韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2003, 11. 제 42권, 제 4호, 465-480.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2003, Vol. 42, No. 4, 465-480.

# 중등 교사 양성을 위한 수학교육학 및 수학사 강좌에 대한 연구

한 인 기 (경상대학교)

## 1. 서 론

중등학교 수학교육의 개선을 위해 수학교사를 양성하는 사범대학의 교육과정 내실화와 효율적인 교수-학습 자료 및 방법의 개발은 필수적이라 할 수 있다. 특히, 사범대학에서 수학교사를 양성하기 위해 필요한 최소 필수의 지식과 능력의 양과 수준이 규정되지 않은 우리 나라의 교육 현실을 감안하면, 사범대학 교육의 내실화를 위한 다양한 수준의 연구는 매우 중요하다고 할 수 있다.

사범대학의 수학교육에 관련된 국내 연구들을 살펴보면, 사범대학 수학교육과의 교과목 개설 현황 및 개선 방향에 관련된 연구로 신현성(1992), 박만구・전경순・정인철(2001), 이상건(1998), 전평국(1993) 등의 연구를 들 수 있고, 수학 임용고시와 사범대학 수학교육과의 교육에 관련된 연구로 김인수(2001), 조한혁(2001) 등의 연구를 들 수 있다. 이들 연구는 사범대학 수학교육과에서의 효율적인 교사 양성을 위한 방향 설정 및 개선 방안의 모색이라는 측면에서는 의미가 있다. 그러나, 좀더 구체적인 수준에서 교사 양성을 위해 사범대학 수학교육과에서 지도되어야 하는 교과목의 성격, 내용, 수준, 구체적인 교수-학습 자료의 개발에 관련된 체계적인 연구는 미미한 상태이다.

최근 들어, 많은 연구자들이 사범대학에서의 수학 교사 양성에 관련된 다양한 측면에 관심을 기울이고 있다. 특히 신현용(2003)은 초・중등학교 수학교사의 양성을 위한 교육과정 및 교수-학습 방법의 개발을 위한 9가지 기본 방향을 제시하였으며, 국내외의 수학교사 양성에 관련된 다양한 자료들을 분석하여, 초・중등 수학교사 양성을 위한 교육과정을 제시하였다.

본 연구에서는 신현용(2003)의 연구에 제시된 중등학교 수학교사 양성을 위한 교육과정 및 교수-학습 개선을 위한 9가지 방향에 상응하여, 사범대학 수학교육과에서 지도되는 수학교육학 및 수학사 강좌의 구체적인 교육과정과 효율적인 교수-학습을 위한 몇몇 방안을 제시할 것이다. 이를 통해, 사범대학 수학교육과 교육과정 및 교수-학습 방법의 내실화를 위한 의미 있는 시사점을 얻을 수 있을 것이며, 중등학교 수학교육의 개선을 위한 바탕을 제공할 수 있을 것이다.

## 2. 사범대학의 수학교육학, 수학사 강좌의 개발 방향 및 구성

최근 들어, 수학교육과에 개설되는 수학교육학 관련 교과목들이 점점 증가되어, 3학년 1학기부터 4학년 2학기까지 학기마다 한 강좌 이상의 수학교육학 관련 교과목이 개설되는 경우가 많다. 본 연구에서는 사범대학 수학교육과에 개설되는 수학교육학 관련 교과목을 기본적으로 3학점 4강좌로 가정하고, 3학년 1학기에서 4학년 2학기까지 학기마다 수학교육학 관련 교과목이 한 강좌씩 개설되는 것으로 하여, 중등학교 수학교사의 양성을 위해 필수적인 수학교육학 영역의 내용을 선정하여 체계적으로 조직하였다. 한편, 수학사는 대학마다 강좌가 개설되는 학년이나 학점에 있어 차이가 있기 때문에, 수학교육과의 어느 학년에 개설되더라도 문제가 발생하지 않도록 하였고 3학점을 기준으로 하여 교육과정을 개발하였다.

* 2003년 9월 투고, 2003년 11월 심사 완료.
* ZDM분류 : B5
* MSC2000분류 : 97B50
* 주제어 : 교사 양성 교육, 수학교육의 기초, 수학 교수-학습 이론, 수학 문제해결 교육론, 수학과 교재분석 및 평가론, 수학사.

(1) 수학교육학 관련 교과목의 개발 방향

수학교육학 관련 필수 교과목은 수학교육의 기초(3학년 1학기), 수학 교수-학습 이론(3학년 2학기), 수학 문제해결 교육론(4학년 1학기), 수학과 교재분석 및 평가론(4학년 2학기)으로 구성되며, 각 교과의 내용은 중복되지 않고 일정한 체계성을 가지도록 선정·조직하였다. 본 연구에서는 '수학교육의 기초'와 '수학 교수-학습 이론'에서는 교과목의 성격, 구체적인 교수-학습 주제 및 내용, 참고도서, 과제물 등을 상세히 기술하였으며, '수학 문제해결 교육론'과 '수학과 교재분석 및 평가론'에서는 교과목의 성격, 교수-학습 주제 등을 간단히 나열하였다.

수학교육학 관련 교과목의 교육과정 및 교수-학습 방법의 개발을 위해 신현용(2003)의 연구에 제시된 9가지의 기본 개선 방향에 따랐으며, 특히 수학교육학 관련 교과목의 개발에서는 다음과 같은 측면을 구체적으로 고려하였다.

첫째, 수학교육학의 인접 학문들(수학, 철학, 교육학, 심리학, 논리학)의 연구 결과들 중에서 수학교사가 수학교육학에 대한 폭넓은 식견과 올바른 방향성 정립을 통해 중등학교의 수학 교수-학습 과정에서 타당한 교육적 선택을 하는데 바탕이 될 수 있는 주제들을 고려하였다.

예를 들어, 19세기와 20세기에 활발하게 연구된 수학기초론의 중요한 주제인 수학적 대상의 본질, 수학과 다른 학문의 관계, 수학의 특성들, 추상화, 추상화와 수학의 발전 방향, 수학적 구조, 수학과 물리적 세계의 관계, 수학적 모델링, 수학화, 수학에서 공리적 방법, 공리계의 무모순성 및 증명, 공리계의 모델, 공리계의 독립성 및 증명, 공리계의 완전성 및 증명 등의 주제를 '수학교육의 기초' 강좌에 포함시켰다. 그리고, 현대수학의 중요한 연구 성과인 힐버트의 '기하학 기초론'에 제시된 공리적 방법을 지나치게 엄밀하지 않은 수준으로, 그러나 중학교에 제시된 삼각형의 합동조건을 교사들이 증명하는데 논리적으로 문제가 발생하지 않도록 약화시켜 수학의 연역적 구성의 예로 '수학교육의 기초' 강좌에 포함시켰다.

논리학에 관련하여서는 논리적 사고의 본질, 수학의 연역적 체계 구성, 수학적 증명의 본질, 수학의 논리적 언어, 논리적 추론 규칙들, 형식적 증명의 틀에 관련된 주제를 '수학교육의 기초' 강좌에 포함시켰다.

교육학에 관련하여서는 교과목으로서 수학의 본질, 교과목의 구성 요소들, 수학교육의 목표, 수학교육사의 발전 방향, 수학 교육과정 변천 등을 '수학교육의 기초' 강좌에 포함시켰다. 그리고, '수학 교수-학습 이론'에 브루너의 발견학습 이론, 지식의 구조 개념을 포함시켰다.

철학에 관련하여서는 소크라테스의 수학관, 수학적 지식의 확실성, 지식의 선재성, 라카토스의 증명과 반박의 방법, Popper의 비판적 오류주의, 수학적 지식의 본질, 수학적 지식의 성장, 보조정리합체법 등을 '수학교육의 기초' 강좌에 포함시켰다. 그리고, '수학 교수-학습 이론'에는 Fischbein의 직관에 대한 연구를 포함시켰다.

심리학에 관련하여서는 수학적 재능과 개인차의 심리학, 수학적 재능의 구조, 문제해결 과정에서의 개인차, 분석-종합적 사고, 수학적 사고 조작의 특성들, 수학적 기억력 등을 '수학교육의 기초' 강좌에 포함시켰다. 그리고, '수학 교수-학습 이론'에는 스켐프의 지능 모델을 포함시켰고, 피아제의 발달심리학 이론은 '수학 교수-학습 이론' 강좌에서 선택적으로 다룰 수 있도록 하였다. 한편, '수학 문제해결 교육론' 강좌에서는 구체적인 수준에서 문제해결의 심리적 측면에 대해서 다루도록 하였다.

둘째, 수학교육학의 이론적 지식과 중등학교의 수학교육 실제가 유기적으로 연결될 수 있도록 수학교육학 관련 교과목들을 조직하였다. 이를 통해, 수학교육학의 의미 있는 연구 결과들이 중등학교 수학교육의 개선에 적극 도입될 수 있도록 하였다.

본 연구에서 개발된 수학교육학 관련 교과목들 중에서 이론적 성격이 강한 '수학교육의 기초'와 '수학 교수-학습 이론'은 사범대학 수학교육과의 3학년에 다루어 학생들이 수학교육의 전반에 대한 폭넓은 식견을 가질 수 있도록 하였으며, 실제적인 응용의 성격이 강한 '수학 문제해결 교육론'과 '수학과 교재분석 및 평가론'은 4학년에 다루도록 하였다. 특히, 대부분의 사범대학에서 현장교육실습(교생실습)을 4학년에서 이수토록 하는 것을 감안하면, 수학교육학 관련 교과들 중에서 실제적이고 응용적인 측면이 두드러진 교과목을 4학년에 배치하는 것은 나름대로 의미 있을 것이다.

즉, 3학년에서 배운 이론적 지식을 4학년에서 수학 교수-학습 자료의 수준으로 구체화할 수 있는 경험을 가질 수 있으며, 수학교육학에 관련된 이론적 지식을 중등학교에서 직접 활용할 수 있는 구체적인 수준으로 변

환시킬 수 있는 기회를 가질 수 있을 것이다.

셋째, 수학교육학에 관련된 분야의 최근 연구 성과들을 적극적으로 도입하였다. 수학적 증명의 본질 및 지도, 라카토스의 수리철학적 견해와 수학교육, 수학 역사-발생적 원리, 프로이덴탈의 수학화 학습-지도론, Fischbein의 직관에 대한 연구에서 직관과 수학교육, Brousseau의 수학교수학적 상황론, 분석-종합적 활동, 문제의 구성, 문제해결을 위한 체계적인 탐색 수행, 문제해결의 심리적 측면, 수학과 평가의 원리, 수학교육에서의 개인차 등의 주제는 현재 수학교육 분야에서 활발하게 연구되고 있는 중요한 분야들이다. 본 연구에서는 이들 주제에 관련된 의미 있는 연구 결과들을 수학교육학 강좌의 구성에 적극적으로 포함시켰다.

넷째, 수학교사 임용고사에 대한 준비를 고려하였다. 임용고사의 내용과 수준에 대해서는 많은 논란이 있으며, 임용고시가 사범대학의 수학교육에 바람직한 영향을 주는가에 대해서도 많은 논란이 있다. 그러나, 본 연구에서 사범대학의 수학교육과 교육과정 및 교수-학습 방법에 관련하여 실행 가능한 발전 방향 및 구체적인 개선 방안을 모색하고 있기 때문에, 수학교사 임용고시 준비라는 사범대학의 현실을 외면할 수는 없다. 따라서, '수학교육의 기초', '수학 교수-학습 이론', '수학 문제해결 교육론', '수학과 교재분석 및 평가론' 강좌를 수강하면 임용고사에 충분히 대응할 수 있도록 강좌 내용을 구성하였다.

(2) 수학교육학 관련 교과목의 구성

'수학교육의 기초'는 예비 수학교사들이 처음 접하는 수학교육학 관련 교과목으로, 학생들이 수학교육 전반에 걸친 식견을 가지도록 하며, 수학교육학에 대한 체계적 학습을 위해 필요한 지식과 능력을 기르며, 후속적인 수학교육학 연구를 위한 올바른 방향을 설정하도록 하는 것을 목적으로 한다.

'수학교육의 기초'는 수학의 본질과 수학교육, 수학교육의 목표, 한국 수학교육사, 소크라테스의 수학관, 라카토스의 증명과 반박의 논리, 수학교육의 논리적 기초, 수학교육의 심리적 기초 등으로 구성된다.

'수학 교수-학습 이론'에서는 수학 교수-학습에 관련된 다양한 교수-학습 이론을 제시하여, 학생들이 수학교육에 관련된 체계적인 이론적 지식을 습득하도록 하고, 중등학교 수학교육의 개선을 위한 교수학적 기초의 제공을 목적으로 한다.

'수학 교수-학습 이론'에서는 수학 교수-학습에 관련하여 국내에 소개된 이론들을 중심으로 구성하였으며, 수학 역사-발생적 원리, 프로이덴탈의 수학화 학습-지도론, 반힐레의 기하학 학습 수준 이론, 스켐프의 수학 학습 이론, 브루너의 수학 학습 이론, 딘즈의 수학 학습 이론, Fischbein의 직관과 수학교육, Brousseau의 수학교수학적 상황론 등을 다루었다. 한편, 피아제의 발달심리학 이론은 교육학의 교육심리학 강좌에서 충분히 다루므로 나열한 수학 교수-학습 이론을 다룬 후에 시간적 여유가 있으면 선택적으로 다루도록 하였다.

그밖에 오수벨의 설명학습 이론, 가네의 과제분석 및 학습의 유형, 스키너의 프로그램 학습 이론 등도 몇몇 수학교육론 교재에 소개되어 있다. 그러나, 이들 이론은 수학교육학의 이론이라기 보다는 일반 교육학 이론이며, 교육학 분야에서 충분히 다루기 때문에 본 강좌에서는 생략하였다. 수학 교과 자체의 특성을 반영한 교수-학습 이론이 구체적으로 연구되기 전에는 일반 교육학의 이론을 수학교육에 적용시켜 교수-학습 과정의 몇몇 교육적 측면을 고찰하기도 했었다. 그러나, 최근 수학교육학 분야에서 수학 고유의 특성을 충실히 반영된 이론들이 활발하게 연구되고, 이들이 수학 교수-학습에서 유의미한 변화를 만들고 있기 때문에, 본 연구에서는 수학의 고유한 특성을 반영한 교수-학습 이론을 중심으로 교과 내용을 선정하였다.

'수학 문제해결 교육론'에서는 수학 문제해결에 관련된 이론적 지식들을 바탕으로 중등학교 수학교육에 관련된 다양한 수학 문제를 직접 해결하고 이를 논리적 측면과 심리적 측면에서 분석한다. 이를 통해, 중등학교에서 효율적인 수학 문제해결 지도의 방향과 방법을 습득하도록 하여 수학교육의 질적 향상을 도모하는 것을 목적으로 한다.

'수학 문제해결 교육론'에는 수학 문제의 구성 요소 및 구조, 수학 문제의 교육적 의의, Polya의 문제해결론, 다양한 발견술, 분석-종합적 활동, 문제의 구성(제작), 문제해결을 위한 체계적인 탐색 수행, 문제해결에서 반성적 활동, 문제해결의 심리적 측면, 작도문제의 해결 방

법, 모어-마스케로니의 정리, 귀납, 유추, 은유 등의 내용으로 구성된다.

'수학과 교재분석 및 평가론'에서는 수학교육 평가 이론에 대한 체계적인 지식을 바탕으로 수학교재를 분석한다. 이를 통해, 학생들의 수학적 지식, 기능, 능력을 올바르게 평가할 수 있는 능력과 실제적인 경험을 가지며, 중등학교 수학교육의 내용 및 방법을 개선하는 것을 목적으로 한다. '수학교육 평가 이론'은 수학과 평가의 원리, 개념적 지식과 절차적 지식의 평가, 문제해결력 평가, 수학적 의사소통 능력의 평가, 수행평가 등으로 구성된다.

(3) 수학사 강좌의 개발 방향 및 구성

수학사는 예비교사들이 중등학교 수학 내용, 수학적 탐구 방법, 수학의 생성 및 발전의 방향에 대한 전반적인 이해와 개관을 가지며, 수학사를 통해 수학교육을 개선할 수 있는 지식과 능력을 함양하도록 하는 것을 목적으로 한다.

수학사 강좌는 수학사 연구, 수학 역사-발생적 방법, 수학적 개념과 방법의 출현(고대 이집트와 바빌론의 수학), 고대 그리스의 초기 수학 이론들, 3대 작도 불능 문제, 헬레니즘 시대에 수학의 공리적 구성(유클리드 원론), 고대 그리스의 무한소 방법(아르키메데스의 창의적 수학 연구); 원추곡선 및 고대 후기의 수학 이론들, 중국과 인도의 수학, 중세 유럽의 수학, 르네상스 시대의 수학, 17세기의 새로운 수학(해석기하학의 발명), 17세기의 계산 방법 등의 주제로 구성되었다.

수학사 강좌의 개발에서는 첫째, 수학교육학 관련 강좌와의 유기적인 연결성을 고려하였다. 본 연구에서 개발된 수학사 강좌에서는 수학 발달의 일반적인 방향성 및 발전 단계, 수학 발전 과정에서의 규칙성, 수학사에서 나타나는 수학적 사고의 특성, 수학적 개념이나 방법들의 발생 및 발전의 경로에 대한 지식을 체계적으로 다루었다. 이를 통해, 수학 및 수학교육의 본질 및 발전 방향에 대한 올바른 견해를 가질 수 있을 것으로 기대된다. 특히, '수학교육의 기초'에서 다루는 수학의 대상 및 특징, 수학과 물리적 세계의 관계, 수학적 모델링, 수학에서 공리적 방법, '수학 문제해결 교육론'에서 다루는 다양한 발견술들, 분석-종합적 활동, 작도문제의 해결 방법, 모어-마스케로니의 정리, 귀납, 유추, 은유 등의 주제들은 수학사에서 구체적인 예들을 찾아볼 수 있으므로, 수학사와 수학교육학 관련 교과목의 관련성을 고려하는 것은 의미 있을 것이다.

둘째, 수학교육학에서 강조되는 역사-발생적 방법을 수학사의 다양한 주제를 통해 심도있게 다루었다. 최근, 논리적인 수학 교수-학습 방법에 대응되는 개념으로 수학 역사-발생적 방법이 강조되고 있다. 수학 역사-발생적 방법은 수학을 학습하면서, 학생들은 인류가 수학적 지식을 획득하면서 지나왔던 길을 짧게 반복한다는 가설에 기초한다. 많은 수학자들은 수학교육에서 역사-발생적 방법을 옹호하고 있다.

본 연구에서는 몇몇 주제들(피타고라스 정리, Menelaus 정리, 완전수, 도형수, 브라마굽타 공식, 피보나치 수열, 페르마 소정리)에 대해 수학사에서 나타난 발전의 방향, 규칙성 등을 구체적인 자료와 함께 고찰하도록 하였다[4].

한편, 본 연구에서는 수학교육학 교과목인 '수학 교수-학습 이론'에 수학 역사-발생적 원리를 포함시켰다. 이것은 수학사와 수학 교수-학습 이론의 두 교과에서 중복하여 수학 역사-발생적 원리를 다루어야 함을 의미하는 것이 아니며, 현재 수학교육학 분야에서 수학 역사-발생적 원리가 활발하게 논의되고 있음을 반영한 것이다. 본 연구에서 의도하는 것은 수학 역사-발생적 방법을 수학사 강좌에서 지도하고, 수학 교수-학습 이론에서는 이를 제외한 수학 학습 이론들을 지도하는 것이다[5].

셋째, 17세기의 해석기하학의 발명, 로그의 발명까지의 수학사 내용을 다루었고, 17세기 이후에 발명하여 발전된 미적분학이나 현대 수학의 다양한 주제들은 다루지 않았다. 그 이유로, 첫째 시간적인 제약을 들 수 있다. 3학점 1학기를 기준으로 수학사의 내용을 구성했기 때문에, 미적분학, 해석학, 행렬, 벡터, 집합 등의 내용을 포함하면, 그 내용과 양이 방대해져 제시된 내용을 모두 다룰 수 없다. 물론, 몇몇 수학사 책에서는 고대수학에서부터 현대수학에 이르기까지의 내용을 포괄적으로 제시하고 있기는 하지만, 경험적으로 보면 고대수학에서 현

4) 본 연구에 제시된 수학사 강좌의 교육과정에 상응하는 교재로, <한인기(2003). 교사를 위한 수학사. 서울: 교우사>를 참고하기 바람.

5) '수학교육의 기초'에 제시된 '추상성과 수학의 발전 단계'에 관련된 내용도 수학사에서 다루는 것이 바람직할 것이다.

대수학의 내용까지를 충실하게 다루는 것은 3학점 1학기의 시간으로는 실현 가능성이 적다. 둘째, 사범대학 수학교육과 학생들이 수학사를 배우는 목적 중의 하나는 수학사에 제기된 수학 문제, 수학적 아이디어 하나 하나를 세심하게 고찰하여 중등학교 수학교육의 개선을 위한 의미 있는 시사점을 찾는 것이다. 그렇기 때문에, 수학교육과 학생들에게는 수학사에 대한 연대기적인 사실적 지식보다는 수학 문제, 수학적 아이디어의 발생, 발전 방향에 대한 충분한 고찰과 수학사에 제기된 문제들에 대한 해결의 경험이 중요할 것이다. 이를 위해서는 문제해결을 위한 충분한 시간이 필요하기 때문에, 수학사의 모든 주제나 문제들을 포함하지 않았다.

넷째, 수학사 연구를 통해, 중등학교 수학 내용에 대한 심화 학습의 기회를 제공할 수 있도록 하였다. 이를 위해, 본 연구에서는 소단원으로 '교재연구'를 설정하여, 수학사 발전에 나타난 개념이나 수학적 방법에 대한 심화 학습의 기회를 제공하도록 하였다. 예를 들어, 고대 그리스의 초기 수학 이론에 관련하여는 교재연구로 '피타고라스 정리와 코사인 정리', '유클리드 알고리즘을 이용한 1차 부정방정식의 해법', 'Menelaus 정리'를 제시하였고, 헬레니즘 시대에 수학의 공리적 구성에서는 '완전수'를, 고대 후기의 수학 이론에서는 '도형수'를, 고대 인도의 수학에서는 '브라마굽타 공식의 확장'을, 중세 유럽의 수학에서는 '피보나치 수열의 성질'을, 17세기의 새로운 수학에서는 '페르마 소정리' 등을 제시하였다. 이들 내용은 중등학교에서 다루는 수학교과 내용을 수학사의 생생한 기록을 통해 심화시켜, 학생들 자신이 수학 발전의 한 순간에서 수학적 탐구 활동을 수행하고 있다는 인식을 가지도록 할 것으로 기대된다.

다섯째, 수학의 발생과 발전에 관련된 다양한 요인들로 수학과 사회적 요구의 관계, 수학과 다른 학문의 관계, 경제적·사회적 구조 변화가 수학의 발전에 끼친 영향 등을 제시하여, 수학이 다른 학문 영역이나 경제적 사회적 환경에서 생성 발전하는 학문이라는 수학관을 가질 수 있도록 하였다.

## 3. '수학교육의 기초' 강좌의 교육과정

'수학교육의 기초' 강좌에서 다루는 각 주제에 대한 구체적인 내용은 다음과 같다.

(1) 수학의 대상 및 특징

수학적 대상. 양적인 관계. 공간적 형태. 수학과 다른 학문의 관계. 추상화. 추상화 수준. 추상화와 수학의 시대 구분. 제 1수준의 추상화. 개별적 대상의 질적 특성으로부터 이탈. 동일시. 단위. 서수. 기수. 숫자의 발명. 제 2수준의 추상화. 구체적인 양으로부터 이탈. 변수. 산술에서 대수로 전환. 제 3수준의 추상화. 구체적인 조작으로부터 이탈. 변수의 질적 특성으로부터 이탈. 수학적 구조.

(2) 수학과 물리적 세계의 관계. 수학적 모델링

수학과 물리적 세계의 관계. 물리적 세계. 관념의 세계. 물리적 대상. 관계. 문제설정. 추상화. 수학화. 수학적 모델링. 연역. 공리적 방법. 구체화. 재해석.

(3) 수학에서 공리적 방법

공리계. 공리계의 무모순성. 공리계의 모델. 공리계의 무모순성 증명. 공리계의 독립성. 공리계의 독립성 증명. 공리계의 완전성. 공리계의 완전성 증명.

중등학교 평면기하학의 공리적 구성. 기본 개념. 무정의 용어. 점. 직선. 평면. (점이 직선에) 놓여있다. (직선에서 한 점이 두 점) 사이에 놓여있다. 포개다. 평면에서 점과 직선에 관한 공리. 직선에서 점의 위치에 관한 공리. 선분의 측정에 관한 공리. 점에 의한 직선 분할에 관한 공리. 직선에 의한 평면 분할에 관한 공리. 각의 측정에 관한 공리. 선분의 작도에 관한 공리. 각의 작도에 관한 공리. 합동인 삼각형의 존재에 관한 공리. 직선의 평행에 관한 공리. 선분. 반직선. 각. 평각. 예각. 직각. 둔각. 삼각형. 이등변삼각형. SAS 합동 조건. ASA 합동조건. SSS 합동 조건.

(4) 교과목으로서 수학

교과로서 수학의 구성 요소들. 개념들. 법칙들. 수학 교과의 학습 자료들을 통해 형성되는 심미적인 규범들. 철학적 규범들. 지식의 획득을 위해 필요한 수학적 사고와 탐구의 방법들. 수학의 역사에 관련된 몇몇 주제들. 위대한 수학자들에 대한 정보. 지식을 사용하는 능력을 포함하여 다양한 능력과 기능들. 학생들이 숙달해야 하

는 인지적 활동의 방법들. 논리적 조작들. 사고 조작들.

(5) 수학교육의 목표

초등학교 수학교육 목표. 중학교 수학교육 목표. 고등학교 수학교육 목표. 수학의 가치를 이해. 자신의 능력에 자신을 가지는 것. 수학적 문제해결자가 되는 것. 수학적으로 의사소통하는 것. 수학적으로 추론하는 것. 수학적 지식, 능력, 기능의 기초에 관련된 목표. 수학을 통해 획득되는 정신 육성의 요소들에 관련된 목표. 수학교육을 통해서만 길러질 수 있는 정신적 특성들에 관련된 목표.

(6) 한국 수학교육사

신제수학. 신제수학의 배경. 신제수학의 교육과정 구성. 제 1류. 제 2류. 신제수학의 문제점. 신제수학의 중학교 교수 요목. 군정청의 교수요목. 해방 직후의 수학교육. 군정기의 교수요목. 해방 직후 수학교육의 문제점.

제 1차 교육과정. 생활단원학습. 진보주의 교육사상. 생활단원학습기의 교과서. 생활단원학습기 교육과정의 특징. 생활단원학습기의 문제점. 제 2차 교육과정. 계통학습. 2차 교육과정의 특징. 2차 교육과정의 문제점. 제 3차 교육과정. 새수학. 수학교육 현대화. 수학교육 현대화의 배경. SMSG 교과서. 새수학에 따른 교육과정 개정의 방향. 중 · 고등학교 교육과정 조직. 중 · 고등학교 교과내용의 변화. 새수학의 문제점. 'back to basics' 운동. 제 4차 교육과정. 교육과정 개정의 기본 방향. 고등학교 수학과 교육과정의 내용 조직. 제 5차 교육과정. 교육과정 개정의 기본 방향. 고등학교 수학과 교육과정의 내용 조직. 고등학교 교과 내용의 변화. 수학 Ⅲ의 신설. 제 6차 교육과정. 교육과정 개정의 기본 방향. 실용수학의 신설. 제 7차 교육과정. 교육과정 개정의 기본 방향.

수학 교과 내용에 대한 비판적 고찰. 집합. 진법. 무한소수. 계산기 · 컴퓨터와 수학교육.

(7) 소크라테스의 수학관

소크라테스의 수학관. 수학적 지식의 확실성. 지식의 선재성. 산파법. 조산과정. 상기설.

(8) 라카토스의 증명과 반박의 방법

Popper의 비판적 오류주의. 수학적 지식의 본질. 지식의 성장. 무한후퇴. 증명. 사고실험. 반례. 전면적 반례. 국소적 반례. 전면적 반례가 아닌 국소적 반례. 전면적 반례에 의한 추측의 비판. 다각형. 괴물배제법. 예외배제법. 괴물조정법. 보조정리합체법. 발견의 논리와 정당화의 논리. 전면적이고 국소적 반례. 국소적 반례가 아닌 전면적 반례. 허위성 재전달의 원리. 증명과 반박의 바탕으로 귀납. 연역적 추측. 소박한 추측. 분석. 종합.

(9) 수학적 증명의 개관

실험. 경험. 증명. 형식적 체계. 공리. 추론규칙. 덧셈의 결합법칙. 덧셈의 교환법칙. 역원의 존재. 덧셈에 대한 항등원. 명제들의 유한 순차적 연결. 추이성. 대입규칙. 치환규칙

(10) 수학의 논리적 언어

수학문장. 알파벳. 문자. 변수. 상수. 항. 기본항. 모형. 자유변수. 속박변수. 논리식. 기본논리식. 명제형식. 명제. 단항술어. 논리함수. 이항술어. 2변수 논리함수. 복합 문장. 논리적 연결어 <…가 아니다>. <그리고>. <또는>. <만약 …이면, 그러면. …>. <…일 때 오직 그때에만 …>. <모든 …에 대해>. <…이 존재한다>. 논리결합기호. 문장을 수리논리의 언어로 번역하기. 해석. 해석영역. 배중률. 모순률. 이중부정법칙. 대우법칙. 전제대치법칙. 드모르강의 법칙. 명제논리. 술어논리. 논리적 구조. 타당성

(11) 유도와 유도규칙

유도. 유도규칙. 추론규칙. 구체화규칙. 구체적 결론규칙. 유도규칙들의 증명. 함의도입규칙. 함의제거규칙. 모순귀착원리. 논리곱도입규칙

(12) 형식적 증명과 내용적 증명

증명 개념의 상세화. 내용적 증명. 형식적 증명. 명제분석. 간접증명. 직접증명. 귀류법. 수학적 귀납법. 귀납법의 공리

(13) 수학적 재능과 개인차의 심리학

재능. 수학적 재능. 지식. 기능. 능력. 수학적 재능의 구조. 개인차. 정보의 수집 단계. 정보의 처리 단계. 정보의 파지 단계. 우수아. 평균적인 학생. 둔한 학생. 분석-

종합적 사고. 수학적 대상. 관계 및 연산을 일반화하는 재능. 추론을 단축시키는 재능. 사고과정의 유연성. 우아한 해법을 얻으려는 노력. 사고 과정의 가역성. 수학적 기억력

'수학교육의 기초' 강좌에 대한 참고 자료는 교육부(1999a, 1999b), 구광조외 5인(1988), 김응태・김연식(1985), 김응태・박한식・우정호(1988), 박한식(1986), 박한식(1991), 박한식외 7인(1997), 신현성(1999), 신현용외 5인(2001), 우정호(2000), 임정대(1982), 한인기(2003), 황혜정 외 5인(2001), 구광조・오병승・류희찬 공역(1992), 우정호 역(1991), 김성숙・김형보 편역(1999), Becker & Shimada(1997), Solow(1990), Gusev(1994), Krutetski(1968), Stolyar(1987) 등이다.

## 4. '수학 교수-학습 이론'의 교육과정

'수학 교수-학습 이론' 강좌에서 다루는 각 주제들에 대한 구체적인 내용은 다음과 같다.

(1) 수학 역사-박생적 원리

수학 역사-발생적 방법. 논리 형식주의. 역사-발생적 방법의 역사적 개관. 음수. 복소수. 문자의 사용 등의 창안과 수용. Wallis의 <대수논문: 역사와 실제>. Clairaut의 견해. Poincaré의 견해. Toeplitz의 발생적 원리. Davydov의 주장(학교에서 각 교과목의 교육은 지식의 발생과 발달에 대한 역사적 과정을 압축시켜 단축된 형태로 재현할 수 있도록 구성되어야 한다.). 발견술적 방법. 미적분학의 기본 정리에 대한 역사-발생적 분석. 형식불역의 원리. 기하학적-대수학적 형식 불역의 원리

(2) 프로이덴탈의 수학화 학습-지도론

현실주의적 수학교육. 수학화. 현실적 문맥. 비형식적 지식. 반성적 사고. 반교수학적 전도. 현상의 정리 수단으로서의 수학. 실행되는 수학. mental objects의 구성. 수학 학습 과정의 관찰. 수준의 비약. 재발명. 기성수학. 내용과 형식의 교대작용. 공간의 수학화. 평행사변형 개념적 영역의 수학화. 기하를 대수화하는 수학화. 인식수준의 상승. 불연속적 과정. 수평적 수학화. 수직적 수학화. 만인을 위한 수학. 열린 수학. 닫힌 수학. 프로이덴탈의 아동관. 수학교수현상학. 안내된 재발명. 역사-발생적 원리. 현실과의 관련성이 적재된 수학. 학습수준. mental objects의 구성. 전형적인 보기를 통한 개념 지도. 수학적 언어의 수준. 엄밀성의 수준. 귀납적 이해.

(3) 반힐레의 기하학 학습 수준 이론

수학적 사고 활동. 재발명. 기하학적 사고 수준. 제 0수준(시각적 인식 수준). 제 1수준(도형 분석적 수준). 제 2수준(이론적 정리의 수준). 제 3수준(연역적 추론의 수준). 제 4수준(기하학의 엄밀화 수준). 안내단계. 제한된 탐구단계. 명확화단계. 자유로운 탐구단계. 통합단계

(4) 스켐프의 수학 학습 이론

지능. 지능학습모델. 지휘체계. 델타 1. 델타 2. 스키마. 개념적 구조. 직관적 지능. 반성적 지능. 스키마의 통합적 기능. 새로운 학습을 위한 도구로서의 스키마. 스키마의 사용영역. 도구적 이해. 관계적 이해. 논리적 이해. 사고 활동의 양식과 이해. 도구적 수학과 관계적 수학의 장점

(5) 브루너의 수학 학습 이론

지식의 구조. 기본 개념. 원리. 분류화. 체계화. 발견학습. 표현 양식. 경제성. 생성력. 행동적 표현. 영상적 표현. 상징적 표현. 구성이론. 기법이론. 대조와 변화 이론. 연결이론

(6) 딘즈의 수학 학습 이론

수학적 구조. 수학적 개념. 수학적 개념의 분류. 관계. 패턴. 순수한 수학적 개념. 표기적 개념. 적용적 개념. 수학적 개념 학습 단계. 자유놀이 단계. 게임 단계. 공통점 탐색 단계. 표현 단계. 상징화 단계. 형식화 단계. 수학 개념 학습 원리. 역동성의 원리. 지각적 다양성의 원리. 수학적 다양성의 원리. 구성의 원리

(7) Fischbein의 직관과 수학교육

직관. 논리형식적 구조. 직관의 역할. 형식적 사고와 직관. 추론직관. 직관적인 편견과 메타인지적 능력. 직관의 일반적 특성. 자명성. 내재적 확실성. 강건성과 고착성. 강제성. 외삽성. 이론적 특성. 전체성. 암묵성. 직관의 분류. 단정적 직관. 추측직관. 예상직관. 결론적 직관. 초

보적 직관. 이차적 직관. 직관적인 전체적 판단. 직관형성과 경험. 직관적 의미의 실제성과 음수의 형식성. 직관적 모델. 직관의 고착성과 인지적 갈등.

(8) Brousseau의 수학교수학적 상황론

수학교수학적 상황. 원형수학적 개념. 의사수학적 개념. 수학적 개념. 교수학적 변환. 지식의 교수학적 변환. 개인화. 문맥화. 탈맥락화. 탈개인화. 재문맥화. 재탈문맥화. 극단적인 교수 현상. 토파즈 효과. 주르뎅 효과. 메타인지적 이동. 형식적 고착. 인식론적 장애. 심리 발생적 근원. 교수학적 근원. 인식론적 근원. 교수학적 계약. 교수학적 계약의 내용. 교수학적 계약의 파기 문제. 딘스 효과

(9) 피아제의 심리학 이론

수학의 심리적 발생. 동화. 조절. 조직. 감각-운동기. 전조작기. 구체적 조작기. 형식적 조작기. 논리-수학적 개념. 가역성. 수학적 구조. 수학적 사고의 조작적 특성. 조작적 구성주의. 반영적 추상화. 경험적 추상화. 논리-수학적 경험. 심리적 경험. 반사. 반성. 의사경험적 추상화.

'수학 교수-학습 이론' 강좌에 관련된 참고 자료는 강옥기(2000), 강완 · 백석윤(1998), 구광조외 5인(1988), 김용운 · 김용국(1996), 우정호(2000), 한인기(2003), 황혜정외 5인(2001), 김판수 · 박성택 역(1996), 황우형 역(1997), 양영오 · 조윤동 역(2000), 이우영 · 신항균 역(1999) 등이다.

## 5. '수학사' 강좌의 교육과정

'수학사' 강좌에서 다루는 각 주제들에 대한 구체적인 내용은 다음과 같다.

(1) 수학사 연구

학문으로서 '수학'의 구성 요소. 수학사 연구의 내용 및 방향. 수학사와 수학교육. 수학사 시대 구분. 수학의 태동기. 초등수학의 시기. 변량 수학의 시기. 현대 수학의 시기. 추상화와 수학의 시대 구분. 제 1수준의 추상화. 개별적 대상의 질적 특성으로부터 이탈. 동일시. 단위. 서수. 기수. 숫자의 발명. 제 2수준의 추상화. 구체적인 양으로부터 이탈. 변수. 산술에서 대수로 전환. 제 3수준의 추상화. 구체적인 조작으로부터 이탈. 변수의 질적 특성으로부터 이탈. 수학적 구조.

(2) 수학 역사-발생적 방법

수학 역사-발생적 방법. 논리 형식주의. 역사-발생적 방법의 역사적 개관. 음수. 복소수. 문자의 사용 등의 창안과 수용. Wallis의 <대수논문: 역사와 실제>. Clairaut의 견해. Poincaré의 견해. Toeplitz의 발생적 원리. Davydov의 주장(학교에서 각 교과목의 교육은 지식의 발생과 발달에 대한 역사적 과정을 압축시켜 단축된 형태로 재현할 수 있도록 구성되어야 한다). 발견술적 방법. 미적분학의 기본 정리에 대한 역사-발생적 분석. 형식불역의 원리. 기하학적-대수학적 형식 불역의 원리

(3) 수학적 개념과 방법의 출현. 고대 이집트와 바빌론의 수학

수체계. 상형 문자 수체계. 알파벳 수체계. 위치 수체계. 고대 이집트의 수학. 린드 파피루스. 모스크바 파피루스. 기하학(삼각형과 사다리꼴의 넓이 계산, 각뿔대의 부피 계산). 수체계 및 사칙 연산. 십진 상형문자 수체계. $10^k$꼴의 중심수. 수표. 이집트인들의 사칙 연산의 예들. 고대 바빌로니아의 수학. 점토판의 쐐기 문자. 수표. 바빌로니아 수학의 의의. 수체계 및 대수. 바빌로니아 점토판에서 방정식 풀이. 피타고라스 수. 기하학(각의 측정, 원의 넓이 구하기, 원주율)

(4) 고대 그리스의 초기 수학 이론들

산술과 피타고라스 학파. 등차수열의 합. 수의 나누어떨어짐. 다양한 평균들(산술평균, 기하평균, 조화평균)에 대한 연구. 피타고라스 학파의 발생. 음의 조화. 천문학. 유리수에 관한 연구. 비에 관한 연구. 같은 단위로 잴 수 있는 선분들. 같은 단위로 잴 수 없는 선분들. 유클리드 알고리즘과 같은 단위로 잴 수 없는 선분들. 무리수의 분류. 기하학적 대수. 영역 첨부 문제. 포물적 방법. 일차방정식 근의 작도. 이차방정식 근의 작도. 타원적 방법. 쌍곡적 방법. 비례론. 고대 수학의 비례론. 유클리드 알고리즘. 연분수. 에우독소스의 비례론. 2차비. 교재 연구(피타고라스 정리와 코사인 정리). 교재 연구(유클리드

알고리즘을 이용한 1차부정방정식의 해법). 교재 연구 (Menelaus 정리)

(5) 3대 작도 불능 문제

3대 작도 불능 문제. 히포크라테스에 의한 배적 문제의 변형. 아르키타스에 의한 배적 문제의 해결. 메나에크무스에 의한 원추 곡선 방법. 배적 문제를 방정식론에 의해 해결 불가능성의 증명. 각의 삼등분 문제. 초월곡선 Quadratrix의 활용. 삽입 방법에 의한 각의 삼등분 문제 해결. 각의 삼등분 문제 해결의 여러 가지 방법. 원적 문제. $\pi$의 계산. 히포크라테스의 초생달꼴의 넓이 구하기

(6) 헬레니즘 시대에 수학의 공리적 구성. 유클리드 원론

원론의 체제와 내용. 원론의 성격. 구조. 기술 방식. 구체적인 내용들. 공리. 공준. 정의. 유클리드 원론과 힐버트의 기하학 기초론의 비교. 원론에 제시된 명제들과 증명. 에우독소스의 보조 정리. 실진법. 교재 연구(완전수). 교재 연구(유클리드 정리)

(7) 고대 그리스의 무한소 방법. 아르키메데스의 창의적 수학 연구

제논의 역설. 데모크르투스의 자연주의 철학. 원자론적 세계관. 제론의 역설(이분법, 아킬레스와 거북이, 화살의 비행). 아르키메데스의 창의적 수학 연구. 실진법의 본질. 실진법과 극한. 실진법을 활용하여 포물선에서 활꼴의 넓이 구하기. 실진법의 구체적인 방법. 공학을 수학에 사용하여 구의 부피 구하기. integral sum 방법. differential 방법. 최대값 구하기 문제

(8) 원추곡선, 고대 후기의 수학 이론들

원추곡선과 아폴로니우스. 포물선의 방정식 구하기. 아폴로니우스의 생애 및 교육. 아폴로니우스의 원추곡선 연구. '원추곡선론'의 내용 및 특징들. 원추곡선들. 원추곡선의 명칭 유래. 원추곡선의 표준형. 해석기하학의 원형으로 아폴로니우스의 좌표적 방법의 특징. 고대 후기의 다른 이론들. 수학의 기하학화. 아르키메데스의 Psammites. 시대 변화와 수학의 변화(로마제국의 붕괴. 알렉산드리아 박물관의 화재. 여성 수학자 히파티아의 죽음). 니코메데스의 콘코이드 연구. 디오클레스의 시소이드 곡선. 헤론의 측정론. 헤론 공식. 헤론의 다른 저작들(공학, 기체 역학, 조준의). 프톨레마이오스의 현표. 디오판투스의 생애 및 연구. 디오판투스의 산술. 술어대수에서 약어대수로 전환. 디오판투스의 기호 표기. 부정방정식 해결의 역사. 도형수. $n$각수. 고대 후기의 주석가들. 게미누스(고차 곡선인 나선, conchoid, 시소이드에 대한 역사를 기술). 테온(유클리드 '원론'과 프톨레마이오스의 천문학서인 '알마게스트'에 대한 주석서). 히파티아(최초의 여성 수학자로 아르키메데스, 아폴로니우스, 디오판투스의 저술에 대한 주석서). 파푸스(유클리드와 프톨레마이오스의 저술에 대한 주석이외에 '수학집성'을 집필). 수학집성의 내용 및 특징들. 에우토키우스. 교재 연구(도형수)

(9) 중국과 인도의 수학

중국의 수학. 고대 중국의 수학 발전의 특징. 산목(산목의 특성, 산목에 의한 연산). 손자산경. 주비산경. 구장산술. 구장산술의 역사. 구장산술의 내용 기술상 특징. 구장산술의 구체적인 내용들. 구장산술과 사회 문화적 특성. 중국수학의 약사. 인도의 수학. 인도 수학의 특징(계산-알고리즘적 방법의 발달, 실제적인 성격의 기하학). 아리아바타(아리아바따암, 이차방정식의 해결). 쉬리드하라(파티가니띠와 뜨리샤티키를 저술, 분수와 퍼센트의 연산 규칙, 등차수열과 등비수열에 관한 규칙 발견). 브라마굽타(브라마의 완성된 과학, 브라마굽타의 공식). 바스카라(릴라바티, 비자가니타를 저술). 인도 수학의 발전. 라마누잔. 인도의 대수적 방법. 교재 연구(브라마굽타 공식의 확장)

(10) 중세 유럽의 수학

5~15세기 유럽 수학의 발달. 제르베르의 학교. 산판파. 필산파. 중세 유럽의 대학들. 베이컨의 철학. 피보나치의 산반서. 네모라리우스. 오렘. 슈케. 삼각함수의 발전. 뮐러의 '삼각법의 모든 것'. 교재연구(피보나치 수열의 성질)

(11) 르네상스 시대의 수학

르네상스 시대의 수학. 방정식의 풀이에 관련된 연구

들. 페로. 타르탈야. 카르다노. 페라리. 허근. 봄벨리. 방정식의 일반 해법에 관련된 연구들(아벨, 갈로아). 스테빈의 기호 표기. 비에트의 대수적 기호 체계

(12) 17세기의 새로운 수학. 해석기하학의 발명

변량에 대한 수학의 시작. 변량에 대한 연구의 특징. 수학적 자연과학(갈릴레이, 케플러, 뉴턴). 학술 단체의 설립 및 학술 잡지의 출판(런던 왕립학회, 파리 학술원). 데카르트의 해석기하학. 방법서설. 변량의 도입. 데카르트에 의한 파푸스 문제의 해결. 데카르트의 몇몇 문제해결의 예. 데카르트의 발견술. 곡선의 분류. 방정식의 가약성. 페르마의 해석기하학. 직교 좌표계의 도입. 대수적 방법의 사용. 교재연구(페르마 소정리)

(13) 17세기의 계산 방법

삼각함수표. 삼각함수의 항등식들. 뷔르기의 로그. 네이피어의 로그. 스페이델의 자연로그표. 건터의 로그자. 오일러의 로그함수. 지수함수에 대한 연구. 파스칼. 라이프니츠의 산술 연산기 발명

한편, '수학사' 강좌에 관련된 참고 자료는 김용운・김용국(1996), 오승재(1997), 우정호(2000), 이종우(1999), 한인기(2003), 양영오・조윤동 역(2000), 이우영・신항균 역(1999), 박평우・김운규・정광택 역(2002), 임정대 역(2002) 등이 있다.

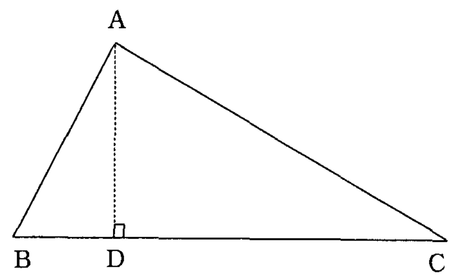
## 6. '수학사' 강좌의 교재연구 예시

본 연구에서 의도하는 사범대학 수학교육과의 수학사 강좌의 중요한 특징은 수학교육학 관련 강좌와의 관련성이나 중등학교 수학교육의 개선을 위한 의미 있는 시사점을 얻는 것이다. 이런 측면에서 보면, 수학사에서 중등학교 수학교육 관련 주제의 교재연구는 사범대학 수학교육과의 수학사 지도에서 중요한 부분을 차지할 것이다.

<고대 그리스의 초기 수학 이론들>에 설정된 교재연구 주제인 '피타고라스 정리와 코사인 정리'에 관련하여 본 연구에서 개발된 교재연구의 내용을 한인기(2003)의 연구를 중심으로 살펴보자.

(1) 피타고라스 정리의 활용

직각삼각형 ABC에서 수선 AD를 그으면, 피타고라스 정리와 관련된 많은 흥미로운 성질들을 찾아낼 수 있다.

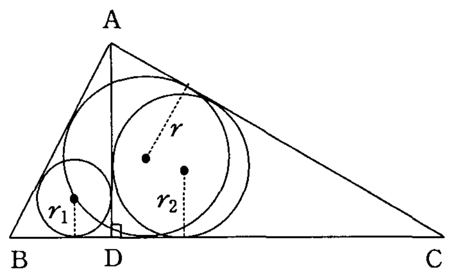



<그림 1>

<그림 1>에서 보는 것과 같이, 우리는 세 개의 직각삼각형 ABC, ABD, ACD를 얻을 수 있으며, 이들은 닮음이다. 즉, $\triangle ABC \backsim \triangle DBA \backsim \triangle DAC$. 이로부터, 피타고라스 정리 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$을 증명할 수 있음은 널리 알려진 사실이다. $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$에서 $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$는 각각 닮음인 $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$의 빗변들로, 이들 삼각형의 빗변이 아닌 다른 변들 $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{AD}$나 $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{CD}$사이에도 피타고라스 정리인 $\overline{BD}^2+\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2$, $\overline{AD}^2+\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$이 성립한다. 이로부터, 닮음인 $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$의 대응하는 변들 사이에는 피타고라스 정리가 성립한다는 사실을 일반화할 수 있다.

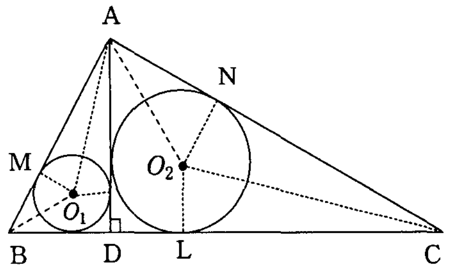
한편, 피타고라스 정리와 닮음을 이용하면, 삼각형의 많은 성질들을 밝힐 수 있는데, 몇 가지를 살펴보기로 하자.

**내접원의 반지름들 사이의 관계**. 직각삼각형 ABC, ABD, ACD에 내접원을 그리고, 이들의 반지름을 각각 $r$, $r_1$, $r_2$라 하자(<그림 2> 참조). 그러면, 이들 사이에는 피타고라스 정리와 유사한 관계인 $r^2 = r_1^2+r_2^2$이 성립함을 증명하여라.




<그림 2>

**증명**. 삼각형 ABD와 CAD가 닮음이므로, 상응하는 내접원 반지름의 비는 닮음비와 같다. 그 이유를 생각해 보자. 예를 들어, 삼각형 ABD와 CAD의 내심 $O_1$, $O_2$를 꼭지점들과 연결하면(<그림 3> 참조), 합동인 삼각형 $CO_2L$과 $CO_2N$을 얻을 수 있으므로, $\angle NCO_2 = \angle LCO_2$. 같은 이유로, $\angle MAO_1 = \angle DAO_1$. 닮음에 의해, ∠BAD = ∠ACD이므로, $\angle NCO_2 = \angle BAO_1$.




<그림 3>

마찬가지 방법으로, $\angle CAO_2 = \angle ABO_1$. 그러므로, $\triangle O_2AC$와 $\triangle O_1BA$는 닮음이고,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MO_1}} = \frac{\overline{AB}}{r_1} = \frac{\overline{AC}}{\overline{NO_2}} = \frac{\overline{AC}}{r_2}.$$

△ABC, △ABD, △ACD의 닮음으로부터,

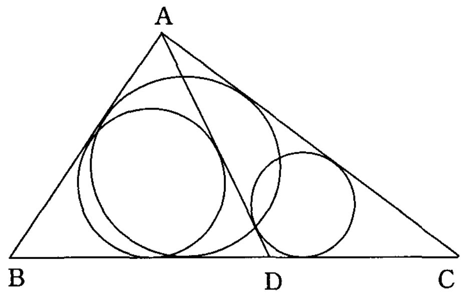
$$\frac{\overline{AB}}{r_1} = \frac{\overline{AC}}{r_2} = \frac{\overline{BC}}{r}.$$

이제, $\frac{\overline{AB}}{r_1} = \frac{\overline{AC}}{r_2} = \frac{\overline{BC}}{r} = k$라 하면, $\overline{AB} = r_1k$, $\overline{AC} = r_2k$, $\overline{BC} = rk$. 피타고라스 정리에 의해, $r^2 = r_1^2 + r_2^2$이 성립한다. □

앞에서 살펴본 성질은 다음과 같이 일반적인 삼각형에 대하여 일반화할 수 있다. 일반화는 수학사 발전의 일반적인 방향성 중의 하나로 학생들이 구체적인 교수-학습 자료를 통해 수학적 일반화를 경험하는 것은 매우 중요하다.

**내접원의 반지름들 사이의 관계 일반화.** 삼각형 ABC에서 선분 AD가 삼각형 ABC를 ABD, ACD로 분할하였다. 이때, 삼각형 ABC, ABD, ACD의 내접원의 반지름을 각각 $r$, $r_1$, $r_2$라 하면, $r < r_1 + r_2$임을 증명하여라.

**증명.** △ABC에 선분 AD를 긋고, 넓이를 이용해 증명하자(<그림 4> 참조).




<그림 4>

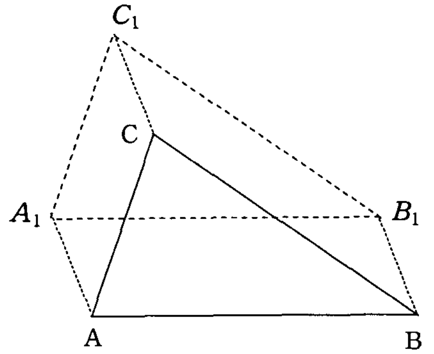
변의 길이가 $a$, $b$, $c$인 삼각형 ABC의 둘레의 절반을 $p_{ABC}$라 하면, $p_{ABC} = \frac{a+b+c}{2}$이고, △ABC의 넓이 $S_{ABC} = p_{ABC} \cdot r$이다. 이제, $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$인 것에 주목하자. $S_{ABD} + S_{ACD} = p_{ABD} \cdot r_1 + p_{ACD} \cdot r_2 < p_{ABC} \cdot r_1 + p_{ABC} \cdot r_2$이므로,

$$p_{ABC} \cdot r < p_{ABC} \cdot r_1 + p_{ABC} \cdot r_2$$이고,

$$r < r_1 + r_2. \square$$

(2) 피타고라스 정리의 일반화인 파푸스 문제

**파푸스의 문제.** 임의의 삼각형 ABC를 삼각형 $A_1B_1C_1$로 평행이동하자. 이때, 평행사변형 $ACC_1A_1$과 $CBB_1C_1$이 삼각형 ABC의 밖에 놓여 있다면(<그림 5> 참조), 평행사변형 $ABB_1A_1$의 넓이는 두 평행사변형 $ACC_1A_1$, $CBB_1C_1$ 넓이의 합과 같다는 것을 증명하여라.




<그림 5>

파푸스의 문제에 대한 증명은 생략하고, 파푸스 문제의 구체화를 통해 피타고라스 정리와 파푸스 문제 사이의 관계를 살펴보면, 파푸스 문제에서 $\angle C$가 직각이고, 평행사변형 $ABB_1A_1$이 정사각형인 경우에 피타고라스 정리가 유도된다.

(3) 삼각형과 볼록사각형의 코사인 정리

직각삼각형에서의 피타고라스 정리는 일반적인 삼각형에 대한 코사인 제 2정리로 일반화될 수 있다. 코사인 제 2정리 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\angle A$에서 길이가 $a$인 변의 대각인 $\angle$A의 크기를 90°라 하면, 피타고라스 정리 $a^2 = b^2 + c^2$을 얻을 수 있다. 한편, 볼록사각형에 대해서도 삼각형의 코사인 제 2정리와 유사한 다음과 같은 정리가 성립한다.

**볼록사각형에서 코사인 정리**. 볼록사각형 ABCD에서 $\alpha$를 변의 길이가 각각 $a$, $d$인 두 변의 사이각이라 하고, $\beta$를 변의 길이가 각각 $a$, $c$인 두 변의 사이각, $\gamma$를 변의 길이가 각각 $c$, $d$인 두 변의 사이각이라 하면(<그림 6> 참조).

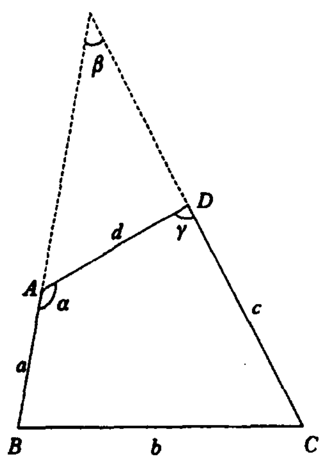
$$b^2 = a^2 + c^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\alpha - 2ac \cdot \cos\beta - 2cd \cdot \cos\gamma$$

이 성립함을 증명하여라.

**증명**. $\beta$는 길이가 $a$, $c$인 변의 끼인각이므로, 변 AB와 CD의 연장선의 교점에서 이들이 이루는 각을 의미한다.

이제, $b^2$의 값을 구해 보자. 이를 위해, 변이 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$인 평행사변형 ABED를 작도하고, 각 BEC를 $\delta$라 하자. 그러면, 삼각형 EBC에서

$$b^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EC}^2 - 2\,\overline{BE} \cdot \overline{CE} \cdot \cos\delta.$$

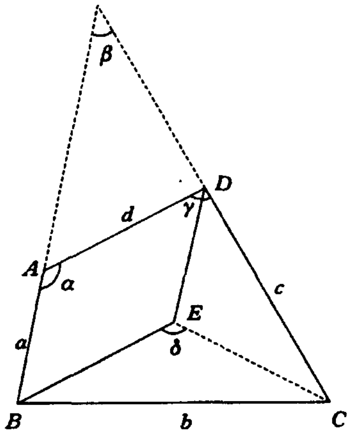



<그림 6>

이때, $\overline{BE} = d$이다. 한편, 삼각형 DEC에서 $\overline{EC}^2$을 구하면,

$$\overline{EC}^2 = \overline{DE}^2 + c^2 - 2\,\overline{DE} \cdot c \cdot \cos\angle EDC.$$

이때, $\overline{ED} = a$이고, $\angle$EDC $= \beta$이다(<그림 7> 참조).



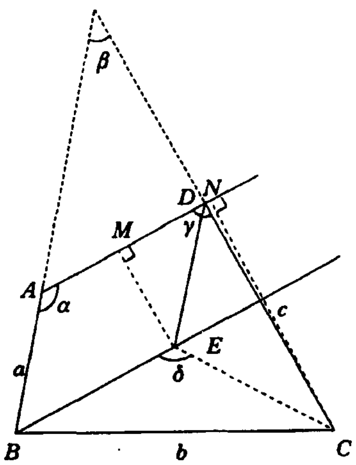

<그림 7>

얻어진 두 등식을 연립하면,

$b^2 = d^2 + a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta - 2d \cdot \overline{CE} \cdot \cos\delta$.

이제, $\overline{CE} \cdot \cos\delta$에 대해 생각하기 위해 $\overline{CE} \cdot \cos(180 - \delta) = -\overline{CE} \cdot \cos\delta$를 보자.

이때, $\overline{CE} \cdot \cos(180 - \delta)$을 나타내기 위해 $\overline{BE}$, $\overline{AD}$의 연장선을 긋고, 두 점 C, E에서 각각 수선을 내려 그 수선의 발을 N. M이라 하자(<그림 8> 참조).




<그림 8>

그러면, $\overline{CE} \cdot \cos(180 - \delta)$는 $\overline{MN}$과 같다. 즉,

$\overline{MN} = \overline{MD} + \overline{DN}$

$= \overline{ED} \cdot \cos\angle EDA + c \cdot \cos(180 - \gamma)$

$= \overline{ED} \cdot \cos(180 - \alpha) + c \cdot \cos(180 - \gamma)$

$= -a \cdot \cos\alpha - c \cdot \cos\gamma$.

이 값을 $b^2$ 값의 계산식에 대입하면,

$$b^2 = a^2 + c^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\alpha - 2ac \cdot \cos\beta - 2cd \cdot \cos\gamma. \square$$

이제까지 피타고라스 정리에 관련된 몇몇 흥미로운 수학적 내용들을 살펴보았다. 피타고라스 정리에 대한 다양한 증명은 이미 많은 문헌에 다양하게 소개되었기 때문에, 본 연구에서는 수학사 발전의 중요한 방향의 하나인 일반화의 측면에서 피타고라스 정리를 다각적으로 고찰하였다.

위에서 살펴본 것과 같은 수학사를 통한 교재연구는 직접적으로는 수학교육학 영역의 '수학교육의 기초' 강좌에서 다루었던 주제인 '교과목으로서의 수학'에서 다루었던 ① 지식의 획득을 위해 필요한 수학적 사고와 탐구의 방법, ② 수학의 역사에 관련된 몇몇 주제들, ③ 수학적 지식을 사용하는 능력을 포함하여 다양한 능력과 기능의 향상에 의미 있을 것이며, 간접적으로는 수학 발전의 방향성을 알고 학생 스스로 수학 발전에서 의미 있는 탐구 활동을 경험할 수 있는 기회를 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

## 7. 결 론

신현용(2003)은 '교사 양성대학 수학교육과 교육과정 및 교수-학습방법 개발' 연구에서 수학교사 양성 대학의 교육과정 및 교수-학습방법 개선을 위한 9가지의 기본 방향을 제시하였다. 본 연구에서는 제시된 개선 방향에 따라 사범대학의 수학교육학 및 수학사 강좌의 교육과정의 개선 방안을 제시하였다. 이를 통해, 사범대학 수학교육과 교육과정 및 교수-학습 방법의 내실화를 위한 의미 있는 시사점을 얻으며, 중등학교 수학교육의 개선을 위한 바탕이 될 것으로 기대한다.

수학교육과에 개설되는 수학교육학 관련 기본 교과목

을 3학점 4강좌로 가정하고, 3학년 1학기에서 4학년 2학기까지 학기마다 수학교육학 관련 교과가 한 강좌씩 개설되는 것으로 하여, 수학교사의 양성을 위해 필수적인 수학교육학 영역의 내용을 선정하여 체계적으로 조직하였다. 한편, 수학사는 대학마다 강좌가 개설되는 학년이나 학점에 있어 차이가 있기 때문에, 수학교육과의 어느 학년에 개설되더라도 문제가 발생하지 않도록 하였고 3학점을 기준으로 하여 교과내용을 개발하였다.

수학교육학 관련 필수 교과목은 수학교육의 기초(3학년 1학기), 수학 교수-학습 이론(3학년 2학기), 수학 문제해결 교육론(4학년 1학기), 수학과 교재분석 및 평가론(4학년 2학기)으로 구성되며, 각 교과의 내용은 중복되지 않고 일정한 체계성을 가지도록 선정, 조직되었다. 한편, 본 연구에서는 '수학교육의 기초'와 '수학 교수-학습 이론'에서는 교과목의 성격, 구체적인 교수-학습 주제 및 내용, 참고도서, 과제물 등을 상세히 기술하였으며, '수학 문제해결 교육론'과 '수학과 교재분석 및 평가론'에서는 교과목의 성격, 교수-학습 주제 등을 나열하였다.

수학교육학 관련 교과목의 구성에 있어, 신현용(2003)의 연구에 제시된 9가지의 기본 개선 방향을 포함하여, 다음을 구체적으로 고려하였다. 첫째, 수학교육학의 인접 학문들(수학, 철학, 교육학, 심리학, 논리학)의 연구 결과들 중에서 수학교사가 수학교육학에 대한 폭넓은 식견과 올바른 방향성을 정립하여 교수-학습 과정에서 타당한 교육적 선택을 하는데 바탕이 될 수 있는 주제들을 고려하였다. 둘째, 수학교육학의 이론적 지식과 중등학교의 실제적인 수학교육이 효과적으로 연결될 수 있도록 수학교육학 관련 교과목들을 조직하였다. 셋째, 수학교육학 관련 연구 분야의 최근 성과들을 적극적으로 도입하였고, 넷째, 수학교사 임용고시에 대한 준비를 고려하였다.

수학교육학 관련 교과의 기본 성격과 구조를 살펴보면, '수학교육의 기초'는 예비 교사들이 수학교육 전반에 걸친 기초적인 지식 및 식견을 가지도록 하며, 수학교육학에 대한 체계적 학습을 위해 필요한 지식과 능력을 기르며, 후속적인 수학교육학 연구를 위한 올바른 방향을 설정하도록 하는 것을 목적으로 한다. '수학교육의 기초'는 수학의 본질과 수학교육, 수학교육의 목표, 한국 수학교육사, 소크라테스의 수학관, 라카토스의 증명과 반박의 논리, 수학교육의 논리적 기초, 수학교육의 심리적 기초 등으로 구성되었다.

'수학 교수-학습 이론'에서는 수학 교수-학습에 관련된 다양한 교수-학습 이론을 제시하여, 학생들이 수학교육에 관련된 체계적인 지식을 습득토록 하고, 중등학교 수학교육의 개선을 위한 기초의 제공을 목적으로 한다. '수학 교수-학습 이론'에서는 수학 교수-학습에 관련하여 국내에 소개된 이론들을 중심으로 하여, 수학 역사-발생적 원리, 프로이덴탈의 수학화 학습-지도론, 반힐레의 기하학 학습 수준 이론, 스켐프의 수학 학습 이론, 브루너의 수학 학습 이론, 딘즈의 수학 학습 이론, Fischbein의 직관과 수학교육, Brousseau의 수학교수학적 상황론 등을 다루었다. 한편, 피아제의 발달심리학 이론은 교육학의 교육심리학 강좌에서 다루므로 나열한 수학 교수-학습 이론을 다룬 후에 시간적 여유가 있으면, 심도있게 다루도록 하였다.

'수학 문제해결 교육론'에서는 수학 문제해결에 관련된 이론적 지식들을 바탕으로 중등학교 수학교육에 관련된 다양한 수학 문제를 직접 해결하고 이를 논리적 측면과 심리적 측면에서 분석한다. 이를 통해, 중등학교에서 효율적인 수학 문제해결 지도의 방향과 방법을 습득하도록 하여 수학교육의 질적 향상을 도모하는 것을 목적으로 한다. '수학 문제해결 교육론'에는 수학 문제의 구성요소 및 구조, 수학 문제의 교육적 의의, Polya의 문제해결론, 다양한 발견술, 분석-종합적 활동, 문제의 구성(제작), 문제해결을 위한 체계적인 탐색 수행, 문제해결에서 반성적 활동, 문제해결의 심리적 측면, 작도문제의 해결 방법, 모어-마스케로니의 정리, 귀납, 유추, 은유 등으로 구성되었다.

'수학과 교재분석 및 평가론'에서는 수학교육 평가 이론에 대한 체계적인 지식을 바탕으로 수학교재를 분석한다. 이를 통해, 학생들의 수학적 지식, 기능, 능력을 올바르게 평가할 수 있는 능력과 실제적인 경험을 가지며, 중등학교 수학교육의 내용 및 방법을 개선하는 것을 목적으로 한다. '수학교육 평가 이론'은 수학과 평가의 원리, 개념적 지식과 절차적 지식의 평가, 문제해결력 평가, 수학적 의사소통 능력의 평가, 수행평가 등으로 구성되었다.

수학사 강좌 구성에서는 첫째, 수학교육학 관련 강좌와의 유기적인 연결성을 고려하였고, 둘째 수학교육학에

서 강조되는 역사-발생적 방법을 수학사의 다양한 주제를 통해 심도있게 다루었다. 셋째, 17세기의 해석기하학의 발명, 로그의 발명까지의 수학사 내용을 다루었고, 17세기 이후에 발명하여 발전된 미적분학이나 현대 수학의 다양한 주제들은 다루지 않았다. 넷째, 중등학교에서 다루는 수학 교과 내용을 수학사를 통해 심화시킬 수 있는 가능성을 제시하였고, 다섯째, 수학의 발생과 발전에 관련된 다양한 요인들로 수학과 사회적 요구의 관계, 수학과 다른 학문의 관계, 경제적·사회적 구조 변화가 수학의 발전에 끼친 영향 등을 제시하여, 수학이 다른 학문 영역이나 경제적 사회적 환경에서 생성 발전하는 학문이라는 수학관을 가질 수 있도록 하였다.

수학사 강좌의 기본 성격과 구조를 살펴보면, 수학사는 예비교사들이 중등학교 수학 내용, 수학적 탐구 방법, 수학의 생성 및 발전의 방향에 대한 전반적인 이해와 개관을 가지며, 수학사를 통해 수학교육을 개선할 수 있는 지식과 능력을 함양토록 하는 것을 목적으로 한다. 수학사 강좌는 수학사 연구, 수학 역사-발생적 방법, 수학적 개념과 방법의 출현(고대 이집트와 바빌론의 수학), 고대 그리스의 초기 수학 이론들, 3대 작도 불능 문제, 헬레니즘 시대에 수학의 공리적 구성(유클리드 원론), 고대 그리스의 무한소 방법(아르키메데스의 창의적 수학 연구), 원추곡선 및 고대 후기의 수학 이론들, 중국과 인도의 수학, 중세 유럽의 수학, 르네상스 시대의 수학, 17세기의 새로운 수학(해석기하학의 발명), 17세기의 계산 방법 등의 주제로 구성되었다.

## 참 고 문 헌


강옥기 (2000). 수학과 학습지도와 평가론, 서울: 경문사.

강완·백석윤 (1998). 초등수학교육론, 서울: 동명사.

교육부 (1999a). 고등학교 교육과정 해설, 서울: 대한교과서주식회사.

교육부 (1999b). 중학교 교육과정 해설, 서울: 대한교과서주식회사.

구광조·오병승·류희찬 공역 (1992). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향, 서울: 경문사/ NCTM. Curriculum and evaluation standards for school mathematics.

구광조 외 5인 (1988). 수학과교육론, 서울: 갑을출판사.

김성숙·김형보 편역 (1999). 수학이 살아야 나라가 산다 (고다이라 구니히코), 서울: 경문사.

김용운·김용국 (1996). 수학사대전, 서울: 우성.

김응태·김연식 (1985). 수학교육 교재론, 서울: 이우출판사.

김응태·박한식·우정호 (1988). 증보 수학교육학개론. 서울: 서울대출판부.

김인수 (2001). 중등교사 임용고시와 수학교육과의 교육과정, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 12, pp.527-538, 서울: 한국수학교육학회.

김판수·박성택 역 (1996). 초등수학교육(스켐프 R.). 서울: 교우사.

박만구·전경순·정인철 (2001). 미국 조지아대학교 수학교육학과 교육과정 및 현황, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 12, pp.387-396, 서울: 한국수학교육학회.

박평우·김운규·정광택 공역 (2002). 수학이란 무엇인가, 서울: 경문사/ Courant R. & Robbins H. What is Mathematics.

박한식 (1986). 수리논리학, 서울: 교학연구사.

박한식 (1991). 한국수학교육사, 서울: 대한교과서주식회사.

박한식 외 7인 (1997). 수학개론, 서울: 경문사.

신현성 (1992). 수학교육학과의 교육과정 과목설정에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 31(2), pp.79-92, 서울: 한국수학교육학회.

신현성 (1999). 수학교육론, 서울: 경문사.

신현용 (2003). 교사 양성 대학 수학교육과 교육 과정 및 교수-학습 방법 개발에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 42(4), pp.431-452., 서울: 한국수학교육학회,

신현용 외 5인 (2001). 외국의 사례에 비춰본 우리 나라의 제 7차 수학과 교육과정, 수학교육논문집 11, 한국수학교육학회. pp.291-296.

양영오·조윤동 역 (2000). 수학의 역사. 서울: 경문사/ Boyer C. B. & Merzbach U. C. A History of Mathematics.

오승재 (1997). 수학의 천재들, 서울: 경문사.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울: 서울

대출판부.

우정호 역 (1991). 수학적 발견의 논리, 서울: 민음사/ Lakatos I. Proofs and Refutations.

이상건 (1998). 중등 수학교사 교육의 현황과 대책, 대한수학교육학회논문집 8(2), pp.509-526, 서울: 대한수학교육학회

이우영 · 신항균 역 (1999). 수학사, 서울: 경문사/ Eves H. An Introduction to the History of Mathematics.

이종우 (1999). 기하학의 역사적 배경과 발달, 서울: 경문사.

임정대 (1982). 수리논리학, 서울: 연세대학교출판부.

임정대 역 (2002). 수리철학의 기초, 서울: 경문사/ Russell B. Introduction to Mathematical Philosophy.

전평국 (1993). 수학교육과 교육 여건과 교육 프로그램 개선 방향, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 32(4), pp.404-411, 서울: 한국수학교육학회.

조한혁 (2001). 수학 임용고시와 수학교육과 교육과정, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 12, pp.539-544, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 (2003). 교사를 위한 수학사, 서울: 교우사.

황우형 역 (1997). 수학학습심리학(스켐프 R.), 서울: 민음사.

황혜정 외 5인 (2001). 수학교육학신론, 서울: 문음사.

Becker J. P. & Shimada S. (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics*, VA: NCTM.

Gusev V. A. (1994). 어떻게 학생들이 수학을 좋아하게 도울 수 있는가, 모스크바: 아반가르드.

Krutetski V. A. (1968). 학생들의 수학적 재능의 심리학, 모스크바: 교육출판사.

Solow D. (1990). *How to read and do proofs*, New York: John Wiley & Sons.

Stolyar A. A. (1987). 수학에서 우리는 왜 그리고 어떻게 증명하는가. 민스크: Narodnaya Asveta.

# A Study on Teaching-Learning programs of Mathematics Education and Mathematics History Related Courses for Training of Mathematics Teacher of Secondary Schools

**Han, Inki**

Department of Mathematics Education, Gyeongsang National University

E-mail: inkiski@nongae.gsnu.ac.kr

The main purpose of this work is to propose programs of mathematics education and mathematics history courses for the department of mathematics education of teacher training universities. Foundation of Mathematics Education, Mathematics Teaching and Learning Theories, Mathematics Problem Solving, Analysis and Evaluation of Mathematics Teaching Materials and Mathematics History are discussed in this article.

* ZDM Classification : B5

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97B50

* Key Word : teacher training, foundation of Mathematics education, mathematics teaching and learning theories, mathematics problem solving, analysis and evaluation of mathematics teaching materials, mathematics history