다.

2.2 내용체계

기초 이론	· 유향선분 · 선분의 중점 · 직선의 기울기
곡선과 방정식	· 방정식과 곡선 · 곡선의 교점 · 곡선의 방정식
직선	· 직선의 방정식의 일반형 · 직선에서 점까지의 거리 · 두 직선의 교점을 지나는 직선
원과 타원	· 원의 방정식의 일반형 · 타원의 정의와 일반방정식 및 성질
포물선	· 포물선의 정의와 일반방정식 · 포물선의 몇 가지 성질
쌍곡선	· 쌍곡선의 정의와 일반방정식 · 쌍곡선의 점근선 및 성질 · 원뿔곡선의 초점과 준선에 관한 성질
축의 회전	· xy항이 없는 방정식 · 원뿔곡선과 계수 사이의 관계
평면곡선	· 그래프의 개형 그리기 · 삼각함수, 로그함수와 지수함수 곡선 · 매개변수 방정식의 정의와 그래프
극좌표	· 극좌표와 직각좌표 · 직선과 원, 원뿔곡선의 극방정식 · 극좌표 곡선의 성질
공간에서의 직선과 평면	· 공간에서의 거리 · 방향각과 방향 코사인 · 두 직선이 이루는 각 · 공간에서의 직선의 방정식
이차곡면	· 구와 타원면 · 쌍곡면과 포물면 · 타원뿔면과 기둥면 · 원주좌표와 구면좌표

2.3 기하학 II의 내용

가. 기초 이론

(1) 유향선분의 뜻을 이해하고, 유향선분에 관한 정리를 활용할 수 있다.

(2) 좌표평면의 점을 좌표를 사용하여 나타낼 수 있고, 선분의 중점을 좌표로 나타낼 수 있다.

(3) 좌표로 주어진 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

(4) 두 점을 지나는 직선의 기울기를 구할 수 있다.

(5) 기울기를 이용하여 서로 평행인 직선과 서로 수직인 직선을 구별할 수 있다.

(6) 두 직선이 이루는 사이각을 구할 수 있다.

<용어와 기호> 선분, 방향, 양의 방향, 음의 방향, 유향선분, 좌표, 원점, x좌표. y좌표, 사분면, 기울기

나. 직선

(1) 간단한 방정식이 나타내는 곡선을 그릴 수 있다.

(2) 주어진 곡선의 교점을 연립방정식을 이용하여 구할 수 있다.

(3) 주어진 점의 자취가 나타내는 곡선의 방정식을 구할 수 있다.

(4) 한 점과 기울기가 주어진 직선, 두 절편이 주어진 직선, 기울기와 절편이 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있다.

(5) 직선의 방정식의 일반형을 이해한다.

(6) 한 직선에서 한 점까지의 거리를 구할 수 있다.

(5) 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.

<용어와 기호> 곡선의 교점, 자취, x절편, y절편, 일반형, 법선형

다. 원과 타원

(1) 이차방정식의 표준형의 뜻을 안다.

(2) 원의 방정식의 표준형을 구할 수 있다.

(3) 주어진 조건을 만족하는 원의 방정식을 구할 수 있다.

(4) 타원, 타원의 초점, 꼭지점, 장축, 단축, 이심률의 정의와 표준방정식을 이해한다.

(5) 타원의 성질을 이해한다.

(6) 타원의 일반방정식을 구할 수 있다.

(7) 타원의 몇 가지 성질을 안다.

<용어와 기호> 이차방정식의 일반형, 원, 표준형, 타원, (타원의) 초점, 중점, 장축, 단축, (타원의) 꼭지점, (타원의) 통경, 이심률, e

라. 포물선

(1) 포물선과 초점, 준선, 축, 꼭지점, 통경의 정의를 이해한다.

(2) 포물선의 표준방정식을 구할 수 있다.

(3) 꼭지점이 (h, k)인 포물선의 방정식을 구할 수 있다.

(4) 평행이동한 포물선의 방정식을 이해한다.

(5) 포물선의 몇 가지 성질을 안다.

<용어와 기호> 포물선, 초점, 준선, 축, 꼭지점, 통경, 표준방정식, 평행이동, 원뿔곡선

마. 쌍곡선

(1) 쌍곡선, 쌍곡선의 초점, 꼭지점의 정의와 표준방정식을 이해한다.

(2) 쌍곡선의 이심률을 구할 수 있다.

(3) 쌍곡선의 점근선을 이해한다.

(4) 쌍곡선 방정식의 일반형을 구할 수 있다.

(5) 쌍곡선의 몇 가지 성질을 안다.

(6) 원뿔 곡선의 초점과 준선에 관한 성질을 이해하고 응용할 수 있다.

<용어와 기호> 쌍곡선, (쌍곡선의) 초점, (쌍곡선의) 중심, (쌍곡선의) 꼭지점, (쌍곡선의) 통경, 켤레쌍곡선, 점근선, 준선

바. 축의 회전이동

(1) xy항이 있는 이차방정식을 정리하여 xy항이 없는 방정식으로 변형시킬 수 있다.

(2) 원뿔곡선의 회전이동을 삼각함수를 사용하여 간단히 할 수 있다.

(3) 이차곡선의 판별식을 이용하여 주어진 이차방정식의 모양을 판별할 수 있다.

<용어와 기호> (이차곡선의) 판별식

사. 평면곡선

(1) 대수곡선과 초월함수의 뜻을 안다.

(2) 대칭, 접선, 점근선 등을 이용하여 주어진 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

(3) 삼각함수 곡선을 그릴 수 있다.

(4) 로그함수와 지수함수 곡선을 그릴 수 있다.

(5) 로그함수와 지수함수 곡선의 몇 가지 성질을 안다.

(6) 매개변수 방정식의 정의를 이해하고, 매개변수로 주어진 곡선을 그릴 수 있다.

(7) Cycloid를 그릴 수 있다.

(8) Hypocycloid와 Epicycloid를 그릴 수 있다.

<용어와 기호> 대수곡선, 대칭, 수직띠, 초월곡선, 주기, 진폭, 상용로그, 자연로그, 매개변수, 매개변수방정식, 사이클로이드, 하이포사이클로이드, 에피사이클로이드, 아스트로이드, 심장형

아. 극좌표

(1) 극좌표를 이해하고, 극좌표와 직각좌표와의 관계를 이해한다.

(2) 주어진 직선을 극방정식으로 나타낼 수 있다.

(3) 주어진 원을 극방정식으로 나타낼 수 있다.

(4) 이심률을 이용하여 원뿔 곡선을 극방정식으로 나타낼 수 있다.

(5) 극좌표 곡선의 대칭성, 접선, r의 최대값에 대한 θ의 값, r의 변화 등을 이용하여 극방정식으로 주어진 곡선의 그래프를 그릴 수 있다.

<용어와 기호> 극좌표, 원점, 극, 동경, 극축, 편각, 3엽장미, 연주형, 나선

자. 공간에서의 직선과 평면

(1) 공간에서의 직각좌표를 이해하고, 공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

(2) 방향각과 방향 코사인, 방향 계수를 이해하고, 주어진 직선의 방향 계수를 구할 수 있다.

(3) 두 직선이 이루는 각을 구할 수 있다. 또, 이를 이용하여 평행한 직선과 수직인 직선, 주어진 두 직선에 수직인 직선을 구할 수 있다.

(4) 공간에서의 점을 지나는 평면, 한 직선에 수직인 평면의 방정식을 구할 수 있다.

(5) 두 평면의 사이각을 구할 수 있다.

(6) 평면의 법선을 이해하고, 평면에서 한 점까지의 거리를 구할 수 있다.

(6) 세 조건으로 결정되는 평면의 방정식을 구할 수 있다.

(7) 공간에서의 직선의 방정식을 매개변수형, 대칭형으로 구할 수 있다.

(8) 직선의 방정식의 일반형을 이해한다.

<용어와 기호> (공간에서의) 좌표축, 좌표평면, xy평면, yz평면, xz평면, 원점, 방향각, 방향 코사인, 방향 계수, (평면의) 표준방정식, 법선, 이면각, (직선의) 매개변수방정식, (직선의) 대칭형

차. 이차곡면

(1) 구의 방정식을 이해하고 그 개형을 그릴 수 있다.

(2) 타원면의 방정식을 이해하고 그 개형을 그릴 수 있다.

(3) 일엽쌍곡면과 이엽쌍곡면의 방정식을 이해하고 그 개형을 그릴 수 있다.

(4) 타원포물면과 쌍곡포물면의 방정식을 이해하고 그 개형을 그릴 수 있다.

(5) 타원뿔면과 기둥면 (주면)의 방정식을 이해하고 그 개형을 그릴 수 있다.

(6) 직각좌표로 주어진 점을 원주 좌표와 구면 좌표로 나타낼 수 있다.

<용어와 기호> 구, (구의) 중심, (구의) 표준방정식, 단면, 타원면, 일엽쌍곡면, 이엽쌍곡면, 타원뿔면, 기둥면, 모선, 원주 좌표, 구면 좌표

2.4. 교수-학습 과정

가. 강좌의 소개

해석기하는 유클리드 3차원 공간 속의 곡선과 곡면을 방정식을 이용하여 표현해 보고, 또 각 도형의 성질을 방정식을 사용하여 살펴보는 기하학이다. 이것은 17 세기에 데카르트가 좌표평면을 도입함으로써 시작되었으며, 현재의 대수기하의 초보적인 단계이다. 해석기하는 고등학교를 졸업한 학생이면 충분히 이해할 수 있는 내용으로, 유클리드 기하에서의 도형의 개념을 명확하게 해 준다.

본 강좌에서는 평면에서의 직선, 원추곡선의 개념 및 성질을 살펴보고, 2차곡면을 분류해 본다. 세부적인 내용은 박규홍(2002), 이성헌(1963), 수학교재편찬위원회(1996) 등을 참조한다.

나. 선수 과목

고등학교를 졸업한 학생이면 충분히 이해할 수 있는 내용이므로 특별한 선수과목은 필요 없지만 선형대수의 간단한 내용이나 고등학교에서의 벡터, 삼각함수 등의 내용을 잘 알고 있으면 접근하기 쉽다.

다. 교수-학습 방법

1) 교수-학습 방법 및 주안점

(1) 해석기하학은 고등학교의 '10-나' 단계와 '수학II'에서 많이 다루어 본 내용을 주축으로 하고 있으므로 학생들이 쉽게 접근할 수 있는 강좌이다. 이는 또한 고등학교 교사가 되기 위한 필수 교과임을 뜻한다. 따라서 고등학교에서 이미 배운 내용이라 하더라도 그 개념이나 근본적인 원리는 확실히 익히도록 지도한다.

(2) 해석기하학은 기하적인 대상을 대수적인 방법을 사용하여 문제를 해결하는 대수기하의 초보적인 단계로서, 대수적 방법의 유용성과 간편성을 느낄 수 있도록 지도한다.

(3) 종이접기나 컴퓨터 프로그램, JAVA 등을 활용하여, 머리 속으로만 하는 기하가 아니라 손으로 만지고, 몸으로 체험할 수 있는 다양한 경험을 할 수 있도록 한다.

2) 교육공학의 활용

(1) GSP 등의 프로그램을 이용하여 주어진 곡선을 그려보도록 한다.

(2) 종이접기를 활용하여 원뿔곡선을 만들어 보도록 한다.

(3) 해석기하와 관련된 주요 인터넷 사이트를 소개하면 다음과 같다.

- 원뿔곡선 - http://www.math.kongju.ac.kr
  http://www.pado.ac.kr
  http://www.ies.co.jp/math/java/
- 평면곡선 - http://www.xahlee.org/
  http://www.mathlove.or.kr
- 곡면 - http://dragon.seowon.ac.kr/~hyespark
  http://www.geom.uiuc.edu/zoo/

라. 타 과목과의 관련성

(1) 해석기하학은 고등학교의 '10-나' 단계와 '수학II'와 밀접한 관계를 가지고 있으며, 이 내용의 연장선 상에서 공간에서의 도형을 보다 깊게 이해할 수 있도록 되어 있는 과목이다.

(2) 해석기하학은 주 대상이 유클리드 공간에서의 도형으로, 이 도형을 좌표공간에서 표현함으로써 표현을 간단히 하여 쉽게 다룰 수 있도록 하고 있으므로 '기하학I' 강좌의 후속 내용, 또는 선수학습의 내용으로 볼 수 있다.

(3) '기하학I'의 사영공간을 배운 후에 보다 일반적인 사영공간을 논하면 그 공간에서 원뿔곡선의 여러 성질을 얻을 수 있다.

(4) 원뿔곡선 및 원뿔곡면은 물리학이나 천문학 등 과학의 여러 분야에 응용되고 있으므로 실제로 활용되는 예를 보여줌으로써 실생활과 수학의 연계성을 인식하도록 한다.

(5) 유클리드 공간에서 다루는 원뿔곡선을 복소수 공간에서 일반화 한 대수다양체는 현재 활발히 연구되고 있는 대수기하학에서 다루고 있는 대상이며, 이 대수기하학적 방법을 이용하여 페르마의 마지막 정리가 해결되었다.

(6) 선형대수의 벡터 단원을 학습한 후에는 공간에서의 직선과 평면의 방정식, 혹은 세 점으로 결정된 삼각형의 넓이 등을 구하거나 이해하는 데 도움을 줄 수 있다.

(7) 공간에서의 여러 가지 곡면은 미분기하에서 자주 등장하는 예가 되므로 이 부분을 확실히 해 두면 미분기하의 학습에 도움을 줄 것이다.

마. 초·중등 학교 수학과 교육과정과의 연계

제 7차 교육과정에 의하면, 고등학교에서는 학생들이 2002학년도에 단계형 수준별 교육과정으로 적용되어 '10-가, 나' 단계를 이수하도록 되어있으며, 2003학년도에는 선택 중심 교육과정으로 적용되어 2학년에서 '수학I'을 이수하게 되어 있고, 2004학년도에는 3학년에서 '수학II' 등을 이수하도록 되어 있다.

이 중에서 본 강좌와 관련이 있는 것은 제 7차 고등학교 수학과 교육과정에서의 기하 영역으로, 이것은 도형영역과 측정영역으로 구분하여 '10-나', '수학II'에 배정되었다.

즉, 제 6차 교육과정에서와 같이 제 7차 교육과정에서도 중학교까지는 유클리드 기하를 다루도록 하고 있고, 고등학교에서는 해석기하를 도입하여 방정식을 이용하여 도형의 성질을 파악할 수 있도록 하고 있다. 다만, '두 원의 위치관계'는 제 6차 교육과정에서는 중학교 3학년에서 유클리드 기하인 논증기하를 사용하여 대상을 다루고 증명하도록 되어 있었으나, 제 7차 교육과정에서는 30% 내용 감축이라는 작업 하에 이 내용이 해석기하를 다루는 고등학교로 옮겨와서 그 위치와 다루는 방법이 애매하게 되어 있다. '10-나' 단계에서 다루는 기하 영역의 내용은 다음과 같다.

· 두 점 사이의 거리
· 선분의 내분, 외분
· 직선의 방정식
· 두 직선의 평행조건과 수직 조건
· 점과 직선 사이의 거리
· 원의 방정식
· 두 원의 위치 관계
· 평행이동과 대칭이동

한편, '수학Ⅱ'에서는 이차곡선 단원에서 포물선, 타원, 쌍곡선을, 공간도형에서 직선, 평면의 위치 관계, 평행과 수직, 정사영을 다루고, 공간좌표 단원에서 점의 좌표, 두 점 사이의 거리, 선분의 내분점과 외분점, 구의 방정식 다루며, 벡터 단원에서 벡터의 연산, 벡터의 내적, 직선과 평면의 방정식에 대하여 다루고 있다.

2.5 평가 및 토론 문제

(1) 평면상에 좌표로 주어진 두 점을 지나는 직선의 방정식을 행렬식을 이용하여 구하는 방법에 대하여 논의하여라.

(2) 세 꼭지점이 주어진 삼각형이나 세 직선으로 만들어진 삼각형에서 내접원의 방정식을 구하는 방법에 대하여 논의해 보아라.

(3) 종이접기를 통하여 구한 도형이 타원, 포물선, 쌍곡선이 되는 이유에 대하여 논의해 보아라.

(4) 직교좌표축과 평행인 직선이 아닌 직선을 축으로 가지는 포물선의 방정식을 구하는 방법에 대하여 논의해 보아라.

(5) 원을 좌표축의 방향으로 확대하거나 축소하면 타원이 됨을 논의해 보아라.

(6) 쌍곡선 위의 한 점으로부터 그 쌍곡선의 두 점근선까지 거리의 곱은 일정함을 증명하여라.

(7) 가로축이 축과 평행이 아닌 직선 위에 있는 쌍곡선의 방정식을 구하는 방법에 대하여 논의하여라.

(8) 이차곡선은 원, 타원, 쌍곡선, 포물선의 4종류뿐임을 논의해 보아라.

(9) e의 정의에 대하여 알아보아라.

(10) '미분적분학' 등의 교재를 참고하여 지수함수와 로그함수의 정의를 살펴보고, 이들이 역함수 관계에 있음을 논의하여라.

(11) 심장형, 리마손, 아르키메데스의 나선 등에 대하여 조사하고, 그 그래프를 그리는 방법에 대하여 논의하여라.

(12) 이심률의 편리한 점에 대하여 논의하여라.

(13) 인터넷에서 여러 가지 평면곡선에 대하여 찾아보아라.

(14) 공간에서 세 점이 동일 직선 위에 있을 필요충분조건을 행렬의 개념을 사용하여 나타내는 방법에 대하여 논의해 보아라.

(15) 벡터의 내적과 외적에 대하여 조사하고, 이를 이용하여 평면의 방정식을 유도하는 방법에 대하여 논의하여라.

3. 미분기하학

3.1 성격과 목표

기하학을 논리적으로 기술하려는 시도는 고대 그리스 시대부터 시작되었고, 유클리드에 의하여 기하학 원론이 완성되었다. 그러나 제 5공리인 평행선 공리로 인하여 많은 비판이 있었고, 이로 인하여 비 유클리드 기하학이 탄생하였다.

유클리드 기하에서 비롯한 기하학이 공리기하 및 변환군을 이용한 기하를 거쳐서 위상기하의 연구로 발전하게 되었는데, 위상 수학은 유클리드 기하를 일반화하여 공리적 체계로서의 공간의 개념을 도입한 기하이다. 이것은 19세기 말에 도입되어 기하학에 새로운 분야를 열어 놓았으며, 위상 수학의 여러 이론은 현대 기하뿐 아니라 해석학 및 대수학에서도 도입되어 각 학문의 기반을 이루고 있다.

해석학과 대수학의 고도의 방법이 쓰이는 현대의 기하학은 다양체의 기하학이라고도 불리게 되었다. 그 중 미분기하학은 해석학의 미분의 개념을 이용하여 다양체(도형)의 기하적인 성질을 연구하는 학문이다.

미분기하에서 다루는 대상은 대수학적인 방법으로 기하학을 연구하는 해석기하의 대상을 기초로 하고 있는데, 해석기하는 유클리드 3차원 공간 속의 곡선과 곡면을 방정식을 이용하여 표현해 보고, 또 각 도형의 성질을 방정식을 사용하여 살펴보는 기하학이다. 이것은 17세기에 데카르트가 좌표평면을 도입함으로써 시작되었으며, 현재의 대수기하의 초보적인 단계이다.

유클리드 기하와 해석기하, 미분기하의 연구 방법론적인 특징을 살펴보면, 우선 유클리드 기하에서는 논리의 전개 방법이 추론이라는 증명의 형식을 띠었던 것에 비하여, 해석기하에서는 추론에서 나아가 이를 대수적인 수식을 이용하여 보다 간편하게 다룰 수 있도록 한 것이 특징이다. 한편, 미분기하에서는 국소적인 범위에서의 변화를 파악할 수 있는 비분의 개념을 도입하여 도형의 형태와 성질을 연구하고자 하였다.

미분기하학의 강좌에서는 3차원 유클리드 공간 속에서의 곡선에 대한 기초 개념과 곡률 등을 다루고 곡면에서의 기본 형식과 가우스 곡률 등에 대하여 다루며, 너무 깊게 다루지는 않도록 한다.

본 강좌는 미적분학을 배운 학생을 대상으로 전개되고 있지만, 선형대수나 위상수학의 개념도 약간씩 등장하고 있으며, 벡터값을 갖는 다변수함수를 잘 다룰 수 있으면 보다 쉽게 접근할 수 있다.

3.2 내용체계

곡선	· 정칙곡선 · 호의 길이
곡률과 비틀림	· 접선과 법평면 · 곡률 · 주법선과 종법선 · 비틀림
곡선론	· Frenet 방정식 · 신개선과 축폐선 · 접촉이론
곡면	· 정칙 매개변수 표현 · 단순곡면 · 접선과 법선
기본형식	· 제 1기본형식 · 제 2기본형식
곡면 곡선의 곡률	· 법곡률 · 주곡률과 주방향 · 가우스곡률과 평균곡률
본질적 기하학	· 등장사상 · 측지적 곡률 · Gauss-Bonnet의 정리

3.3 미분기하의 내용

가. 곡선

(1) 정칙 매개변수 표현과 정칙곡선의 뜻을 이해한다.

(2) 주어진 정칙곡선의 호의 길이를 구할 수 있다.

(3) 자연표현의 뜻을 이해하고 주어진 곡선을 자연표현으로 나타낼 수 있다.

<용어와 기호> 정칙 매개변수 표현, 매개변수 교환 가능, 정칙곡선, 단순곡선, 정칙호, 끝점, 호선분, 길이가 유한, (호의) 길이, 자연표현

나. 곡률과 비틀림

(1) 단위 접선벡터, 접선, 법평면의 뜻을 이해한다.

(2) 주어진 곡선의 한 점에서의 접선과 법평면을 구할 수 있다.

(3) 곡률과 곡률반경의 뜻을 이해한다.

(4) 주어진 곡선의 한 점에서의 곡률과 곡률반경을 구할 수 있다.

(5) 단위 주법선, 접촉평면, 종법선, 전직평면의 뜻을 이해한다.

(6) 주어진 곡선의 한 점에서의 주법선, 종법선, 접촉평면, 전직평면을 구할 수 있다.

(7) 비틀림의 뜻을 이해하고, 주어진 곡선의 한 점에서의 비틀림을 구할 수 있다.

<용어와 기호> 단위 접선벡터, 접선, 법평면, 곡률벡터, 곡률, 단위 주법선벡터, 주법선, 접촉평면, 단위 종법선벡터, 동삼면체, 종법선, 전직평면, 비틀림, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{k}$, κ, ρ, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$, τ

다. 곡선론

(1) Frenet 방정식의 뜻을 이해하고 주어진 곡선의 Frenet 방정식을 구할 수 있다.

(2) 특정한 곡률과 비틀림으로 곡선의 모양을 판별할 수 있다.

(3) 신개선과 축폐선의 뜻을 이해하고 주어진 곡선의 신개선을 구할 수 있다.

(4) n점 접촉의 뜻을 이해하고, 주어진 곡선과 n점 접촉하는 곡선이나 곡면의 방정식을 구할 수 있다.

<용어와 기호> Frenet 방정식, 자연방정식, 표준적

표현, 접선곡면, 신개선, 축폐선, n점 접촉, 접촉곡면, 접촉곡선

라. 곡면

(1) 곡면의 정칙 매개변수 표현을 이해하고 주어진 매개변수 표현이 정칙인지 아닌지를 판별할 수 있다.

(2) 단순곡면의 뜻을 이해하고 단순곡면이 되는지 아닌지를 판별할 수 있다.

(3) 교환 가능한 매개변수 변환의 뜻을 이해한다.

(4) 주어진 곡면 위의 한 점에서의 단위 법선벡터와 접평면의 방정식을 구할 수 있다.

<용어와 기호> (곡면의) 정칙 매개변수 표현, u 매개변수 곡선, v 매개변수 곡선, 위선, 경선, 좌표 조각사상, Monge 조각사상, 단순곡면, 기저, 교환 가능한 매개변수 변환, 접한다. 접평면, 단위 법선벡터, 원환체, $\boldsymbol{T}$

마. 제 1기본형식과 제 2기본형식

(1) 제 1기본형식과 제 1기본계수의 뜻을 이해하고, 주어진 곡선의 제 1기본형식을 구할 수 있다.

(2) 제 1기본계수와 관련된 부등식을 이해한다.

(3) 곡선의 길이와 곡면의 넓이를 제 1기본계수를 사용하여 구할 수 있다.

(4) 제 2기본형식과 제 2기본계수의 뜻을 이해하고, 주어진 곡선의 제 2기본형식을 구할 수 있다.

(5) 제 2기본계수를 이용하여 곡면의 국소적 분류를 할 수 있다.

<용어와 기호> 제 1기본형식, 제 1기본계수, 제 2기본형식, 제 2기본계수, 접촉 포물면, 타원점, 쌍곡점, 포물점, 평탄점, I, E, F, G, II, L, M, N

바. 곡면 위의 곡선의 곡률

(1) 법곡률벡터와 법곡률의 뜻을 이해하고, 곡면 위의 곡선에 있는 한 점에서의 법곡률을 구할 수 있다.

(2) 주곡률과 주방향, 제점의 뜻을 이해하고 주어진 곡면의 한 점에서의 주방향을 결정할 수 있다.

(3) 주곡률이 되기 위한 필요충분조건과 주방향이 되기 위한 필요충분조건을 이해한다.

(4) 평균곡률과 가우스곡률의 뜻을 이해하고, 주어진 곡면 위의 곡선에 있는 한 점에서의 평균곡률과 가우스곡률을 구할 수 있다

(5) 주어진 곡면의 곡률선을 구할 수 있다.

<용어와 기호> 법곡률벡터, 법곡률, 법단면, Dupin의 지시곡선, 주곡률, 주방향, 제점, 타원적 제점, 포물적 제점, 평균곡률, 가우스곡률, 곡률선, Rodrigues의 공식, $\boldsymbol{k}_n$, κ_n, H, K

사. 본질적 기하학

(1) 등장사상, 최소 거리의 호의 뜻을 이해하고, 특수한 경우에 최소 거리의 호를 결정할 수 있다.

(2) 측지적 곡률의 뜻을 이해하고 곡률, 법곡률, 측지적 곡률 사이의 관계를 이해한다.

(3) 측지선의 뜻을 이해하고 주어진 곡면의 측지선을 결정할 수 있다.

(4) Gauss-Bonnet의 공식과 정리를 이해하고 이를 적용할 수 있다.

<용어와 기호> 등장사상, 등장적, 본질적 성질, 본질적 기하학, 본질적 거리, 최소 거리의 호, 측지적 곡률, 측지적 곡률벡터, 측지선, 측지적 삼각형, Gauss-Bonnet의 정리, 전곡률, κ_g

3.4. 교수-학습 과정

가. 강좌의 소개

미분기하학 강좌에서는 3차원 유클리드 공간 속에서의 곡선과 곡면에 대한 미분기하의 기본적인 개념과 이론을 다루고 있는데, 너무 깊게 다루지는 않는다. 우선, 벡터의 기본 이론과 단일 변수에 대한 벡터 해석을 다루고, 곡선에 대한 기초 개념 및 곡률, 접촉이론 등을 다룬다. 또, 곡면의 정의 및 곡면에서의 기본형식과 곡면의 국소적 분류, 가우스 곡률 등에 대한 이론도 배운다 (O'Neill, 1996; Lipschutz, 1993; Hsiung, 1981 참조).

나. 선수 과목

이 강좌는 미분적분학을 배운 학생이 쉽게 접근할 수 있도록 되어 있다. 그러나 선형대수에서의 행렬, 벡터의 내적과 외적 등의 기본 사항 등은 자주 사용되며, 다변수함수에서의 미분이나 테일러급수 전개 등도 가끔씩 사용되므로 이 부분을 확실히 해 두면 보다 쉽게 배울 수

있다. 또, 복소수함수론이나 위상수학의 내용도 조금씩 언급되고 있으므로 이 과목도 이수한 학생은 별 무리없이 이 강좌를 수강할 수 있다. 그러나 복소수함수론이나 위상수학과 관련된 내용은 몇 가지 개념에 대한 이해만으로 넘어갈 수 있으므로 그 내용은 크게 신경쓰지 않아도 된다.

다. 교수-학습 방법

1) 교수-학습 방법 및 주안점

(1) 본 강좌에서는 선형대수학에서 다루는 벡터의 기본 개념과 내적, 외적 등이 자주 사용되므로 이 내용은 먼저 복습한 후에 다루도록 한다.

(2) 벡터값을 갖는 다변수함수에 대한 미분과 테일러 급수 전개, 위상수학에 관련된 몇 가지 사항 등은 해당 부분에서 간단히 언급하는 정도로 다룬다.

(3) 본 강좌에서는 3차원 공간상의 곡선과 곡면의 모양이나 성질을 미분을 통하여 살펴보고자 하는 내용을 다루는데, 너무 깊이 들어가지 않도록 하고 많은 예를 보여줌으로써 이해를 돕도록 한다.

(4) 공간상의 곡선은 곡률과 비틀림으로 완전히 결정됨을 강조한다.

(5) 공간상의 곡면은 제 1기본계수와 제 2기본계수를 사용하여 결정할 수 있으나, 텐서 해석을 이용해야 하므로 본 강좌에서는 간단히 언급만 한다.

(6) 가우스곡률은 비유클리드 기하와 관련지어 설명한다.

2) 교육공학의 활용

(1) 미분기하학과 관련된 인터넷 사이트는 다음을 참조한다.

- http://math.berkeley.edu/~sethian/level_set.html
- http://www.nas.com/~unkel/math.htm
- http://www.geom.umn.edu/

(2) 특히, 주곡률과 주방향은 GIF나 MPEG 파일을 이용하여 보여줌으로써 이해를 도울 수 있다.

(3) 타원면, 안장점, 원숭이 안장점 등은 구체적인 모형을 제시함으로써 그를 통하여 이해하도록 지도한다

(4) Mathematica나 Maple 등을 이용하여 공간상의 곡선이나 곡면을 구체적으로 그려보아서 개념의 이해를 도울 수 있다.

라. 타 과목과의 관련성

(1) 미분기하학에서 많이 다루는 것은 선형대수에서 다루는 벡터의 기본 사과 내적, 외적에 대한 내용이므로 이 부분은 복습해 두는 것이 좋다.

(2) 미분적분학에서 다루는 벡터값을 갖는 다변수함수의 미분은 곡면론의 주요 도구로 사용되고 있다.

(3) 미분적분학이나 복소수함수론에서 다루는 테일러 급수 전개는 곡면의 국소적 분류를 하는데 사용된다.

(4) 복소수함수론이나 위상수학에서 다루는 개집합, 연결성, 오일러 표수 등은 곡면론에서 사용되고 있다.

(5) 가우스곡률와 Gauss-Bonnet의 정리는 유클리드 기하와 비유클리드 기하의 특징를 구별하는데 사용될 수 있다.

(6) 미분기하학에서 다루는 대상은 미분다양체의 개념으로 확대되며, 대학원 수준에서 배우는 리만기하학으로 연결된다.

마. 초·중등 학교 수학과 교육과정과의 연계

제 7차 교육과정에서 미분기하학과 연계되고 있는 부분은 심화선택과정으로 분류되고 있는 '수학II'와 '미분과 적분'이다. 각 부분에서 '미분기하'와 관련된 내용을 살펴보면 다음과 같다.

<수학II>
- 다항함수의 미분법
- 다항함수의 적분법
- 이차곡선
- 공간도형
- 공간좌표
- 벡터

<미분과 적분>
- 여러 가지 함수의 미분법
- 도함수의 활용
- 부정적분
- 정적분
- 정적분의 활용

3.5 평가 및 토론 문제

(1) 위상수학에서 'topologist' sine curve'가 사용된 예에 대하여 조사하고 그 그래프를 정확히 그리는 방법에 대하여 논의하여라.

(2) '미분과 적분'에서 호의 길이를 구하는 방법을 어떻게 설명하고 있는지 조사하여라.

(3) 수학의 여러 교과에서 정칙(regular)이 나오는 부분을 찾아서 조사하여 보아라.

(4) Mathematica나 Maple 등을 이용하여 공간상의 곡선을 구체적으로 그려보는 방법에 대하여 논의하여라.

(5) 곡선의 위치는 무시할 때, 곡선의 집합과 곡률과 비틀림의 쌍으로 이루어진 집합 사이에는 일대일 대응관계가 있음을 여러 가지 곡선의 예를 통하여 확인하여라.

(6) 2차 곡면의 종류를 조사하고 이렇게 분류하는 방법에 대하여 논의하여라.

(7) 유클리드 기하학과 비유클리드 기하학의 특징에 대하여 조사하고, 가우스곡률의 역할에 대하여 논의하여라.

(8) 주곡률과 주방향은 GIF나 MPEG 파일을 인터넷에서 찾아보고, 그 그림에 대하여 논의하여라.

(9) Euler 표수에 대하여 조사하고, 몇 가지 곡면에 대하여 Euler 표수를 계산하는 방법에 대하여 논의하여라.

(10) 비유클리드 기하학에서의 삼각형의 내각의 합에 대하여 조사하고 발표하여라.

(11) Gauss-Bonnet의 공식과 비유클리드 기하학에서의 삼각형의 내각의 합과의 관계에 대하여 논의하여라.

V. 결 론

현재 각 대학의 사범대학에서는 제각기 다르게 운영되고 있는 기하학 강좌의 내용은 너무 다양하여 어느 정도의 기준에 의하여 통일된 내용을 제시할 필요가 있다. 따라서 본고에서는 중등 교사 양성을 위한 기하 영역 교육과정을 중등 교사로서 필수적으로 갖추어야 할 기본 지식이 포함되도록 하여 제시하였다.

신현용 외(2003)에서는 기하 영역 강좌로서 '기하학I', '기하학II', '미분기하학', '위상수학'의 4강좌를 제시하였으나, 본고에서는 '위상수학'을 제외한 나머지 3개 강좌에 대한 교육과정을 다음과 같이 제시하였다.

'기하학I' 강좌에서는 힐베르트가 제시한 유클리드 기하의 공리적 접근을 다루고 이를 바탕으로 비유클리드 기하의 종류에 대하여 알아본다. 이 때, 유클리드 기하에서의 세부적인 증명 내용 등은 자세히 다루지 않고, 강좌의 후반부에서는 아핀평면과 사영평면에 대하여 유한 기하를 위주로 하여 다루고, 클라인에 의한 기하학의 분류를 다룬다.

'기하학II' 강좌에서는 해석기하를 다룬다. 해석기하는 유클리드 3차원 공간 속의 곡선과 곡면을 방정식을 이용하여 표현해 보고, 또 각 도형의 성질을 방정식을 사용하여 살펴보는 기하학으로서, 유클리드 기하에서의 도형의 개념을 명확하게 해 준다. 본 강좌에서는 평면에서의 직선, 원추곡선의 개념 및 성질을 살펴보고, 2차곡면을 분류해 본다.

'미분기하학' 강좌에서는 3차원 유클리드 공간 속에서의 곡선과 곡면에 대한 미분기하의 기본적인 개념과 이론을 다루고 있는데, 너무 깊게 다루지는 않는다. 우선, 벡터의 기본 이론과 단일 변수에 대한 벡터 해석을 다루고, 곡선에 대한 기초 개념 및 곡률, 접촉이론 등을 다룬다. 또, 곡면의 정의 및 곡면에서의 기본형식과 곡면의 국소적 분류, 가우스 곡률 등에 대한 이론도 다룬다.

본고에서 제시된 교육과정은 하나의 '안'으로서, 이 강좌는 한 학기 또는 두 학기에 걸쳐서 강의가 이루어질 수 있으며, 각 강좌에서 다루는 세부적인 내용이나 평가와 관련된 문항, 교수-학습 방법 등은 앞으로도 많은 연구를 거쳐서 보완할 필요가 있을 것이다.

참 고 문 헌

교육부 (1998). 수학과 교육과정, 제 7차 교육과정 교육부 고시 제1997-15호 [별책 8], 대한교과서.

구광조 · 오병승 (1991). 기하학 개론, 서울: 경문사.

권석일 · 홍진곤 (2003). 기하 학습-지도에서 직관의 역할에 대한 연구, 대한수학교육학회 2002년도 동계 수학교육학 연구발표대회 논문집, pp.599-616.

김영국 · 박기양 · 박규홍 · 박혜숙 · 박윤범 (2000). 학교수학의 각 영역에 대한 선호도 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **39(2)**, pp.127-144, 서울: 한국수학교육학회.

나귀수 (1996). 기하 교육에서 공간적 사고의 중요성에 대한 고찰, 대한 수학교육학회 논문집 **6(1)**, pp.189-

201

대한수학교육학회 (1998). *Principles and Stanfords for School Mathematics : Discussion Draft*(NCTM), 1998년 동계 집중세미나 자료집, 서울: 대한수학교육학회

신현용 외 (2003). 연구 보고서 '교사 양성 대학 수학교육과 교육과정 및 교수-학습 방법 개발' **제 5권**, 서울: 한국수학교육학회

신현용 (2003). 교사 양성 대학 수학교육과 교육과정 및 교수-학습 방법 개발에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **42(4)**, pp.431-461, 서울: 한국수학교육학회.

박규홍 (2002). 해석기하학, 도서출판 신성.

박승안 (1993). 사영평면과 아핀평면, 청문각.

박규홍 외 (2002). 고등학교 수학II 교사용 지도서, 교학사.

박혜숙 (2003). 교사 양성기관에서의 기하교육, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **15**, pp.17-22, 서울: 한국수학교육학회.

백용배 (1985). 현대기하학, 교학연구사.

수학교재 편찬위원회 (1996). 미분적분학과 해석기하학, 청문각.

엄상섭 (1978). 일반 기하학, 교학 연구사.

우정호 외 (2002). 고등학교 수학II 교사용 지도서, 대한교과서.

우정호 · 민세영 · 박미애 (2003). 역사발생적 수학교육 원리에 대한 연구: Branford를 중심으로, 대한수학교육학회 2002년도 동계 수학교육학 연구발표대회 논문집, pp.617-634. 서울: 대한수학교육학회

이성헌 (1963). 해석기하학, 진명문화사.

최대호 (2000). 미분기하학, 서울: 경문사.

한국교육과정평가원 (2000). 수학과 교육목표 및 내용 체계화 연구, 한국교육과정평가원 연구 보고 RRC 2000-3

한국교육과정평가원 (2001). 수학과 교육목표 및 내용 체계 연구(II), 한국교육과정평가원 연구 보고 RRC 2001-9

황혜정 (2000). 미간행 원고

Branford, B. (1908). *A Study of Mathematical Education*, Oxford: Clarendon Press.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics - An Educational Approach*. D. Reidel Publishing Company.

Geddes, D. & Forthunato, I. (1993). Geometry : Research and classroom activities, in *Research Ideas for the Classroom*(Owens, D. T. ed.), NCTM.

Greenberg(이우영 역) (1988). 유클리드 기하학과 비유클리드 기하학, 서울: 경문사.

Hsiung (1981). *A first course in Differential Geometry*, Wiley

Lipschutz(전재복 편역) (1993). 미분기하학 개론, 서울: 경문사.

Mlodinow(전대호 역) (2002). 유클리드의 창: 기하학 이야기, 까치

O'Neill(이동훈 · 한동승 옮김) (1996). 미분기하학, 서울: 경문사

小關照純 (2001). 改訂學習指導要領に見る図形指導の課題. 數學教育, **518**, pp.10-14.

小平邦彦 (1991). 幾何への誘い. 東京: 岩波書店.

渡辺忠信 (2000). NCTMスタンダード:その背景と今後の展開、數學教育 516, pp.106-109

Development of Curricula on Geometry Related Courses for Training of Mathematics Teacher of Secondary Schools

Park, Hye Sook
Dept. of Mathematics Education, Seowon University, Chongju 361-742, Korea
E-mail: hyespark@seowon.ac.kr

In this paper, we propose programs of geometry related courses for the department of mathematics education of teacher training universities. We suggest 4 courses, 'Geometry I', 'Geometry II', 'Differential Geometry', 'Topology' as geometry related courses in Shin et. al.(2003). Among those 4 courses, we state desirable direction of curricula on 3 courses, 'Geometry I', 'Geometry II', 'Differential Geometry' in this paper.

* ZDM Classification : B55, G15
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97B50, 97C70
* Key Word : teacher training, geometry education, curriculum.