韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2003, 11. 제 42권, 제 4호, 481-501.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2003, Vol. 42, No. 4, 481-501.

교사 양성 대학에서의 대수 영역의 학습과 지도

신 현 용 (한국교원대학교)

Ⅰ. 들어가며

교사 양성의 특수 목적을 가진 대학의 교육과정과 그 운영은 다른 목적 대학과는 차별화 되어야 한다는 요구가 있어 왔고, 근래에 들어 이러한 요구에 부응하고자 하는 노력과 연구가 국내외에서 활발히 행해지고 있다.

신현용(2003)에서는 교사 양성 대학 수학교육과 교육과정 및 교수·학습 방법에 관하여 전반적인 문제를 논하였다. 본고에서는 거기서 제시된 원칙과 방향에 따른 구체적인 방안을 대수 영역의 예를 통하여 제시하고자 하는데, 먼저 대수 영역의 목표와 내용 등에 관해서는 간략히 언급하고 신현용 외(2003)에 소개된 내용(대수 영역) 중 특징적인 내용만을 소개하도록 한다. 본고에서는 집합론, 선형대수학과 응용, 정수론과 응용, 현대대수학Ⅰ, 그리고 교사를 위한 수리철학 강좌에 관하여 논의한다[1].

요즈음 정보화 사회의 요구에 따라 암호학(cryptography, 정보보호 이론)과 부호이론(coding theory, 정보통신 이론) 등을 다루는 응용대수학(applied algebra)이 여러 대학에서 활발하게 강의되고 있으므로 이러한 강좌를 교사양성대학에서도 개설할 필요가 있으나 신현용 외(2003)[2]에서는 이 강좌를 별도로 제시하지 않고, 기존의 강좌에 적절히 분산하여 제시하였다. 예를 들어, 암호학의 기본 개념이나 기법은 정수론과 응용에서, 부호이론의 기본 개념이나 기법은 선형대수학과 응용에서 소개한다.

본고에 제시되는 안은 전적으로 저자의 취향에 따라 구성된 것이다. 신현용(2003)에 제시된 원칙과 방향에 따른 구체적인 방안은 본고에서 소개한 내용과는 다소 다르게 제시될 수도 있다.

Ⅱ. 대수 영역의 목표와 내용

1. 대수 영역의 목표

대수 교육의 목표는 여러 측면에서 논할 수 있을 것이다. 정신도야성, 실용성, 문화적 가치 및 심미성 측면에서의 대수 영역의 목표에 관해서는 신현용 외(2003)를 참고한다.

2. 학교급별 대수 영역의 목표

학교 수학에서의 대수 영역 내용을 개략적으로 살펴보면 대략 다음과 같다.

2.1 초등학교

다양한 경험을 통하여 수 개념을 형성하도록 한다. 덧셈과 곱셈 등 연산의 이해, 기초 계산 능력을 기르는 데 중점을 둔다. 이러한 과정에서 수학의 유용성을 인식하고, 수의 활용 가치를 알 수 있도록 한다.

2.2 중학교

자연수의 개념이 정수, 유리수, 실수 개념으로 확장되며, 이러한 수에 관한 연산 능력을 기른다. 또한 문자를 사용하여 여러 가지 상황을 간단한 식으로 나타냄으로써 대수의 가치를 인식하게 한다.

---

* 2003년 7월 투고, 2003년 11월 심사 완료.
* ZDM분류 : B5
* MSC2000분류 : 97B50
* 주제어 : 교사교육, 집합론, 선형대수학, 정수론, 현대대수학, 수리철학.

1) 본 저자는 신현용 외(2003)에서 본 글에서와 동일한 방향에서 '현대대수학Ⅱ,' '초등교사를 위한 수학기초론,' 그리고 '초등교사를 위한 대수학'도 제시하였다.
2) 이 보고서의 모든 내용이 http://www.teacheredu.co.kr에 탑재되어 있다.

2.3 고등학교

고등학교에서는 집합과 명제를 이해하고, 이를 통하여 수학적 명제를 논리적으로 다룰 수 있게 한다. 실수에서 복소수로 수 개념을 확장하고 이에 관한 연산 능력을 배양한다. 다항식, 유리식, 무리식에 관한 연산도 할 수 있도록 하고, 이차 방정식 등 다양한 방정식의 근에 관하여 이해하게 한다.

2.4 교사 양성 대학교

대수 영역이 초·중등학교의 교육과정에서 차지하는 비중은 다른 어느 영역보다도 크기 때문에 사범대학과 교육대학의 대수 영역 교과 내용학에 대한 연구는 중요하다. 대수 영역내의 각 교과에서 단편적인 지식을 얻는 것은 예비교사들에게는 그렇게 중요하지 않다. 학습 범위가 축소되더라도, 학교교육 현장의 내용과 관련된 수학의 본질을 이해하고, 역동적으로 살아있는 지식을 얻도록 하는 교육이 될 수 있도록 교육과정을 구성하도록 하여야 한다. 교육과정을 만들 때 학교수학과의 연계를 염두에 둠으로써, 사범대학과 교육대학 학생들이 수학교사가 되었을 때 수학의 본질을 이해하고 수학에 대한 긍정적인 자세와 자신감을 갖도록 해야 한다. 또한 최근에 강조되고 있는 정보통신 기술의 활용에 대한 적절한 이해와 학교 현장에서의 활용능력을 가질 수 있도록 한다.

3. 대수 영역의 내용

3.1 초·중등학교 교육과정의 내용에 관해서는 교육부(1997)를 참조한다.

3.2 대학에서의 대수 영역의 내용

신현용 외(2003)에서는 교사 양성 대학 수학과를 위한 대수 영역의 내용으로서 다음과 같은 5개 과목을 제안한다: 선형 대수학과 응용, 정수론과 응용, 현대 대수학 I, 현대 대수학 II, 학교수학을 위한 대수학. 본고에서는 다음 네 강좌의 내용만을 소개하기로 한다: 선형 대수학과 응용, 정수론과 응용, 현대 대수학 I, 현대 대수학 II.

III. 기본 방향

이 글에서 논의되는 강좌에 공통적으로 적용되는 원칙과 방향은 다음과 같다.

1. 각 강좌마다 필독서를 제시하고 수강 학기를 통하여 책을 읽고 각각의 보고서를 A4 한 장(10 pt) 이상의 분량으로 학기말까지 제출하게 한다. 추천도서는 당당교수마다 다를 수 있으므로 이 글에서는 구체적인 거명을 하지 않는다[3].

2. 각 강의를 시작하기 전에 지난 강의의 내용을 복습한다. 강의의 일관성을 기하고 학생들에게 동기를 부여하기 위함이다.

3. 매 주 퀴즈를 통하여 지난 강의나 토의 내용을 간단히 평가한다. 이를 통하여 학생들의 적극적인 참여를 유도한다. 퀴즈를 매 주 1 회씩 실시하면 12회 이상이 가능하다. 11회부터(2회 이상)는 보너스로 제공하여 끝까지 열심히 하도록 유도한다. 퀴즈 성적은 최종 평가에 반영된다.

4. 중간 또는 기말 평가에서, 중요한 개념과 그에 관련된 사항들을 종합적으로 이해하도록 하기 위하여 작문(에세이) 형식의 문항도 제시한다. 중심 용어들을 몇 개 제시하고 그 용어들을 모두 엮어서 글을 작성하게 하는 것이다.

5. 과제나 토의 문제의 제시, 그리고 평가 문항을 통하여 수학의 다른 영역과의 연관성을 충분히 인식하도록 유도한다.

6. 학교 수학과의 관련성을 충분히 인식하도록 강좌 내내 유념한다. 이는 모든 강의나 토의 내용에 수학 교육적 의식을 고취시키도록 유도할 것이다. 이 경우에도 과제나 토의 문제 또는 평가를 적절히 활용한다.

7. 강좌가 진행되는 동안 실생활, 수학사, 또는 수리철학적인 문제를 지속적으로 의식하도록 한다. 이 경우에도 과제나 토의 문제 또는 평가를 적절히 활용한다.

9. 강좌의 특성에 따라 인터넷이나 컴퓨터나 정보 환경의 이점을 충분히 활용하도록 한다. 이를 위하여 유용한 웹사이트를 소개하여, 스스로 찾아볼 수 있도록 한다. 이 때, 첨단 환경이 오·남용되지 않도록 유념하게 한다.

---

3) 신현용외(2003)에서는 각 강좌마다 필독서를 구체적으로 제시하였다.

10. 평가 방법을 다음과 같이 제시하여 중간 평가 이후에도 최선을 다 할 수 있도록 유도한다: 중간 평가 (X = 30 % 또는 40 % 중에서 수강생이 중간 평가 답안지에 표기함), 기말 평가 (Y = 30 % 또는 40 %, 단, X + Y = 70 %), 퀴즈 (10 %), 독후감 (15 %), 출석 (5 %). 이 때, 중간 평가와 기말 평가의 난이도를 같게 하고 문항 수(5 문항 권장)도 같게 할 필요가 있다. 이러한 평가 방법은 퀴즈채점, 독후감 확인 및 데이터 베이스 구축 등으로 담당 교수에 많은 시간적 부담을 주게 된다. 학과 차원에서 조교 등의 지원을 받을 필요가 있다.

11. http://home.freechal.com/parksahn/ 은 서강대학교 박승안 교수의 홈페이지이다. 대수학 전반에 걸친 그의 저서와 그 안의 많은 연습문제의 풀이가 탑재되어 있다. 본 글에서 논하는 강좌에서 소홀히 될 수 있는 내용의 깊이와 체계를 보충할 수 있는 유용한 곳이다.

Ⅳ. 집합론[4)]

1. 강좌의 성격

본 강좌에서는 수학에서는 물론 일상적인 우리 생활의 경험에서 집합의 개념을 자연스럽게 소개한다. 기본적인 수리 논리, 동치 관계, 순서 관계 등을 다룸으로 수학의 기초를 다진다. 특히 함수, 일대일 대응, 정렬 순서, 그리고 농도 등의 개념을 사용하여 유리수 집합과 실수 집합의 차이를 논하는 등의 예를 통하여 무한성에 관한 연구가 집합론의 주요 연구 대상임을 이해하게 한다. 선택 공리, 연속체 가설, 그리고 기수와 서수의 확장을 통하여 현대 수학의 여러 가지 특징을 이해하게 한다. 한편, 이 강좌에서 다루는 모든 개념이나 내용은 수학의 전 분야에서 유용한 역할을 함은 물론, 자연수 공리 등 수학의 기초적인 개념을 다룸을 설명하여 수학기초론으로서의 집합론을 이해하게 한다. 또, 필독서나 관련 글들을 소개 또는 직접 제시하여 실생활과 학교 수학에서의 집합론을 이해하게 한다.

2. 강좌의 내용

2.1 이 강좌에서 다루는 내용은 다음과 같다.

Ⅰ. 서론	
Ⅱ. 기본적인 수리 논리	
Ⅲ. 집합의 연산	
관계	Ⅳ. 동치 관계
	Ⅴ. 함수
	Ⅵ. 순서 관계
Ⅶ. 역설	
무한의 세계	Ⅷ. 가부번 집합
	Ⅸ. 선택 공리
	Ⅹ. 자연수
	Ⅺ. 기수
	Ⅻ. 순서수
Ⅷ. 종합	

2.2 'Ⅰ. 서론'은 다음과 같은 내용으로 구성한다.

가. 집합론의 '무한의 세계 탐구 방법론'과 '수학기초론'으로서의 성격을 설명한다.

나. 집합론과 관련하여 수학사를 개관한다.

다. 이 강좌에서 다루게 될 주요 내용을 소개한다.

라. 적절한 참고 도서를 제시하여 학교에서의 집합론 교육의 문제를 살펴보게 한다.

2.3 'Ⅳ. 동치 관계,' 'Ⅴ. 함수,' 그리고 'Ⅵ. 순서 관계'는 '매우 중요한 관계(relation)의 예'라는 틀에서 다룬다. 수학의 모든 분야에서 기본적으로 활용됨을 주지시킨다. 함수의 여러 가지 역할 중에서 '두 수학적 대상(집합)을 비교하는 방법' 측면을 강조한다. 함수의 이러한 면은 대수적인 구조(군, 환, 벡터 공간 등), 해석적인 또는 위상적인 집합, 그리고 기하학 등 각각의 상황에 맞는 함수를 필요로 하게 됨을 설명한다.

2.4 'Ⅶ. 역설'에서는 러셀의 역설 내용과 그 해소 방안을 다룬다. 이 과정에서 집합론의 발전 과정을 살펴보고, 제논의 역설 등 다양한 역설도 간략히 소개한다. 또, 적절한 도서나 읽을 거리를 소개하여 수학교육에서의 역

4) 이 강좌는 '대수 영역'이라고 할 수 없지만, 신현용 외(2003)에서 본 저자가 집합론의 교육과정과 교수-학습방법을 개발하였고, 강좌의 개발 원칙과 방향이 이 글에서 논하는 대수 영역 강좌의 경우와 크게 다르지 아니하므로 이 글에서 논한다.

설의 활용 등도 살펴보게 한다.

2.5 'Ⅷ. 가부번 집합' 부터 'Ⅻ. 순서수'까지의 내용이 이 강좌의 핵심이다. 이 부분에서 집합론의 힘과 유용성, 그리고 특성을 알 수 있다. 필요에 따라 전반적인 이해에 중점을 두고, 자세한 증명은 생략하도록 한다. 적절한 참고도서를 제시하여 제논의 역설과 무한과의 관계를 조사하게 한다. 이러한 과정을 통하여 모든 집합의 모임, 모든 기수의 모임, 모든 서수의 모임 등이 집합이 될 수 없음을 납득하게 한다. 한편, 수학에서 가장 중요한 집합이라고 할 수 있는 자연수의 개념을 페아노 공리를 통하여 이론적으로 도입하고, 점화정리를 소개한다. 기수와 서수는 각각 무한집합과 무한순서집합을 산술적으로 연구하기 위한 자연수와 유한 순서수의 확장으로 소개한다. 이 때, 유리수나 무리수와 같은 전통적인 수의 확장과는 새로운 측면에서의 자연수 개념의 확장으로 이해하게 하고, 자연수의 산술과 여러 가지 면에서 차이가 있음을 주목하여 무한성의 특성을 이해하게 한다.

2.6 마지막 장인 'Ⅷ. 종합'에서는 이 강좌에서 다룬 모든 내용을 종합적으로 정리하여 본 강좌의 목표를 분명히 이해하게 한다.

3. 강좌의 운영

3.1 신현용(2003)에서 제시한 기본 방향의 구현을 위하여 강의 외에, 다양한 과제 또는 토의문제를 제시한다. 몇 가지 예를 들면 다음과 같다.

가) 우정호(1998)를 참고하여 다음을 논하여라.

(1) 학생들에게 집합의 개념 및 성질을 소개할 때 일반적으로 자주 사용하는 것이 벤다이어그램이다. 그러나 벤다이어그램을 이용하여 지도할 때 주의해야 할 점은 무엇인가?

(2) 현재 학교수학에서 사용하고 있는 $\{x \mid p(x)\}$ 꼴의 조건제시법에 의한 집합의 표현 방법은 역설(paradox)을 야기시킬 수 있음을 논하여라.

(3) 학생들에게 무한의 개념을 지도할 때에는 충분한 예와 더불어 많은 설명이 필요하다. 끝이 보이지 않는 무한의 성질 때문에 자칫 직관적으로 논의를 이끌어나갈 수 있기 때문이다. 자연수 집합의 원소의 개수와 실수집합의 원소의 개수 중 후자가 전자보다 많다는 것을 학생들에게 어떻게 지도할 것인가?

나) 신현용 · 승영조(2002)를 참고하여 선택공리가 Banach-Tarski Paradox을 초래함을 알아보아라.

다) 무한개의 개구간의 교집합이 개구간이 아닌 집합 $\{0\}$이 되는 그러한 무한개의 개구간을 제시하여라. 이러한 사실이, 보통 학부 3학년 과정에 소개되는 '위상(topology)'의 정의에서 어떻게 반영되는지 살펴보아라.

라) 실생활에서 주목할 만한 '관계'로 다음을 들 수 있다: 성(姓, family name)에 의한 관계, 성(性, gender)에 의한 관계. 각각의 관계는 동치관계임을 확인하고, 각 분할에 대하여 토의하여 보자.

3.2 각 단원마다 계산을 요하는 연습 문제를 제시하여 집합론적 기법을 충분히 익히도록 한다.

3.3 역설, 괴델, 수학사 등에 관한 여러 웹사이트를 소개하여 강좌 내용에 관한 폭넓은 이해를 돕는다.

4. 평가문항의 예

신현용(2003)에서 제시한 평가 방향에 따라 기술, 증명과 같은 전통적인 형식의 문제 외에 다음과 같은 문항도 제시한다.

가) 다음 용어들을 모두 사용하여 작문하시오.

(1) 동치관계, 분할, 집합족, 상집합

(2) 상계, 상한, 하계, 하한, 유계

(3) 무한, 자연수, 실수, 농도, 연속체 가설

나) 다음 A 명제를 증명하기 위하여 B 명제를 증명하면 되는 정당성을 수리논리로 설명하여라.

A: 두 실수 x, y 에 대하여, $xy=0$ 이면, $x=0$ 또는 $y=0$ 이다.

B: 두 실수 x, y 에 대하여, $xy=0$ 이고 $x\neq 0$ 이면, $y=0$ 이다.

V. 선형대수학과 응용

1. 강좌의 성격

본 강좌에서는 유클리드 벡터 공간을 중심으로 선형성을 이해하게 한다. 중학교 과정에서의 일차 연립방정식으로부터 행렬, 행렬식, 역행렬 등을 자연스럽게 도입하여 수학에서의 선형대수학의 실용성과 유용성을 깨닫게 한다. 이러한 맥락에서 기초적인 부호 이론을 소개하여 정보 수학을 접하게 하고, 기하학이나 미분방정식, 그리고 이산 수학 등 수학의 다른 분야에서의 선형대수학의 효용성을 알게 한다. 이 강좌에서 다루는 내용의 심도 있는 논의는 김웅태・박승안(1994), 박승안(2000, 2003) 등을 참고하여 보충하게 한다.

2. 강좌의 내용

2.1 이 강좌에서 다루는 내용은 다음과 같다.

I. 서론	
II. 선형성	
행렬과 행렬식	III. 행렬
	IV. 행렬식
	V. 여인수 전개
선형 구조	VI. 벡터 공간
	VII. 선형 사상
응용	VIII. 고유치
	IX. 내적 공간
	X. 정보 통신

2.2 'I. 서론' 에서는 다음과 같은 내용을 다룬다.
가. 강좌에 관한 종합적인 소개
나. 선형성의 특징
다. 대수학과 기하학이나 해석학 등 다른 수학 영역과의 차이

2.3 'II. 선형성'에서는 $\mathbb{R}^n$ 과 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ 과 같이 친숙한 집합을 통하여 벡터, 스칼라 배의 개념을 직관적으로 소개한다. 'VI. 벡터 공간'에서 선형성을 비교적 상세히 다룬다. 이 때, 선형성의 여러 가지 특성에 주목한다.

2.4 'III. 행렬,' 'IV. 행렬식,' 그리고 'V. 여인수 전개'는 이 강좌의 핵심이다. 행렬과 행렬식의 정의와 정리, 더 나아가 다양한 응용을 소개한다. 예를 들어, 다음은 삼각함수, 해석기하학, 그리고 행렬식이 함께 어울려 도형의 넓이나 방정식 등을 효과적으로 표현할 수 있음을 알게 한다.

(1) 세 점 $O(0, 0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 을 꼭지점으로 이루어지는 삼각형의 넓이는 다음과 같이 주어짐을 증명하여라: $S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

(2) 위 사실을 이용하여 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 을 꼭지점으로 이루어지는 삼각형의 넓이는 다음과 같이 주어짐을 증명하여라: $S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

(3) 위 사실을 이용하여 좌표 평면 위의 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)을 지나는 직선의 방정식은 다음과 같음을 논증하여라: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$.

(4) 좌표 공간 위의 세 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ 를 지나는 평면의 방정식은 다음과 같음을 증명하여라:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

2.5 'VI. 벡터 공간'과 'VII. 선형 사상'에서는 대수적인 구조로서의 선형 구조를 공리적으로 논의한다. 집합론에서 함수의 중요한 기능으로서 수학적 대상의 비교 기능을 언급한 바 있다. 선형사상은 대수적 구조, 즉 벡터공

간을 비교하는 도구로 소개하고, 일반적인 함수와 다른 선형사상만의 특징을 살펴본다. 이 때, 연속함수 등 다른 수학영역에서 유용한 함수도 간략히 언급한다. 이 강좌의 목표는 '대수적 구조'의 이해가 아니므로 선형구조에 대해서도 지나치게 엄밀히 다루지 않도록 한다.

2.6 'Ⅷ. 고유치'에서는 여러 가지 응용을 알아본다. 한 예를 들면 다음과 같다.

다음 연립 선형미분방정식을 고유치, 고유벡터, 대각화 등을 사용하여 푸시오.

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

2.7 ' Ⅸ. 내적 공간' 에서도 응용성 측면에 주목한다. 한 예를 들면 다음과 같다.

$C[-\pi, \pi]$: $[-\pi, \pi]$에서 연속인 실(real-valued) 함수 전체의 집합이다.

(1) 이 집합은 덧셈과 스칼라 배가 잘 정의되어 벡터 공간이 된다.

(2) $f,\ g \in C[-\pi, \pi]$, $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\ dx$라고 정의하면, $C[-\pi, \pi]$은 내적공간이다.

(3) 집합 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx \mid m, n \in N\right\}$은 정규직교집합이다.

(4) $f \in C[-\pi, \pi]$라고 하면 f는 위 함수들의 일차결합으로 표현된다.

2.8 'Ⅹ. 정보 통신'에서는 선형대수학의 활용으로서 부호이론을 소개한다. 오류탐지와 오류수정, 부호화와 복호와 기법 등에서 선형대수학이 어떻게 응용되는지 볼 수 있다. 다음의 예는 벡터 공간, 부분공간, metric 개념 등이 부호 설계에 어떻게 이용되는지를 알게 한다.

부호 C가 (n, M, d)-부호일 때, 다음이 성립한다.

(1) $d \ge s+1$이면 s비트까지의 오류를 검출할 수 있다.

(2) $d \ge 2t+1$이면 t비트까지의 오류를 수정할 수 있다.

3. 강좌의 운영

3.1 중·고등학교에서 배운 수직선, 좌표평면, 좌표공간을 통하여 벡터와 차원의 개념을 직관적이지만 자연스럽게 소개한다. 그 후 벡터 공간의 개념을 다소 자세히 소개하지만 지나치게 엄밀한 도입은 삼가 한다. 이 때, 고등학교 물리 시간에 배운 벡터와 스칼라 개념과의 차이를 언급하여 수학적 정의의 엄밀성과 일반성을 느끼게 한다. 일반적인 벡터 공간에서 일차 독립, 기저, 차원, 선형 변환 등 기초적인 개념과 성질을 살피되, 유클리드 공간에서의 구체적인 예를 통하여 그 의미를 분명히 이해하게 한다. 유클리드 벡터 공간과 함께 선형대수학에서 중요한 역할을 하는 행렬을 도입할 때에도 일상 생활에서 다양하게 야기되는 필요성과 예를 통하여 소개하고, 행렬의 집합에 덧셈과 스칼라 배를 정의하여 행렬의 집합을 벡터 공간으로 다룬다.

또, 행렬 공간의 다양한 대수적 성질을 살핀다. 특히, 정사각행렬의 공간에서는 곱셈을 정의하고 기본 연산, 역행렬 등 곱셈에 관련된 여러 가지 대수적 성질을 알아보되 기본 연산과 역행렬과의 관계에 주목한다. 정사각행렬의 행렬식을 정의하고 행렬식의 다양한 성질을 증명한다. 특히, 일차 연립방정식의 해, 행렬식, 그리고 역행렬 상호간의 관계를 강조한다.

집합론에서의 함수 개념, 미적분학에서의 연속 함수 등과 관련하여 벡터 공간(대수적 구조)에서의 선형 사상을 도입한다. 이 때, 추상대수학에서 다루는 군(환) 준동형사상도 미리 언급해도 좋을 것이다. 선형 사상과 행렬과의 밀접한 관계를 분명히 이해하게 하고, 대각화 가능한 행렬과 관련하여 고유치, 고유 벡터 등을 소개한다. 또, 내적 공간의 유용성을 살피고, 다양한 등식과 부등식, 직교 정규 기저, Fourier 계수 등에 대하여도 알아본다. 선형대수학의 응용으로서 벡터 해석, 미분방정식의 해법, 그리고 부호 이론 등을 간단히 언급한다.

3.2 대수학, 특히 선형대수학의 유용성을 인식하게 한다. 선형대수학은 미분방정식, 기하학, 응용대수학 등 수학의 전 분야에서 유용하게 활용된다. 정수론에서 접한 유한체(finite field, Galois field)와 유한체위에서의 유한 벡터 공간을 부호이론에 활용함으로써 대수학, 특히 선형대수학의 유용성을 실감할 수 있다. 사실, 정보 통신 분야에서 대두되는 중요한 문제 중의 하나는 통신 중에 발생할 수 있는 오류(소음) 문제를 해결하는 것이다. 즉, 오류가 발생을 했다면 오류발생 사실을 알아야 하고, 더 나아가 발생한 오류를 수정까지도 가능한 통신 체계가 요구된다. 이러한 문제를 다루는 학문이 부호이론(coding theory)이며, 대수적(algebraic) 부호 이론에서 선형대수학은 간단한 확률 이론, 추상대수학과 함께 중심적 역할을 함에 주목하게 한다.

3.3 초등학교 저학년 단계에서의 간단한 암산, 구구단 등의 기초 계산력의 중요성은 의심할 여지가 없다. 수학 교사는 수학 전문가로서 강도 높은 훈련을 대학 과정에서 받아야 한다. 대학 저학년 과정에서 수학 전반에 걸쳐 활용하게 되는 기초 계산력도 매우 중요하다. 선형대수학에서는 적지 않은 계산을 할 수 있도록 교육과정이 편성·운영되어야 한다. 벡터 공간의 대수적 구조는 추상대수학에서 자세히 다루고, 행렬과 행렬식, 행렬의 계급수, 고유치의 문제, 내적 등이 우선적으로 다뤄지고, 이와 관련된 계산이 충분히 연습되어야 한다.

3.4 다음과 같은 과제나 토의 자료를 제시한다.

가) 전대호(2002) 등을 참조하여 유클리드 기하학과 $\mathbb{R}^n$과의 관계, 유클리드 기하학과 Newton 물리학과의 관계 등을 다음 주제를 중심으로 알아보자.

(1) $\mathbb{R}^2$ 와 $\mathbb{R}^3$ 에서의 해석기하학(analytic geometry)
(2) 해석기하학을 통한 유클리드 기하학의 발전
(3) $\mathbb{R}^3$ 에서의 뉴우턴 물리학의 구현
(4) 특수상대성이론, 시공간, 민코브스키(Minkowski) 공간
(5) 민코브스키 공간과 유클리드 공간의 차이
(6) 민코브스키 기하학과 유클리드 기하학의 차이
(7) 유클리드 기하학에서의 선형대수학의 역할

나) 중학교 과정에서 나오는 정비례 관계와 선형성과의 관계를 알아보자.

다) 선형대수학과 관련된 웹사이트를 소개하여 본 강좌 수강 시 도움을 받을 수 있도록 한다.

4. 평가문항의 예

정의나 정리의 기술 또는 정리의 증명과 같은 전형적인 문제 외에 다음과 같은 형식의 문제도 제시한다.

가) 다음 용어들을 모두 사용하여 작문하시오.
(1) 일차연립방정식, 정칙행렬, 행렬식, 역행렬, 기본행연산, 수반행렬
(2) 벡터공간, 벡터, 스칼라, 유클리드 공간, 행렬공간.

나) 좌표 평면상에 주어진 두 점을 지나는 직선의 방정식을 행렬식을 이용하여 나타내시오.

다) 사다리 타기 게임에서는 왜 술래가 두 명일 수 없을까?

VI. 정수론과 응용

1. 강좌의 성격

정수론은 기하학과 함께 긴 역사를 가지는 수학의 주요 영역으로, 순수 수학의 전형으로 여겨졌으나 최근에는 다양한 응용이 가능하여 졌다. 이 강좌에서는 소수, 부정 방정식, 제곱 잉여, 이산 대수, 그리고 연분수 등을 주요 내용으로 다룬다. 특히 정보 수학에서의 유용성을 다양한 예를 통하여 강조한다. 각 주제들을 종합적으로 다루되 학교 수학과 수학의 다른 분야와의 관련성을 부각시키도록 노력한다. 또한, 정수론과 관련된 컴퓨터 프로그램이나 인터넷 웹사이트를 소개하고 적절한 활용을 유도한다. 이 강좌에서 다루는 내용의 심도 있는 논의는 김응태·박승안(2002), 박승안(1999, 2000, 2003) 등을 참고하여 보충하게 한다.

2. 강좌의 내용

2.1 이 강좌에서 다루는 내용은 다음과 같다.

I. 서론	
소수	II. 약수와 배수
	III. 소수
잉여류의 세계	IV. 합동
	V. 연립 합동식
	VI. 원시근
	VII. 제곱 잉여
VIII. 연분수	
IX. 응용: 정보 보호	

2.2 'I. 서론' 에서는 다음과 같은 내용을 다룬다.

가. 강좌에 관한 종합적인 소개

나. 토의 문제를 통하여 정수론의 응용으로서 다루게 될 암호학 이론의 핵심 개념을 미리 접하게 한다. 한 가지 예를 들면 다음과 같다.

정보 사회에 적절한, 새로운 형태의 논증 기법을 이해하기 위하여 다음 글을 참고하여라.

전통적인 수학에서의 논증은 결정론적(deterministic)이다. 그러나 최근에는 확률론적(probabilistic) 논증이 정보 이론 분야에서 유용하게 활용된다. 즉, 암호학 등 응용대수학에서는 확률론적 기법이 많이 사용된다. 소수 판정법(primality test)은 대표적인 예가 될 것이다.

실험

명자(증명자)가 가지고 있는 한 주머니 안에 바둑 돌 2 개가 들어있다. 직접 만져 봄으로 누구나 원하면 그 사실을 확인할 수 있다. 이제 명자는 주머니를 열어 그 내용물을 보여주지 않고 그 안에 있는 돌 두 개는 모두 흰 돌임을 정당화하고자 한다. 먼저 명자는 인자(확인자)에게 주머니 속을 들여다보지 말고 돌 하나를 꺼내서 그 색을 확인하라 한다. 명자의 주장이 사실이라면 그 돌은 흰 색이다. 이 때, 명자가 거짓말을 할(주머니 속에 검은 돌이 들어있을) 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다. 이제 그 돌을 주머니 속에 다시 넣고 흔들고(임의화하고, randomized), 인자에게 전과 같은 요령을 반복하도록 한다. 이 과정을 20번 반복한다. 명자의 주장이 사실이라면 그 돌들은 모두 흰 색이다. 그런데 인자의 입장에서는 명자가 거짓말을 할(주머니 속에 검은 돌이 들어있을) 가능성도 있다고 여기는데, 그 확률은 $1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$ 이 되어 거의 1이다. 이 상황에서 인자는 명자의 주장을 옳은 것으로 받아들일 것이다.

다. 정수, 유리수, 실수, 복소수 등과 같은 전형적인 수체계의 확장과 함께 다음과 같은 수에도 관심을 갖도록 한다.

다음 집합을 생각하여 보자:

$\mathbf{Z}[i] = \{a+bi \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$. 이 집합의 원소를 가우스 정수(Gaussian integers)라고 한다. 이 수에 관하여 다음을 확인하여 보아라.

(1) 가우스 정수는 정수의 확장 개념으로 볼 수 있다.

$\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}[i] \subset \mathbf{C}$

(2) 덧셈과 곱셈에 관하여 닫혀있다.

(3) 가우스 정수의 제곱은 피타고라스 세 수와 관계됨을 확인하여라. 즉, 임의의 가우스 정수를 제곱하여 가우스 정수 $a+bi$를 얻었다면, a와 b는 피타고라스 세 수 중 두 수이다.

(4) 대수학에서 가우스 정수의 중요성을 김응태 · 박승안(2002) 등을 참고하여 조사하여라.

2.3 'II. 약수와 배수' 와 'III. 소수' 에서는 최대공약수와 최소공배수의 정의, 성질들을 다룬다. 최대공약수를 구하기 위한 유클리드 알고리즘은 여러 측면에서 중요하고 유용함에 주목하게 한다. 소수의 개수, 소수의 분포, 특수한 형태의 소수에 관하여 언급하되 지나치게 엄밀한 전개는 피하고, 소수 개수, 소수 판정, 소인수 분해가 가지는 암호학적 의의를 여러 예를 통하여 설명한다.

2.4 'IV. 합동,' 'V. 연립 합동식,' 'VI. 원시근,' 'VII. 제곱 잉여' 는 본 강좌의 핵심으로 전통적인 정수론 강좌와 비슷한 흐름으로 전개한다. 이들 개념의 암호학적 응용성을 주목한다. 그 결과 강의의 내용과 깊이가 전통적

인 정수론 강좌에 비해 부족할 수 있는데 적절한 참고서를 제시함으로 스스로 보충하도록 유도한다.

2.5 'Ⅷ. 연분수'에서는 연분수의 수렴성과 연분수에 의한 유리수와 무리수의 분류에 대하여 논한다. 연분수에 의한 소인수분해나 기타 응용에 관하여는 토의 문제 등의 제시를 통하여 소개한다.

2.6 'Ⅸ. 응용: 정보 보호'는 본 강좌가 기존의 정수론 강좌와 구별되는 주요 부분이다. 암호학과 확률론적 논증이 주를 이룬다.

3. 강좌의 운영

3.1 $\mathbf{Z}_n$을 구성하는 과정에서 집합론, 동치관계, 분할을 언급함은 물론, 대수적 구조에서의 상(quotient) 구조도 간략히 언급한다.

3.2 약수, 배수, 소수, 진법, 합동식 등은 학교 수학과 직접적인 관련이 있으므로 긴밀한 연계를 꾀한다. 다음은 학교 수학에서 다루는 내용으로서 합동식의 유용한 활용이다.

합동식을 이용하여 어떤 수가 어떤 수로 나누어 떨어지는 조건을 쉽게 구할 수 있다. 주어진 수 k가 10, 5, 2, 4, 3, 9, 11 로 나누어 떨어질 조건을 생각하여 보자.

3.3 소수 판정과 소인수 분해의 예를 통하여 새로운 형태(확률론적)의 논증 방법에 대하여 소개한다.

실험

학생들로 하여금 소인수 분해 문제는 컴퓨터를 사용하더라도 만만치 않은 문제임을 경험시키기 위하여 다음 실험을 하도록 한다. 소인수 분해 문제의 이러한 특징은 현대 암호학에서 매우 중요한 역할을 하므로 이 실험은 의미가 크다고 할 수 있다. 이 실험에서 학생들은 소인수 분해와 소수 판정은 근본적으로 같은 문제로 인식할 것을 전제한다.

가) 먼저 BASIC이나 LOGO를 사용하여 다음 두 프로그램을 짜도록 한다. 학생들이 프로그램 짜는 것을 부담스러워하면 교사가 제공해도 된다. 또는 http://primenumber.pe.ky/에 접속하여 Primenum.exe를 사용하도록 한다.

(1) 주어진 자연수를 소인수 분해한다 : 이때 학생들은 기본적인 알고리즘을 사용할 것을 전제한다.

(2) 주어진 자연수를 이진법으로 표현한다.

이제 두 프로그램을 적절히 구동시켜 다음 작업을 하게 한다.

나) 다음 형태의 수에 대하여 이진법 프로그램을 구동하고 그 결과를 관찰하라.

$2^k-1,\ 1\le k\le 10.$

이 수들은 k개의 1로 이루어짐(repunit number)을 발견할 것이다. 이는 이진법의 원리로부터 금방 알 수 있는 사실임을 설명한다.

다) 위의 결과를 참고하여 $2^k-1,\ k\in \mathrm{N}$, 형태의 수가 소수이기 위한 필요조건을 찾아라.

1의 개수를 나타내는 k가 합성수이면, 원래의 수도 합성수임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 k가 소수여야 함은 하나의 필요조건이 된다. 이제 이 필요조건은 충분조건인가를 몇 가지 실험을 통하여 조사하고 싶다.

라) 다음 수들에 대하여 소수 판정하여라 : 2^3-1, 2^5-1, 2^7-1, $2^{11}-1$.

이 결과 k가 소수임은 충분 조건이 아님을 알게 된다. 그러면 소수 k가 어떤 수일 때 2^k-1는 소수일까? 이를 위하여 k를 크게 하여 프로그램을 구동시킨다. 그러나 계산에 많은 시간이 소요된다. 사실 k가 조금만 더 커져도 계산은 끝나지 않음을 관찰하게 될 것이다. 이 실험을 통하여 소인수의 문제가 계산상 간단한 일이 아님을 경험하게 한다. 이제 고급의 프로그램을 활용하여 보자.

마) MAPLE이나 MATHEMATICA 등을 활용하여 두 수 $2^{19}-1$, $2^{23}-1$에 대하여 소수 판정하여라. 필요

한 프로그램의 코딩이 여의치 못한 경우에는 http://primenumber.pe.ky/에서 프로그램 코드를 볼 수 있다. 위의 소프트웨어(MAPLE, MATHEMATICA)에 대한 접근이 용이하지 않을 때에는 http:// primenumber.pe.ky/에서 타원곡선을 이용한 소인수 분해 프로그램을 직접 활용하면 된다.

바) 앞의 라 단계에서 사용한 학생들의 프로그램보다 훨씬 효율적임을 알 수 있다. 그러나 k가 너무 커지면 (예를 들어, $k=4423$), MATHEMATICA도 계산하지 못함을 관찰한다. 이 단계에서 소인수 분해의 계산상의 특징을 설명하여 준다. 또, MATHEMATICA의 구동 원리와 우리 프로그램의 구동 원리의 차이를 알고리듬 측면에서 설명한다.

사) 다음 웹사이트를 방문하여 최근 발견된 큰 소수에 대하여 알아보아라.

http://www.mersenne.org/primes.htm

큰 소수의 발견에 관한 여러 가지 흥미로운 사실을 알게 될 것이다.

3.4 위에서 살펴 본 결정론적/확률론적 논증과 함께 구성적/비구성적 논증에 대하여 살펴본다. 이를 통하여 현대수학의 한 특징을 이해하게 한다. 이러한 내용들은 과학고등학교나 영재학교에서는 물론 일반적으로 호기심이 많은 학생에게 흥미 있는 자료가 될 수 있다.

3.5 소인수분해, 이산대수, 이차 잉여 등의 성질을 활용한 여러 가지 암호 프로토콜을 구체적으로 제시한다.

예

일반적으로 150자리 두 소수 p와 q의 곱인 합성수 n을 소인수 분해하는 것은 현실적으로 가능하지 않다. 또 이러한 n소인수를 모르는 상황에서는, n을 법(modulus)으로 하는 경우 이 법에 관한 제곱 잉여(quadratic residue) a의 제곱근을 구하는 것도 현실적으로 가능하지 않다.

이제 명자(증명자)는 "법 n에 관한 제곱 잉여 a제곱근을 알고 있다"라는 사실을 인자(확인자)를 대상으로 정당화하고자 한다. 이때, 명자와 인자 모두는 합성수 n의 소인수 분해를 모른다고 가정한다.

먼저 명자 $\mathbf{Z}_n^*$에서 임의로 한 수 r을 택하고 그 수를 제곱한 값(r^2)을 인자에게 보낸다. 이때 r값을 알려주면 안 된다. 그 값을 받은 인자는 0과 1 중에서 임의로 한 수를 취하여 명자에게 보낸다. 규칙에 따라, 명자가 0을 받았으면 인자에게 r을 보내고 1을 받았으면 인자에게 $r\sqrt{a}$를 보낸다. 인자는 받은 값이 규칙에 맞는지를 확인하고, 규칙에 맞지 않으면 명자의 정당화는 실패를 한 것으로 결론을 내리고, 규칙에 맞으면 앞의 과정을 다시 반복한다. 이와 같은 대화(interaction)를 20번 수행하는 전 과정에서 명자는 모두 성공적이었다고 하자. 명자의 주장대로 그가 정말로 $\sqrt{a}$를 알고 있다면 그는 20번 모두를 성공적으로 마칠 수 있다. 그러나 그가 $\sqrt{a}$를 모르는 경우에는 20번 모두를 성공적으로 마칠 확률은 극히 적다. 따라서 명자가 20번 모두를 성공적으로 마쳤다면, 그는 a의 제곱근을 알고 있다는 사실을 정당화할 수 있다. 이 정당화 과정에서 명자는 a의 제곱근에 관한 한 유의미한 정보를 유출하지 아니했음을 직관적으로 알 수 있다. 한 가지 주목할 것은 명자나 인자는 정당화 과정의 매 단계에서 임의로 수를 택하도록 되어있는데, 그 규칙에 따르지 아니하면 예기치 않은 손해를 볼 수 있음을 보일 수 있다. 이제 보다 자세히 알아보자. 명자는 다음과 같은 주장에 대한 영지식 증명(zero-knowledge proof)을 인자에게 하고자 한다 : '나는 법 $n\ (=pq)$에 대하여 제곱잉여 a의 제곱근 x_0를 알고 있다.' 여기서 명자와 인자는 모두 n의 소인수 p와 q를 모른다고 가정하므로 x_0 는 귀한 정보라고 할 수 있다. 증명 프로토콜은 다음과 같다.

명자		인자
$r \in Z_n^*$을 임의로(randomly) 택하여 $m \equiv r^2 \pmod n$을 계산하여 m을 인자에게 보낸다.	$\xrightarrow{m}$	
		집합{0, 1}에서 0또는 1을 임의로 택하여 그것을 명자에게 보낸다.
0이 보내왔으면 $l \equiv r \pmod n$을 보내고 1이 보내왔으면 $l \equiv rx_0 \pmod n$을 보낸다.	$\xleftarrow{0 \text{ 또는 } 1}$	
	$\xrightarrow{l \equiv r \pmod n \text{또는} l \equiv rx_0 \pmod n}$	
		0을 보냈으면 $l^2 \equiv m \pmod n$임을 확인하고, 1을 보냈으면 $l^2 \equiv ma \pmod n$임을 확인한다.

이상이 증명의 1회(round)인데 명자가 x_0을 알면 100%성공적으로 수행할 수 있는데 명자가 x_0을 몰라도 50%의 확률로 성공적인 수행이 가능하다. 위와 같은 과정을 20회(예를 들면) 실시했는데 명자가 모두 성공적으로 수행했다면 명자가 x_0을 모를 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$이 되어 인자는 명자의 주장을 믿게 된다. 보통 증명에서는 증명자가 논증할 때 확인자는 이해하며 듣기만 하면 되는데, 이 증명은 대화형(interactive)이다. 이 대화는 '영지식'의 기능을 달성하기 위한 투자라고 생각하면 좋을 것이다. 영지식 증명의 보다 엄밀한 정의가 필요하지만 여기서는 직관적인 이해로 만족하도록 한다. 즉 증명이 완료됐을 때 인자는 명자의 주장을 믿게 되지만 명자가 가진 정보에 대해서는 유의미한 정보는 하나도 얻지 못하게 되는 것이다[5].

3.6 연분수 수렴성을 다음과 같이 학교 수학과 관련지어 본다.

다음 논증을 반박하여 보자.

가) $0.999\cdots = 1$임을 다음과 같이 증명한다.

$0.999\cdots = x$라고 하면 $9.999\cdots = 10x$이다. 따라서 $9x = 9$이므로 $x = 1$이다.

나)

$1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\cdots$

$=1-\{1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\cdots\}$

만일

5) 이 예를 통하여 수학에 컴퓨터와 같은 첨단 기술이 더해지니 전통적인 수학에서는 불가능해 보이는 문제에도 해답을 제시할 수 있게 됨을 주목하게 하는 것도 유익할 것이다.

$1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\cdots$를 s라고 하면 $s=1-s$가 성립하여 $s=\frac{1}{2}$을 얻는다.

다) $1-2+4-8+16-32+64-\cdots$
$=1-2(1-2+4-8+16-32+64-)$
이제 $1-2+4-8+16-32+64-\cdots$를 s라고 하면 $s=1-2s$가 성립하여 $s=\frac{1}{3}$을 얻는다.

3.7 학교 수학과 관련하여 다음과 같은 활동을 한다.

가) 초·중등학교 교육 과정에서 최대공약수와 최소공배수에 관한 내용을 조사하여라.
나) 각 학교 급별의 학습 내용의 적절성을 분석하여라.
다) 문제가 있다면 합리적인 방안을 제시하여라.

3.8 실생활과 관련하여 다음과 같은 과제를 수행한다.

가) 실생활에서 일방향(one-way)성의 예를 조사하여라.
나) 일방향성의 수학적 구현을 설명하여라.
다) 일방향성의 정보 보호적 활용을 설명하여라.

4. 평가문항의 예

정의나 정리의 기술 또는 정리의 증명과 같은 전형적인 문제 외에 다음과 같은 형식의 문제도 제시한다. 또, TAKE-HOME EXAM 등의 형식으로 인터넷이나 컴퓨터의 이점을 충분히 활용하도록 유도한다. 다음의 예 '다)'는 컴퓨터 계산상으로는 소수 판정의 문제와 소인수 분해의 문제는 완전히 다른 문제임을 실험을 통하여 경험하게 한다.

가) 다음 용어들을 모두 사용하여 작문하시오.
(1) 원시근, 원시근의 존재, 원시근의 개수, 이산 대수, 암호학적 활용, 키 분배 방안
(2) 제곱 잉여, 제곱 잉여의 개수, 르장드르 기호, 야코비 기호, 암호학적 활용, 전화로 동전 던지기

나) $\mathbf{Z}_n$에 관하여 다음 관점에서 정리하여라.
(1) 집합, 동치 관계, 동치류, 분할
(2) $\mathbf{Z}_n$에 정의된 덧셈의 성질
(3) $\mathbf{Z}_n$에 정의된 곱셈의 성질

다) MATHEMATICA이나 MAPLE 등을 활용하여 $k=5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30$인 경우 다음 계산을 한다.
(1) 자리수가 k개인 두 소수를 임의로 생성하라.
아주 쉽게 계산을 수행한다는 사실을 알 수 있다. 이 정도 크기의 수에 대하여 소수 판정이 용이하다는 것이다.
(2) 위에서 생성한 두 수를 곱하여 그 합성수를 n이라고 놓아라.
(3) 얻은 수 n에 대하여 소수 판정하여라[6].
(4) 얻은 수 n을 소인수 분해하여라[7].
(5) 위의 실험 결과에 대해서 다각도로 논의하여 보자[8].

Ⅶ. 현대 대수학 I

1. 강좌의 성격

이 강좌에서는 집합론, 정수론과 응용, 선형대수학과 응용 등에서 다룬 내용을 기반으로 하여 수학(대수학)의 추상화를 꾀하여 대수적 구조를 논한다. 군, 환, 벡터 공간의 대수적 구조에 관한 이론이 이 강좌의 주요 내용이지만, 군론, 환론, 그리고 벡터 공간론 자체가 이 강좌의 핵심은 아니다. 따라서 정수의 집합을 통하여 군과 환의 구조를 도입하고, 좌표 평면을 통하여 벡터 공간의 개념을 도입한 후, 그 예로서 가환군, 가환환, 유크리드 공간

6) 소수 판정과는 상황이 다름을 알 수 있다. 어떤 수의 경우는 합성수임을 알면서 그 수의 소인수는 하나도 모르는 경우도 가능하다는 것이다. 이 단계에서 확률론적 기법의 힘(유용성)을 설명한다. 소수 판정은 10, 20, … , 50자리의 수는 물론 이보다 매우 큰 경우에도 쉽게 수행한다는 사실을 알 수 있다.
7) 신현용외(2003)에는 구체적인 실험결과가 소개되어 있다.
8) 예를 들어 다음과 같은 설명이 가능할 것이다. 위의 실험 결과를 모두 제시함으로써 다음 주장을 정당화할 수 있다 : 위에서 사용한 프로그램(MAPLE이나 MATHEMATICA)에서는 입력된 수에 대한 소수 판정은 소인수 분해에 의하지 아니한다.

은 물론, 치환군과 일반선형군 등의 비가환군, 행렬환 등의 비가환환, 그리고 행렬 공간 등을 살핀다. 특히, 벡터 공간의 경우에는 행렬 공간의 중요성을 선형대수학과 관련하여 강조한다. 특수한 환으로서의 체에 관해서도 간단히 언급하되 극대이데알에 의한 유한체의 구성을 알아본다. 또, 작도 가능성을 논함으로써 기하학과 대수학의 관계, 수학화와 추상화의 유용성을 경험하게 한다. 이 강좌에서 다루는 내용의 심도 있는 논의는 김응태 · 박승안(2000) 등을 참고하여 보충하게 한다.

2. 강좌의 내용

2.1 이 강좌에서 다루는 내용은 다음과 같다.

Ⅰ. 서론	
대수적 구조	Ⅱ. 군, 환, 벡터 공간의 정의와 예
	Ⅲ. 부분군, 부분환, 부분 공간
	Ⅳ. Lagrange 정리
	Ⅴ. 정규 부분군, 이데알
	Ⅵ. 군준동형사상, 환준동형사상, 선형사상
	Ⅶ. 직합
	Ⅷ. 순환군, 단항이데알정역
Ⅸ. 군과 환의 만남	
Ⅹ. 가해군	
Ⅺ. 극대이데알과 유한체의 구성	
Ⅻ. 확대체와 작도 가능성	

2.2 'Ⅰ. 서론'에서는 다음과 같은 내용을 다룬다.

가. 강좌에 관한 종합적인 소개

나. 친숙한 집합(수집합, 좌표평면, 행렬 집합 등)에서의 대수적 구조 관찰

다. 학교 수학에서의 현대대수학 관련 부분의 예를 들면 다음과 같다.

(1) 다음 주장을 증명하여라:
"구구단의 9단에서는 두 자리수의 합은 9이다."
이 문제를 다음과 같이 표현하여 생각하여 보게 한다.
자연수 n이 $1 \leq n \leq 10$이며, $9 \times n = a \times 10 + b$, $0 \leq a,\ b \leq 9$라고 할 때, $a+b=9$이다.

(2) 이번 한 학기를 통하여 초 · 중등학교의 교과 내용을 조사하여 대수 분야의 비중을 살펴보아라. 또, 현대대수학의 어떠한 내용이 초 · 중등학교의 교과 내용과 관련 있는지도 조사하여 보아라.

(3) 다음 문제를 생각하여 보자: '두 발 자전거와 세 발 자전거 17대가 있다. 바퀴는 모두 37 개 이다. 두 발 자전거와 세 발 자전거는 각각 몇 대인가?'. 한 초등학생은 이 문제에 관한 풀이로 다음을 제시하였다: '$37-34=3$. 따라서 세 발 자전거는 3 대이고, 두 발 자전거는 14대 이다.' 이 풀이를 현대대수학의 효용성 또는 비효용성 측면에서 논의하여 보자.

2.3 'Ⅱ. 군, 환, 벡터 공간의 정의와 예'에서 'Ⅷ. 순환군, 단항이데알정역' 까지가 이 강좌의 핵심으로 대수적 구조를 논한다. 군, 환, 벡터 공간의 구조를 평행하게 다룬다. 벡터공간의 구조는 선형대수학과 응용에서 어느 정도 다루었으므로 군과 환의 경우보다 간단히 언급한다. 환을 다룰 때에는 환을 틈틈이 언급한다.

2.4 'Ⅸ. 군과 환의 만남'에서는 적절한 소재를 택하여, 집합론, 정수론, 군론, 환론 등의 어우러짐을 살핀다.

2.5 'Ⅹ. 가해군'은 전형적인 군론의 내용으로서 다른 내용에 비해 다소 깊이가 있을 수 있다. 그러나 수강생 중 상당수는 갈로아 이론을 다루는 현대대수학Ⅱ를 수강하게 되므로 가해군의 뜻과 예, 그리고 기본 성질을 다루도록 한다. 깊이 있는 내용은 자료를 제시하여 스스로 이해하게 한다.

2.6 'Ⅺ. 극대이데알과 유한체의 구성'은 전형적인 환론의 내용으로 여러 가지 면에서 중요하다. 이를 위하여 필요한 다항식 환 등에 관하여는 지나치게 엄밀히 다루지 않도록 한다. 그러나 다항식 환 $\mathbb{Q}[x]$ 와 정수환 $\mathbf{Z}$의 유사성은 여러 가지 예를 통하여 충분히 강조한다.

2.7 'Ⅻ. 확대체와 작도 가능성'은 체론의 전형적인 예다. 환(체)론, 벡터공간 개념, 유클리드 기하학 등 수학의

여러 영역이 어우러지는 흥미 있는 소재다. 현대대수학의 힘을 느낄 수 있는 소재이다.

3. 강좌의 운영

3.1 본 강좌에서는 군론이나 환론에 대한 깊은 이해가 아닌, 대수적 구조(algebraic structure)의 이해가 주된 목적이다. 따라서, 군, 환, 벡터 공간을 중심으로 대수적 구조를 이해하게 한다.

3.2 대수적 구조에 관한 포괄적이고 종합적인 이해를 위하여, 세 가지 대수적인 구조(II장에서 VIII 장까지)를 병렬로 다룬다. 이 때, 벡터 공간의 구조는 선형 대수학에서 많이 다루었으므로 가볍게 언급하여 기억을 되살리는 수준으로만 다룬다. 결국, 구의 구조와 환의 구조가 주로 언급된다.

3.3 정확한 정의나 정리를 기술하기 전에, 학생들에게 이미 친숙하고, 앞으로도 중요한 다음 구조들을 수시로 예를 제시하여 해당 개념이나 성질들을 소개하고, 점점 추상화, 일반화, 정교화, 그리고 심화시켜 나아간다: $\mathbf{Z}$ (정수군, 정수환), $\mathbf{Z}_n$(잉여류군, 잉여류환), $\mathrm{Mat}_2(\mathbf{R})$(행렬환), $\mathbb{R}^2$(유클리드 벡터 공간).

3.4 정규 부분군, 이데알의 필요성을 상군, 상환의 구성가능성 측면에 중점을 둔다. 이 때, 가환군이나 가환환의 편리함을 설명한다. 한 편, 벡터 공간의 경우에는 그 자체의 구조(선형성, 합성의 가환성)로 인하여 상공간을 구성하기 위하여 특별한 부분공간이 필요하지 않음을 주목하여 군이나 환의 경우와 대비시킨다.

3.5 대수적 구조의 이해 측면에서 군, 환, 벡터 공간이 동시에 다뤄짐으로 군론이나 환론, 벡터 공간론 각각의 특징이나 진수가 소홀히 다뤄질 염려가 있다. 이러한 문제점을 보완하기 위하여 군론에서는 Lagrange 정리나 Sylow 이론 등, 군 이론의 주요 정리를 소개하여 군 이론 자체도 포괄적으로 이해하게 할 수 있을 것이다. 이때 Lagrange 정리는 자세히 다루되 Sylow 이론은 토의나 과제를 통하여 그 내용을 이해하는 수준으로만 다루는 것도 좋을 것이다. 마찬가지로, 환론에서는 극대이데알을 통한 유한체의 구성법 등을 다룸으로써 환 이론 자체도 종합적으로 이해하게 한다. 벡터 공간의 경우는 앞선 선형대수학 강좌 내용 중 일차 독립성과 기저 개념 등을 단순히 상기시킴으로써(자세히 다루지 않고) 벡터 공간 구조의 특징을 이해하도록 지도할 수 있을 것이다.

3.6 군론과 환론의 어우러짐을 보일 수 있는 주제도 하나 다룬다. 예를 들어, 정수환 $\mathbf{Z}$, 잉여류 환 $\mathbf{Z}_n$, 그리고 $\mathbf{Z}_n$의 단위원 군 $\mathbf{Z}_n^*$ 를 통하여 정수론, 군론, 환론 등을 종합적으로 다룰 수 있다. 이 때 다음 개념들이 등장할 것이다: 위수, 오일러 함수(기호), 원시근의 존재성, Gauss 의 정리, $\mathbf{Z}_n^*$, 곱셈에 관하여 유한 가환군, $\mathbf{Z}_n^*$ 이 순환군이 되기 위한 필요충분 조건, 그리고 $\mathbf{Z}_8^*$ 와 $\mathbf{Z}_{12}^*$의 비교 등. 이러한 내용은 학생들에게 미리 생각할 문제와 힌트를 제시하고 스스로 생각하여 보도록 유도하면 좋다.

3.7 이 강좌를 수강하는 학생들은 다음 학기에 "현대대수학II"를 수강할 가능성이 있다. 현대 대수학II 강좌에서는 표수가 0인 체 위에서의 갈로아 이론이 주된 내용으로서, 내용 자체로서도 중요하면서 수학사적으로도 의미가 큰 다항식의 가해성을 논하게 된다. 또, 현대 대수학II 강좌에서는 대수학 전반에 걸친 내용을 아우를 수 있으므로 대수학 전반에 걸친 종합적인 이해를 꾀할 수 있도록 운영하도록 구성되어 있다. 이 점을 감안하여 현대 대수학 I 에서는 그 강좌 자체의 목적 외에, 수강생들이 현대 대수학II를 큰 어려움 없이 수강할 수 있는 배려도 하여야 한다. 또, 현대 대수학II과의 연계성을 고려하여 가해군의 정의와 간단한 성질, 확대체 개념의 소개와 간단한 성질, 수의 작도 가능성 등도 이 강좌에서 다룬다. 이 주제에서도 군론, 환론, 벡터 공간론의 어우러짐을 부각시키도록 한다.

3.8 전통적인 현대대수학 I 강좌에 비해 강의에서 다루는 내용이 상당히 축소될 수 있다. 토의나 과제, 그리

고 복습 퀴즈를 짜임새 있게 구성하여, 학생의 적극적인 참여를 유도하고, 일관성과 심도 있는 강좌가 되도록 각별히 노력하여야 한다. 작도 가능성의 지도는 다음과 같이 전개할 수 있다.

작도 가능성 주제에서는 3대 작도 불가능 문제가 주를 이룬다. 이 때, 다음에 대하여 조사할 수 있도록 직접 제공된 자료나 적절한 참고 문헌을 제시한다.

(1) 작도 가능성과 종이 접기와의 관계를 조사하여라.

(2) 작도 가능성과 초월수와의 관계를 조사하여라.

(3) 자연수 n 에 대하여 각 n° 의 작도 가능성에 대하여 조사하여 보아라.

(4) 정다각형의 작도 가능성에 대하여 조사하여 보아라.

3.9 다음 내용들도 토의나 과제 형식으로 제시하여 개략적인 이해를 하도록 지도할 수 있다. 이 내용들에 관한 개략적 이해가 학생들에게 지나친 부담이 되는 경우에는 강좌 후 방학 중의 연구 문제로 제시할 수 있을 것이다. 과제나 토의 문제를 제시할 때에는 적절한 자료를 직접 제공하던가, 아니면 참고 문헌을 쉽게 접할 수 있도록 연구실이나 도서실에 미리 조처하여 학생들로 하여금 불필요한 부담을 주지 않도록 하여야 한다.

가. 유한 가환군의 구조
    유한 순환군의 구조와 비교
    무한 순환군의 구조 언급
    무한가환군의 구조의 복잡성 언급

나. 유클리드 정역

다. 유일 인수분해 정역
    정수론과의 연계

라. 정역의 분수체
    수 체계와의 연계

마. 중국인의 나머지 정리
    정수론과의 연계

바. 대칭군의 성질
    현대 대수학II와의 연계

3.10 중간 평가와 기말 평가에 즈음하여 그 동안의 학습 내용을 종합적으로 정리한다. 여러 선다형 문제와 간단한 주관식 문제를 제시하여 학습 내용 전체를 종합적으로 복습하게 하면 효과적이다. 이 때, 각 문항마다 적절한 참고 사항을 제공하여 스스로의 복습을 돕도록 한다. 신현용 외(2003)에는 90여개의 복습자료가 제시된다. 두 개의 예를 들면 다음과 같다.

가) 유한체에 관한 다음 설명 중 옳지 못한 것은 어느 것인가?

(1) 위수가 4인 유한체는 서로 동형이 아닌 2가지가 있다.

(2) 임의의 소수 p와 임의의 자연수 n에 대하여 $|F| = p^n$ 인 유한체 F가 항상 존재한다.

(3) 유한체의 표수(characteristic)는 결코 0일 수 없다.

(4) 어떤 특정한 다항식의 분해체를 구함으로써 유한체를 얻을 수 있다.

〈참고 사항〉

(1) 임의로 주어진 자연수 위수를 가지는 유한군, 유한가환군, 순환군, 유한비가환군, 유한환, 유한벡터공간은 존재하는가? 존재한다면 유일한가?

(2) 유한 표수를 가지는 무한체는 어떤 것이 있는가?

(3) 유한체를 구성하는 다른 방법으로는 어떤 것이 있는가?

나) 다음 정다각형 중에서 작도 가능하지 않은 것은 어느 것인가?

(1) 정 5각형 (2) 정 7각형 (3) 정 17각형 (4) 정 257각형

〈참고 사항〉

(1) 3대 작도 불가능 문제에 관하여 정리하여라.
    Wantzel의 업적
    기하학 문제를 대수적 문제로 바꾸다.
    π 의 초월성

(2) 정5각형의 작도
    황금비의 작도

(3) 자연수 n 에 대하여, 각 n°가 작도 가능하기 위한 필요 충분 조건은 무엇인가?

(4) 페르마 소수와 정다각형의 작도 가능성 사이에는 어떠한 관계가 있는가?

(5) 가우스의 동상
(6) 다음에 대해서 요약하여라.
작도 가능성과 종이 접기
작도 가능성과 solvable by radicals

4. 평가문항의 예

정의나 정리의 기술 또는 정리의 증명과 같은 전형적인 문제 외에 다음과 같은 형식의 문제도 제시한다.

(1) 다음 용어를 모두 사용하여 작문하여라:
군, 부분군, 동치관계, 정규부분군, 상군, 환, 부분환, 이데알, 상환, 벡터공간, 부분공간, 상공간
(2) 작도가능성의 문제를 통하여 기하학과 대수학의 어우러짐을 설명하여라.
(3) 다음 방정식을 푸는 과정에서 다양한 대수적 성질(항등원, 역원, 교환법칙, 결합법칙 등)을 조사하여라:
$$x + 3 + x = 2 + 3.$$
(4) (TAKE HOME[9])) 고등 수학적 사고를 위한 컴퓨터 언어 ISETL(Interactive SET Language)과 그의 수업에의 활용 방안을 개략적으로 조사하여 보아라[10]).

Ⅶ. 교사를 위한 수리 철학[11])

1. 강좌의 성격

본 강좌에서는 유클리드 원론, 무리수의 발견, 0, 음수, 그리고 복소수의 도입, 비 유클리드 기하학의 발견, 미적분학의 발전, 사원수(quaternions)의 발견, 수학기초론의 연구, 집합론, 그리고 괴델의 불완전성 정리 등 중요한 수학사적 사건들을 중심으로 수리 철학적 문제를 개괄한다. 특히 수학의 본질에 관한 직관주의, 형식주의, 논리주의 관점을 간략히 살피고 수학교육적으로 의미가 큰 Lakatos의 주장도 언급한다. 이러한 논의 과정에서 뉴턴 역학, 상대성 이론, 양자 역학, 초끈 이론 등의 이론 물리학의 역사와도 관련 짓도록 시도한다.

한편, 컴퓨터의 발달에 따른 증명 개념의 변화에 주목한다. 특히 정보 수학(특히 암호학)이나 이론 물리학(특히 양자 역학)에서 중요한 역할을 하는 확률의 다양한 속성을 살피고 확률의 역할에 주목한다. 이러한 논의를 바탕으로 수학적 증명을 재 조망하여 보고, 새로운 증명 패러다임, 그리고 이에 따른 새로운 형태의 증명 지도 방안을 탐색하여 본다. 끝으로 수학적 논리 체계의 근본적인 한계, 인간의 관찰 능력의 피할 수 없는 한계, 자연 현상에서의 확률(임의성)의 개입 등에 의한 수학에서의 확실성의 상실을 살펴봄으로써 수학을 보다 정확히 이해하도록 시도한다.

본 강좌에서 언급하는 대부분의 수학자는 이 강좌 수강생 대부분에게는 낯설지 않을 것이다. 본 강좌를 진행하면서 등장하는 수학자들의 수학적 업적을 다시 정리하여 보게 하는 것은 효과적일 것이다. 예를 들어 칸토어가 견지한 실무한적 자세는 현대 수학에 큰 역할을 하게 되는데, 수학기초론(집합론)에서 다루는 선택공리나 연속체 가설 등에 관하여 다시 정리하여 보도록 하는 것이다. 또 미적분학 강좌에서나 해석학 강좌에서 다룬 수렴성(평등 수렴성) 개념의 정립 과정을 언급하거나 스스로 조사해 보게 하는 것도 좋을 것이다. 추상대수학 강좌에서는 작도 가능성과 다항식의 가해성, 그리고 종이 접기와의 관계들을 역사적으로 언급하거나 과제로 제시할 수도 있을 것이다.

2. 강좌의 내용

2.1 이 강좌에서 다루는 내용은 다음과 같다.

<table>
<tr><td colspan="2">Ⅰ. 서론</td></tr>
<tr><td rowspan="4">수학의 발전</td><td>Ⅱ. 유클리드 원론</td></tr>
<tr><td>Ⅲ. 비유클리드 기하학</td></tr>
<tr><td>Ⅳ. 해석학의 발전</td></tr>
<tr><td>Ⅴ. 칸토어의 집합론</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ⅵ. 다양한 수리철학적 관점</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ⅶ. 괴델(Gödel)이 준 충격</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ⅷ. 수학교육에서의 역설과 직관</td></tr>
<tr><td rowspan="2">정당화</td><td>Ⅸ. 확률의 신비와 힘</td></tr>
<tr><td>Ⅹ. “증명”이란 무엇인가?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ⅺ. 수학과 자연에 대한 인식의 변화</td></tr>
</table>

9) 관련되는 석사 학위 논문을 쉽게 접할 수 있도록 조처한다.
10) ISETL에 대한 추가 정보를 위하여 다음 인터넷 주소를 제공한다:
http://csis03.muc.edu/isetlw/.
11) 이 강좌는 ‘대수 영역’이라고 할 수 없지만, 신현용 외(2003)에서 본 저자가 이 강좌의 교육과정과 교수-학습방법을 개발하였고, 강좌의 개발 원칙과 방향이 이 글에서 논하는 대수 영역 강좌의 경우와 크게 다르지 아니하므로 이 글에서 논한다.

2.2 'Ⅰ. 서론'에서는 다음과 같은 내용을 다룬다.

가. 강좌에 관한 종합적인 소개

나. 학교수학과의 연계

(1) 비 유클리드 기하학의 발견과 리이만 기하학으로의 발전, 가무한적 입장에서의 실무한적 입장으로의 변화 등으로부터 수학의 자유성은 물론 수학의 범위와 힘을 알게 한다. 한편, 괴델의 정리와 초끈 이론이 주장하는 바를 살펴봄으로써 수학의 내재적인 한계와 인간 이성의 한계도 동시에 알게 한다. 수학에 대한 이러한 이해는 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지게 할 것이고, 이는 곧 교사로 하여금 수학에 대한 깊은 이해와 애착을 유발할 것이다. 그 결과는 교사의 수학 교수 활동에 긍정적인 효과를 초래하고, 더 나아가 여러 가지 수학적 문제에 합리적으로 접근하도록 하며 수학적으로 사고하는 능력을 길러 줄 것이다.

(2) 수학의 발달 과정을 이해함으로 수학의 본질과 속성을 이해하고, 주어진 수학적 주제에 관한 체계적인 교수를 가능하도록 한다.

(3) 수학사적 소재를 활용하여 학습 효과를 증대시킨 많은 연구가 보고되어 있다. 수학사를 활용하여 학생들로 하여금 학습에 관한 흥미를 유발하고, 더 나아가 학습 효과를 높인 사례를 소개한 것이다. 교사의 수학사에 대한 깊은 이해는 수학에 대한 학생들의 흥미와 관심을 지속적으로 가지게 할 것이므로 수학사 강좌에서는 물론 본 강좌에서도 필연적으로 언급하게 될 수학사적 내용은 그러한 수업을 가능하도록 한다.

(4) 수학교육에서 중요한 요소는 무엇인가에 대한 해답은 쉽지는 않을 것이다. 그러나 수학교육에서 교사에 대한 측면이 비중 있게 다루어져야 함에는 의심의 여지가 없을 것이다. 수학교사에 대한 측면 또한 다양한 범주에서 연구되어 질 수 있다. 특히, 교사의 교과내용에 관한 이해와 지식, 그리고 교사의 신념이 수학교육에서 얼마나 중요한가는 구체적인 사례연구를 통해 입증되었다.(김미월, 2001; 김시년, 1999; 장인옥, 2001; 조정수, 2000; Ball, 1990a; Ball, 1990b; Ma, 1999; Thompson, 1992). 교사의 수학적 지식이나, 교사가 수학을 어떻게 바라보고 있느냐에 대한 인식이나 신념 등과 같은 것은 각각 따로 분리해서 볼 것이 아니라 상호 유기적 관계 속에서 파악될 수 있어야 한다.

수학교육에 있어 교사의 수학에 관한 철학은 매우 중요하다. 왜냐하면 교사가 수학을 어떠한 관점으로 바라보고 있느냐에 따라 직접적으로 수업에 영향을 끼치게 되고, 그로 인하여 학생들이 수학을 바라보는 안목이나 태도가 달라질 수 있기 때문이다. 원하던 원하지 않던 모든 수학 교수법은 일관되지는 않을지라도 수리철학에 의존한다고 한다.

한편, 수학이 무엇인가에 대한 본질적이고 철학적인 것은 어떻게 가르칠 것인가에 영향을 끼치고, 가장 본질적인 것은 최선의 교수법이 무엇인가가 아니라 실제로 수학이 무엇인가라는 것이다. 또, 수학교육의 현장에서 교사의 수학교육관은 중요한 역할을 하며, 수학교육학에서 본질적으로 가장 중요한 문제 중의 하나는 수학 자체의 본질에 관한 문제와 그것을 기반으로 하는 수학 교수법은 어떤 것이어야 하는가에 관련된 것이다. 수학의 본질에 관한 문제는 수리철학에 속하는 인식론의 문제이며, 수학 인식론과 수학 교수법의 관련성은 암묵적으로 인정되어온 기본 가정이라 할 수 있다. 본 강좌는 이러한 인식을 바탕으로 한다.

2.3 'Ⅱ. 유클리드 원론'에서 'Ⅴ. 칸토어의 집합론' 에서는 수학적, 수학사적, 그리고 수리철학적 관점에서 의의가 큰 주제를 주로 수리철학적 관점에서 살펴본다. 수학의 정형이라고 할 수 있는 유클리드 기하학에 관하여 살피고, 이어 비유클리드 기하학을 개략적으로 살핀다. 이에 관한 심도 있는 내용은 여러 참고 문헌의 제시를 토한 토의 문제로 가름한다. 한편, 표준해석학은 물론 비표준해석학도 간략히 언급하여 수학 발전의 한 예를 접하게 한다. 현대수학의 발전에 결정적인 역할을 한 집합론도 여러 측면에서 살펴본다.

2.4 'Ⅵ. 다양한 수리철학적 관점'에서는 세 가지 수리철학적 관점을 알아본다. 직관주의, 형식주의, 논리주의에 대하여 주장하는 바와 취하는 입장, 그리고 문제점 등을 개략적으로 살핀다. 이 때, 수학교육학에서 자주 언급되는 라카토스의 준경험적 입장도 함께 알아본다.

2.5 'Ⅶ. 괴델(Gödel)이 준 충격'에서는 괴델의 불완전성 정리의 내용과 그 파장을 살핀다.

2.6 "Ⅷ. 수학교육에서의 역설과 직관'에서는 수리철학적으로는 물론 수학교육적으로도 의미가 큰 여러 가지 수학적 역설을 살피고 수학교육적 활용 방안도 모색하여 본다.

2.7 'Ⅸ. 확률의 신비와 힘'과 'Ⅹ. "증명"이란 무엇인가?'에서는 논증의 새로운 패러다임을 논한다. 기존의 유클리드 가하적인 증명은 결정론적이고 구성적인데 비해 현대 수학에서의 논증은 확률론적이거나 비구성적인 경우도 있는데 이에 관해 알아보고, 이의 수학적, 수리철학적 문제도 살펴본다.

2.8 'Ⅺ. 수학과 자연에 대한 인식의 변화'에서는 사회가 변함에 따라 수학(논증 패러다임)과 수리철학적 입장이 어떻게 변하며, 이는 다시 자연애 대하여 어떠한 변화를 초래하는지를 살핀다. 많은 경우는 참고 문헌의 제시와 함께 토의 주제로 주어진다.

3. 강좌의 운영

3.1 수학, 자연 과학, 그리고 철학은 분리하여 논하기 어려울 정도로 이들 분야는 깊은 관계를 가지고 있다. 수학자는 자연스럽게 과학적 문제와 철학적 문제에 접하게 되기 때문이다. 유클리드 기하학, 무리수의 발견. 0, 음수, 복소수의 도입, 사원수의 발견, 비유클리드 기하학의 발견, 미적분학의 발전, 칸토어에 의한 집합론, 선택공리나 연속체 가설에 관련한 괴델과 코언(???)의 연구결과 등은 수학 자체에 있어서는 물론이고, 자연 과학의 발전, 수리 철학, 더 나아가 일반적인 철학 전반에 심대한 영향을 끼쳤다. 따라서 수학사적으로 중요한 사건들과 직관주의, 논리주의, 형식주의 등 수학에 대한 다양한 견해, 그리고 라카토스 등에 의한 수학 및 수학적 증명에 관한 견해는 적절한 수준에서 교사 양성을 위한 본 강좌에서 언급한다.

3.2 수학사와 수리 철학에 관련하여 여러 문제를 깊이 있고 폭 넓게 사고하고 이해하는 것이 최선이지만 교사 양성을 위한 강좌에서는 몇 가지 선별된 주제를 중심으로 종합적으로 다루되 수학교육과의 관련을 살피도록 노력한다. 특히 수학사와 수리철학을 따로 따로 다루지 아니하고 적절히 조화시켜 강좌를 진행하도록 한다.

3.3 본 강좌에서는 수학은 물론 물리학에 대해서도 상식적인 수준에서 언급하며 다루는 내용과 관련짓도록 한다.

3.4 최근 컴퓨터의 발달은 수학 자체에도 심대한 영향을 끼치고 있다. 특히 증명의 개념에 많은 변화를 초래했다. 따라서 본 강좌에서는 증명에 관하여 다소 심층적인 논의를 함으로써 수학에서의 변화를 보게 한다.

3.5 본 강좌를 통하여 학생들이 수학의 강점은 물론 약점까지도 이해하도록 한다. 이를 위하여 수학에서의 확실성의 상실 등을 다루도록 한다. 이러한 이해는 학생들로 하여금 수학을 보다 정확히 이해하고, 이로 인하여 수학을 더욱 좋아하게 할 수 있을 것이다. 본 강좌는 사범대학의 경우에는 수학에 관하여 어느 정도 이해하게되는 3학년 2학기 정도에서 개설될 수 있을 것이다. 초등학교 교사를 위한 경우에는 별도의 강좌 개설이 어려우므로 '초등학교 교사를 위한 수학기초론'에서 본 강좌의 내용을 더욱 축약하여 집합론과 함께 강의될 수 있을 것이다.

3.6 본 강좌는 강좌의 특성 상 담당 강사의 취향에 따라 강의 내용과 방향이 크게 다를 수 있다. 여기에 제시되는 강좌 내용은 객관적인 입장에서 기술하려 노력하였지만, 집필자의 성향에 따른, 매우 개인적인 제안일 수 있는 부분이 있을 것이다. 그러나 수학사와 수리 철학에 대한 인식의 수준과 성향은 교사의 수학 교육에 대한 신념과 교수 행위에 큰 영향을 미치므로 본 강좌에서는 수학과 교육과정의 성격과 목표에 부합하는 강좌가 되도록 각별히 유의하여야 한다.

3.7 신현용 외(2003)의 '교사를 위한 수리철학'에는 여러 분야에 걸쳐서 다양한 토의 문제와 과제가 개략적으로 제시되어 있으므로 산만하고 초점이 흐리다는 인상을 받을 수 있다. 그러나, 이는 담당 강사가 그의 취향에 따라 선택적으로 활용할 수 있도록 하기 위함이다. 이 자

료가 점차 교재로 개발되는 과정에서 제시된 문제들은 상세히 설명될 것이다.

3.8 일반적인 수리 철학 강좌의 깊이와 넓이를 생각할 때, 이 강좌를 '수리 철학' 강좌라고 할 수 없겠지만 적절한 강좌 명을 찾지 못하여 '교사를 위한 수리 철학'이라는 강좌 명을 사용하기로 한다.

3.9 수학의 어떠한 문제도 철학적 문제와 연계되므로, 수학 교사는 철학의 문제, 특히 수리 철학의 문제에서 완전히 자유로울 수 없다. 한편, 교사의 수리 철학적 관점은 교사의 교수 행위에 상당한 영향을 끼치는 것도 사실이다. 따라서 교사 양성 대학에서 어느 수준의 수리 철학 강좌는 개설되어야 하며 본 강좌를 그러한 요구에 부합하도록 한다.

4. 평가문항의 예

정의나 정리의 기술 또는 정리의 증명과 같은 전형적인 문제 외에 다음과 같은 형식의 문제도 제시한다.

가) 다음 용어들을 모두 사용하여 작문하시오.

(1) 유클리드 원론, 평행선 공준, 사케리, 플레이 페어 공준, 비유클리드 기하

(2) 리샤르 역설, 괴델 수, 초수학의 산술화, 완전성 정리, 제 1불완전성 정리, 제 2 불완전성 정리

(3) 역설, 직관, 증명, 수학교육, 정보화 사회, 확률

나) 수학의 다른 영역과 관련하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 라카토스의 '수학적 발견의 논리(우정호, 2001)'를 참조하여 해석학에서 배운 평등수렴의 개념이 나타나게 된 배경에 대해 설명하여라.

(2) 대수학에서 배운 3대 작도 불능문제에 대해 설명하고 종이접기가 이를 해결할 수 있는지 논하여라.

(3) 집합론에서 배운 선택공리와 연속체 가설 문제에 대해 설명하여라.

다) 학교 수학과 관련하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 수학사를 통해 볼 때, 무한의 개념은 많은 문제점들을 야기하였다. 학교수학에서도 무한이 자칫 잘못 도입되면 오히려 혼란을 초래하는 경우가 발생할 수 있다. 그러한 경우를 구체적인 예를 들어 설명하여라

(2) 학교 수학에서의 증명지도의 문제점을 나열하고 그 해결책을 구체적으로 제시하여라.

(3) 대부분의 학생들은 수학은 절대적이고 확실한 학문이라고 생각한다. 이러한 학생들의 인식에 대해 자신의 생각을 정리해 보아라(동의하면 왜 동의하는지, 반대한다면 왜 반대하는지 상세하게 설명하여라.).

라) 실생활과 관련하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 은행의 복리 이자와 e와의 관계에 대해 설명하여라.

(2) 실생활에서 황금비나 피보나치 수열과 관련이 있는 경우를 설명하여라.

(3) 일상생활 속에서 자주 접하는 게임 중 하나를 택하여 그 속에 담겨진 수학적 원리를 설명하여라(예를 들어, 사다리 타기, 화투 놀이, 윷놀이, Black-out 게임 등).

마) 다음 문제를 인터넷이나 컴퓨터를 활용하여 해결하여 보자.

(1) 본문에 제시된 몬티홀 딜레마나 생일의 역설 문제를 엑셀 프로그램을 이용하여 실제로 구현해 보아라.

(2) 본문에 제시된 소수 판정과 관련된 몇 가지 실험을 실제로 프로그램을 이용하여 수행하여보자.

Ⅸ. 결론

본고에서는 교사 양성대학 수학교육과를 위한 대수 영역의 강좌 모형을 제시하였다. 대수 영역 여러 강좌 중에서 '선형대수학과 응용', '정수론과 응용', '현대대수학Ⅰ'에 대하여 각 강좌의 성격, 내용, 운영 방안, 그리고 평가 문항 중에서 특징적인 것을 간략히 제시하였다.

선형대수학과 응용, 정수론과 응용에서는 수학적인 체계와 깊이보다 각 강좌의 실생활에의 응용성, 그리고 타 교과와의 관련성 등을 강조하였다. 이 때 소개되는 암호학이나 부호이론의 내용은 박승안(1999, 2000, 2003) 등에는 소개되지만, 정규 강좌에서는 잘 다루어지지 않았던 것이라 다소 생소하게 여겨질 수 있을 것이다.

현대대수학Ⅰ 강좌에서는 군론이나 환론 그 자체의

깊이 있는 이해보다 대수적 구조의 종합적 이해에 초점을 맞추기 위해, 군, 환, 그리고 벡터 공간 등 대표적인 대수적 구조를 병렬로 다루며, 학교수학 내용과의 관련성을 유념하여 살피게 하였다. 이와 같은 접근은, 강좌 내용에 관한 폭넓은 이해를 도모하기 위한 적절한 필독서 제시, 학생들의 적극적인 수업 참여를 유도하기 위한 매 주의 퀴즈 등과 함께 본 고에서 제시한 모든 학습 지도 방안의 특징이라 하겠다.

본고에서는 대수영역 강좌와 함께 교사를 위한 수리철학을 다루었다. 다른 강좌에서도 마찬가지이지만 교사를 위한 수리철학은 저자의 취향이 특히 강하게 반영된 것이다. 특히 괴델의 불완전성 정리나 확률론적 논증은 수학(특히 증명이론)은 물론이고 철학이나 이론물리학 등 학문 전반에 걸쳐 심대한 영향을 끼친다. 이러한 변화는 학교 수학에도 반영되어야 한다고 생각되어 비교적 자세히 다루었다. 역설이 많이 다루어진 것도 같은 맥락에서이다. 본고에서 집합론을 다룬 것도 저자의 이러한 의도와 무관하지 않다.

참 고 문 헌

교육부 (1997). 수학과 교육과정, 제7차 교육과정 교육부 고시 제 1997-15호 [별책 8].

김미월 (2001). 고등학교 수학교사의 수학 및 교수-학습에 대한 신념과 교수 실제의 관계 연구, 한국교원대학교 박사학위논문.

김시년 (1999). 교사의 수학에 대한 신념이 수업 방법과 학생의 문제해결 수행에 미치는 영향, 한국수학교육학회지 <초등수학교육> 3(1), pp.79-88, 서울: 한국수학교육학회.

김응태 · 박승안 (1994). 선형대수학 제 2 판, 서울: 경문사.

김응태 · 박승안 (2000). 현대대수학 제 4 판, 서울: 경문사.

김응태 · 박승안 (2002). 정수론 제 5 판, 서울: 경문사.

박승안 (1999). 대수학과 암호학, 서울: 경문사.

박승안 (2000). 대수학과 그 응용, 서울: 경문사.

박승안 (2003). 암호학과 부호이론, 서울: 경문사.

신현용 (2003). 교사 양성 대학 수학교육과 교육 과정 및 교수-학습 방법 개발에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 42(4). pp.431-452, 서울: 한국수학교육학회.

신현용 · 강미광 · 박혜숙 · 신준식 · 이강섭 · 이기석 · 이병수 · 이재학 · 정순모 · 한인기 · 현종익 · 황선욱 (2003). 교사 양성 대학 수학 교육과 교육 과정 및 교수 · 학습 방법 개발(연구 보고서), 한국수학교육학회.

신현용 · 승영조 역 (2002). 무한의 신비, 승산.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.

우정호 역 (2001). 수학적 발견의 논리, 민음사.

장인옥 (2001). 초등학교 교사의 수학에 대한 신념과 교수 실제에 관한 사례 연구, 한국교원대학교 석사학위 논문.

전대호 옮김 (2002). 유클리드의 창 : 기하학 이야기, 까치.

조정수 (2000). 수학의 교수-학습을 이해하기 위하여: 수학교사의 믿음, 한국수학교육학회지 <초등수학교육> 4(1), pp.19-29, 서울: 한국수학교육학회.

한국교육과정평가원 (2000). 수학과 교육목표 및 내용 체계화 연구, 한국교육과정평가원 연구보고 RRC 2000-3.

Ball, D. L. (1990a). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), pp.132-144, 서울: 한국수학교육학회.

Ball, D. L. (1990b). The Mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education, *The Elementary School Journal* 90, pp.449-467, 서울: 한국수학교육학회.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ. 신현용 · 승영조 역 (2002). 초등학교 수학 이렇게 가르쳐라, 승산.

Thompson, A. (1992). *Teachers' belief and conception: A synthesis of the research*, In D. A. Grouws (Ed.). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, NY: Macmillan.

http://home.freechal.com/parksahn/

http://www.teacheredu.co.kr

A Proposal on Contents and Teaching-Learning Programs of Algebra Related Courses in Teachers College

Shin, Hyunyong
Department of Mathematics Education, Korea National University of Education, 363-791, Korea
Email: shin@knue.ac.kr

The main purpose of this work is to propose programs of algebra courses for the department of mathematics education of teacher training universities. Set Theory, Linear Algebra, Number Theory, Abstract Algebra I, Abstract Algebra II, and Philosophy of Mathematics for School Teachers are discussed in this article.

* ZDM Classification : B5
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97B50
* Key Word : teacher training, Set Theory, Linear Algebra, Number Theory, Abstract Algebra, Philosophy of Mathematics for School Teachers.