論文2003-40SC-5-4

시간지연시스템의 균형화된 모델차수 축소

(A Balanced Model Reduction for Linear Delayed Systems)

柳 奭 桓 *

(Seog-Hwan Yoo)

요 약

본 연구에서는 상태변수에 시변 시간지연을 가진 선형시스템의 모델 차수축소를 취급한다. 이를 위하여 시간지연 시스템의 일반화 가제어성/가관측성 그래미안을 선형행렬 부등식의 해를 이용하여 정의하고 균형화된 상태공간 구현을 정의한다. 균형화된 상태공간 구현으로부터 상태변수를 절삭하여 차수축소된 시간지연 시스템을 구하고 모델 축소오차의 상한치를 제시한다. 수치예를 통하여 제시된 방법의 효용성을 입증한다.

Abstract

This paper deals with a model reduction for linear systems with time varying delayed states. A generalized controllability and observability gramians are defined and obtained by solving linear matrix inequalities. Using the generalized controllability and observability gramians, the balanced state space equation is realized. The reduced model can be obtained by truncating states in the balanced realization and the upper bound of model approximation error is also presented. In order to demonstrate efficacy of the suggested method, a numerical example is performed.

Keyword : generalized controllability / observability Gramian, model reduction linear matrix inequality

Ⅰ. 서 론

제어시스템의 성능을 향상시키거나 견실성을 향상시키기 위해 가급적 플랜트의 수학적인 모델을 정확하게 표현할 필요가 있으며 이 결과 플랜트의 모델 차수가 상당히 고차원으로 모델되어진다. 이러한 모델차수가 큰 플랜트에 최근 많이 개발된 LQG(Linear Quadratic Gaussian) 기법이나 H_∞ 제어기 합성법을 사용할 경우 결과의 제어기는 플랜트 모델의 차수와 동일한 차수의 제어기가 합성되어 제어기를 실제 플랜트에 적용할 경우 계산시간이 많이 소요되거나 적용하기에 복잡하여지는 문제가 발생한다. 이러한 문제점을 극복하기 위한 방법의 일환으로 모델의 차수 축소에 관한 연구가 선형시불변 시스템의 모델근사화를 시작으로 불확실한 파라메터를 가진시스템, 불확실한 시스템에 대한 모델 간략화 등으로 이어져왔다[1-6].

철강공정에서나 화학공정등에서와 같이 많은 산업현장의 플랜트는 시간지연 시스템으로 모델되어진다. 플랜트의 모델에 시간지연항이 포함되어 있을 경우 시간

* 正會員, 大邱大學校 情報通信工學部
(Department of Computer and Communication Engineering, Daegu University)

※ 이 논문은 2001학년도 대구대학교 학술연구비 지원에 의한 논문임.

接受日字:2002年3月5日, 수정완료일:2003年8月20日

지연항으로 인하여 폐루프 시스템의 불안정을 야기할 수 있고 혹은 제어성능이 나빠질 수도 있어 시간지연 시스템의 제어기 설계법에 관한 연구가 많은 연구자들의 관심이 되어왔다. 최근 플랜트가 시간지연 시스템으로 모델되어질 때 견실한 제어 성능을 보장하기 위하여 선형행렬 부등식을 이용한 H_∞ 제어기 합성법이 많이 연구되었다[7-9]. 그러나 선형행렬 부등식에 기반한 제어기 합성법의 결점은 플랜트 모델의 차수가 크면 클수록 선형행렬 부등식의 해를 구하기 위한 계산시간이 기하급수적으로 증가하는 단점이 있다. 그러므로 플랜트를 가능한한 저차원으로 모델하여야 할 필요가 있다.

본 연구에서는 시간지연시스템 특히 상태변수에 시간지연을 갖는 선형시스템의 모델차수 축소를 다룬다. 이를 위하여 Ⅱ절에서는 시간지연 시스템의 일반화 가제어성/가관측성 그래미안(generalized controllability/observability Gramian)을 정의하고 이것을 이용하여 시간지연 시스템의 균형화된 상태공간 구현을 정의한다. Ⅲ절에서는 시간지연 시스템의 균형화된 상태공간 구현으로부터 상태변수의 일부분을 절삭하여 모델차수를 축소하는 방법을 제시하고 모델축소오차의 상한치를 제시한다. Ⅳ절에서는 본 연구의 효용성을 수치예를 통하여 입증하고 Ⅴ절에서는 결론을 맺는다.

R^n은 n차원 실 벡터 공간(real vector space)이고 $R^{n\times m}$은 요소가 실수인 $n\times m$ 차원 행렬을 나타낸다. A^T는 A의 전치행렬을 0는 영행렬을 I_n는 $n\times n$ 차원의 단위행렬을 나타내고 문맥상 쉽게 차원을 알 수 있는 경우 첨자를 생략한다. $diag(A, B)$는 대각요소가 행렬 A와 행렬 B로 구성된 대각 행렬이고 블록행렬에서 (i, j)블록에서의 $*$는 (j, i)블록에 표시된 행렬의 전치행렬을 의미한다. $\|\cdot\|_\infty$는 H_∞ 노옴을 나타낸다.

Ⅱ. 일반화 가제어성/가관측성 그래미안

다음의 상태변수에 시간지연을 가진 2차 안정한(Quadratically Stable) 시스템을 생각한다.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t)+A_d x(t-d(t))+Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)+C_d x(t-d(t))+Du(t)\end{aligned} \tag{1}$$

여기에서 $x(t)\in R^n$는 상태변수, $u(t)\in R^m$은 제어입력, $y(t)\in R^p$는 출력변수이고 $d(t)$는 시변 시간지연이고 다음의 조건을 만족한다고 가정한다.

$$0\le d(t)<\infty,\quad |\dot{d}(t)|\le m<1 \tag{2}$$

A, A_d, B, C, C_d, D는 적절한 차원을 갖는 상수행렬이다. $A_d=FG$, $C_d=HG$와 같이 정의한다. 여기서 $F\in R^{n\times k}$, $G\in R^{k\times n}$, $H\in R^{p\times k}$는 full rank일 필요는 없으며 가장 편리한 선택은 $F=A_d$, $H=C_d$, $G=I$이다.

시간지연 시스템 (1)을 지금부터 다음의 (3)과 같이 나타내기로 한다.

$$G=\left[\begin{array}{c|cc} A & F & B\\ \hline G & 0 & 0\\ C & H & D\end{array}\right] \tag{3}$$

시간지연 시스템 (3)의 일반화 가제어성/가관측성 그래미안을 정의하기 위해 먼저 다음의 보조정리 1과 2를 소개한다.

보조정리 1 : 다음의 선형행렬 부등식을 만족하는 대칭 양한정 행렬 Q, R이 존재한다고 가정한다.

$$L_o:=\begin{bmatrix} A^TQ+QA+C^TC & * & *\\ F^TQ+H^TC & H^TH-(1-m)R & *\\ RG & 0 & -R\end{bmatrix}<0 \tag{4}$$

모든 $t\ge 0$에서 $u(t)\equiv 0$이면 출력에너지는 다음의 부등식 (5)를 만족한다.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty y^T(\tau)y(\tau)d\tau &< x(0)^TQx(0)\\ &+\int_{-d(0)}^0 x^T(\tau)G^TRGx(\tau)d\tau\end{aligned} \tag{5}$$

(증명) 리아푸노프 후보함수 $V(x(t), t)$를 다음과 같이 정의한다.

$$V(x(t), t)=x(t)^TQx(t)+\int_{t-d(t)}^t x(\tau)^TG^TRGx(\tau)d\tau \tag{6}$$

선형행렬 부등식 (4)를 만족하므로 시스템 (3)은 2차 안정하며 따라서 $\lim_{t\to\infty}V(x(t), t)=0$를 만족한다. 그러므로 출력에너지는 선형행렬 부등식 (4)에 Schur 보수정리를 사용하여

$$\int_0^\infty y^T(\tau)y(\tau)d\tau = \int_0^\infty y^T(\tau)y(\tau) + \frac{dV(x(\tau),\tau)}{d\tau}d\tau + V(x(0),0) \le \int_0^\infty w^T(\tau)\overline{L_o}w(\tau) + V(x(0),0) < V(x(0),0) \quad (7)$$

의 관계를 얻는다. 여기에서

$$w(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ Gx(t-d(t)) \end{bmatrix}, \quad \overline{L_o} = \begin{bmatrix} A^TQ+QA+C^TC+G^TRG & * \\ F^TQ+H^TC & H^TH-(1-m)R \end{bmatrix} \quad (8)$$

로 정의한다. 즉, 출력에너지는 부등식 (5)를 만족한다. 증명 끝.

보조정리 2: 선형행렬 부등식 (9)을 만족하는 대칭 양한정 행렬 P, S가 존재한다고 가정한다.

$$L_c := \begin{bmatrix} AP+PA^T+BB^T & * & * \\ SF^T & -(1-m)S & * \\ GP & 0 & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

$x(-\infty)=0$에서 $x(0)$로 상태변수를 천이하는데 필요한 입력에너지는 다음의 부등식 (10)을 만족한다.

$$\int_{-\infty}^0 u^T(\tau)u(\tau)d\tau > x(0)^TP^{-1}x(0) + \int_{-d(0)}^0 x^T(\tau)G^TS^{-1}Gx(\tau)d\tau \quad (10)$$

(증명) 보조정리1에서의 증명과 마찬가지로 리아푸노프 후보함수를 다음과 같이 정의한다.

$$V(x(t),t) = x(t)^TP^{-1}x(t) + \int_{t-d(t)}^t x(\tau)^TG^TS^{-1}Gx(\tau)d\tau \quad (11)$$

선형행렬 부등식 (9)에 Schur 보수정리를 사용하여 리아푸노프 후보 함수 (11)로부터

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^0 (u^T(\tau)u(\tau) - u^T(\tau)u(\tau))d\tau \\ &= \int_{-\infty}^0 (u^T(\tau)u(\tau) - u^T(\tau)u(\tau) + \frac{dV(x(\tau),\tau))}{d\tau})d\tau - V(x(0),0) \\ &\le \int_{-\infty}^0 u^T(\tau)u(\tau)d\tau - V(x(0),0) + \int_{-\infty}^0 v^T(\tau)\overline{L_c}v(\tau)d\tau \\ &< \int_{-\infty}^0 u^T(\tau)u(\tau)d\tau - V(x(0),0) \end{aligned} \quad (12)$$

를 얻는다. 여기에서

$$v(t) = \begin{bmatrix} P^{-1}x(t) \\ S^{-1}Gx(t-d(t)) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad \overline{L_c} = \begin{bmatrix} AP+PA^T+PG^TS^{-1}GP & * & * \\ SF^T & -(1-m)S & * \\ B^T & 0 & -I \end{bmatrix} \quad (13)$$

따라서 입력의 에너지함수는 부등식 (10)을 만족한다. 증명 끝.

선형행렬 부등식 (4)의 해 Q와 부등식 (9)의 해 P를 참고문헌 [6]에서와 같이 일반화 가관측성/가제어성 그래미안이라고 각각 정의한다. 선형행렬 부등식 (4)와 (9)의 해를 이용하여 아래의 식 (14)를 만족하는 변환행렬 T와 U를 얻는다.

$$T^{-1}PT^{-T} = T^TQT = \Sigma = diag(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n), \quad \sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_n$$
$$U^{-1}SU^{-T} = U^TRU = \Pi = diag(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_k) \quad (14)$$

식 (14)에서 얻은 변환행렬 T와 U를 이용하여 시간지연 시스템 (3)을 좌표변환하여 다음의 상태공간 구현을 얻는다.

$$G = \left[\begin{array}{c|cc} A_b & F_b & B_b \\ \hline G_b & 0 & 0 \\ C_b & H_b & D_b \end{array}\right] \quad (15)$$

여기에서 $A_b = T^{-1}AT$, $F_b = T^{-1}FU$, $G_b = U^{-1}GT$, $B_b = T^{-1}B$, $C_b = CT$, $H_b = HU$, $D_b = D$이다.

상태공간 구현 (15)는 다음의 선형행렬 부등식을 만족함을 쉽게 알 수 있다.

$$L_{ob} := \begin{bmatrix} A_b^T\Sigma+\Sigma A_b+C_b^TC_b & * & * \\ F_b^T\Sigma+H_b^TC_b & H_b^TH_b-(1-m)\Pi & * \\ \Pi G_b & 0 & -\Pi \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

$$L_{cb} := \begin{bmatrix} A_b\Sigma+\Sigma A_b^T+B_bB_b^T & * & * \\ \Pi F_b^T & -(1-m)\Pi & * \\ G_b\Sigma & 0 & -\Pi \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

이러한 이유로 시간지연 시스템 (15)를 시간지연 시스템 (3)의 균형화된 상태공간 구현이라 정의하고 Σ를 균형화된 그래미안이라 정의한다. 그러나 선형시불변 시스템의 경우에서는 가제어성/가관측성 그래미안이 리아푸노프 형태의 방정식으로부터 유일하게 계산되는

반면 본 연구에서 제시한 일반화 그래미안은 선형행렬 부등식의 해로 정의되어 유일하지가 않으며 결과로 균형화된 상태공간 구현도 유일하지가 않다.

Ⅲ. 균형화된 모델차수 축소

이절에서는 균형화된 상태공간 구현으로 부터 상태변수를 절삭하여 모델 차수를 축소하고 모델오차의 상한치를 제시하고자한다. 시간지연 시스템 (3)이 2절에서 설명한 바와 같이 이미 균형화되었다고 가정하고 다음과 같이 분할한다.

$$G=\left[\begin{array}{c|cc} A & F & B \\ \hline G & 0 & 0 \\ C & H & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & F_1 & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & F_2 & B_2 \\ \hline G_1 & G_2 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & H & D \end{array}\right] \tag{18}$$

여기에서 $A_{11}\in R^{(n-r)\times(n-r)}$, $A_{22}\in R^{r\times r}$이고 나머지 다른 분할 행렬도 적절한 차원을 가진 분할행렬이다. 균형화된 상태공간 구현식 (18)로부터 r개의 상태변수를 절삭하여 얻은 차수축소된 시스템은 다음과 같다.

$$G_r=\left[\begin{array}{c|cc} A_{11} & F_1 & B_1 \\ \hline G_1 & 0 & 0 \\ C_1 & H & D \end{array}\right] \tag{19}$$

정리4에 본 연구의 주요결과를 기술하기 전에 정리4의 증명에 필요한 시간지연 시스템의 H_∞ 노옴 유계조건을 다음의 보조정리 3에 기술한다.

보조정리 3: 다음의 선형행렬 부등식 (20)을 만족하는 대칭 양한정 행렬 X와 R이 존재하면 시간지연 시스템 (3)은 $\|G\|_\infty\le\gamma$를 만족한다.

$$\begin{bmatrix} XA^T+AX & * & * & * & * \\ RF^T & -(1-m)R & * & * & * \\ B^T & 0 & -I & * & * \\ \gamma^{-1}CX & \gamma^{-1}HR & \gamma^{-1}D & -I & * \\ GX & 0 & 0 & 0 & -R \end{bmatrix}<0 \tag{20}$$

(증명) (11)의 리아푸노프 후보함수를 사용하여 참고문헌 [8]의 증명과 유사한 방법을 사용하여 쉽게 증명할 수 있으며 상세 증명 생략.

정리 3 : 차수축소된 시간지연 시스템 (19)는 2차 안정하고 균형화되었다. 또한 차수축소 오차는 다음과 같이 유계된다.

$$\|G-G_r\|_\infty\le 2\sum_{i=r+1}^{n}\sigma_i \tag{21}$$

(증명) 균형화된 그래미안을 $\Sigma=diag(\Sigma_1,\Sigma_2)$, $\Sigma_1\in R^{(n-r)\times(n-r)}$, $\Sigma_2\in R^{r\times r}$으로 분할하면 차수 축소된 시스템 (19)는 다음의 선형행렬 부등식을 만족한다.

$$\begin{bmatrix} A_{11}^T\Sigma_1+\Sigma_1A_{11}+C_1^TC_1 & * & * \\ F_1^T\Sigma_1+H^TC_1 & H^TH-(1-m)\Pi & * \\ \Pi G_1 & 0 & -\Pi \end{bmatrix}<0 \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11}\Sigma_1+\Sigma_1A_{11}^T+B_1B_1^T & * & * \\ \Pi F_1^T & -(1-m)\Pi & * \\ G_1\Sigma_1 & 0 & -\Pi \end{bmatrix}<0 \tag{23}$$

따라서 차수 축소된 시스템은 2차 안정하고 균형화되어있다. 모델축소 오차의 상한치를 계산하기 위하여 일반성을 잃지 않고 절삭하는 상태변수의 수가 1이라고 가정한다. 즉, $\Sigma_2=\sigma_n$. 먼저 오차시스템의 상태공간 구현은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$G_e=\left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{11} & 0 & 0 & F_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 & F_1 & B_1 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & 0 & F_2 & B_2 \\ \hline G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ -C_1 & C_1 & C_2 & -H & H & 0 \end{array}\right] \tag{24}$$

변환행렬 T를 다음과 같이 정의한다.

$$T=\begin{bmatrix} I/2 & I/2 & 0 \\ I/2 & -I/2 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \tag{25}$$

변환행렬 T를 이용하여 식 (24)의 오차시스템을 좌표변환하여 다음의 오차시스템 상태공간 구현을 얻는다.

$$G_e=\left[\begin{array}{c|cc} A_e & F_e & B_e \\ \hline G_e & 0 & 0 \\ C_e & H_e & 0 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{11} & 0 & A_{12}/2 & F_1/2 & F_1/2 & B_1 \\ 0 & A_{11} & -A_{12}/2 & F_1/2 & -F_1/2 & 0 \\ A_{21} & -A_{21} & A_{22} & 0 & & B_2 \\ \hline G_1 & G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_1 & -G_1 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2C_1 & C_2 & -H & H & 0 \end{array}\right] \quad (26)$$

$\| G_e \|_\infty \leq \gamma$를 보이기 위해 보조정리 3의 결과에 Schur 보수정리를 사용하여 다음의 선형행렬 부등식 (27)을 만족하는 대칭 양한정 행렬 X_e와 Π_e가 존재함을 보인다.

$$L = \begin{bmatrix} A_e X_e + X_e A_e^T + \gamma^{-2} X_e C_e^T C_e X_e + B_e B_e^T & * & * \\ \gamma^{-2}\Pi_e H_e^T C_e X_e + \Pi_e F_e^T & * & * \\ G_e X_e & 0 & -\Pi_e \\ \gamma^{-2}\Pi_e H_e^T H_e \Pi_e - (1-m)\Pi_e & & \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

$\gamma = 2\sigma_n$ 그리고 X_e, Π_e를 아래의 (28)과 같이 정의하면

$$X_e = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_n^2 \Sigma_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_n \end{bmatrix}, \quad \Pi_e = \begin{bmatrix} \Pi + \sigma_n^2 \Pi^{-1} & \Pi - \sigma_n^2 \Pi^{-1} \\ \Pi - \sigma_n^2 \Pi^{-1} & \Pi + \sigma_n^2 \Pi^{-1} \end{bmatrix} \quad (28)$$

선형행렬 부등식 (27)은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$L = \begin{bmatrix} M_1^T & 0 & 0 \\ 0 & M_2^T & 0 \\ 0 & 0 & M_3^T \end{bmatrix} L_c \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1^T & 0 & 0 \\ 0 & N_2^T & 0 \\ 0 & 0 & N_3^T \end{bmatrix} L_o \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

여기에서

$$M_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad M_2 = M_3 = [\, I \;\; I \,], \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_n \Sigma_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix},$$
$$N_2 = N_3 = [\, \sigma_n \Pi^{-1} \;\; -\sigma_n \Pi^{-1} \,]$$

이다. 따라서 $\gamma = 2\sigma_n$일 때 선형행렬 부등식 (27)을 만족하는 대칭 양한정 행렬 X_e, Π_e가 존재하므로 증명끝.

정리4에서 균형화된 절삭법을 사용했을 때 간략화된 모델오차의 상한치를 제시하였다. 그러나 실제로 모델 간략화를 수행하는 과정에서는 일반화 가제어성/가관측성 그래미안 P, Q가 유일하지않기 때문에 많은 어려움이 예상된다. 모델오차의 상한치를 줄이기 위해서는 PQ의 고유치중 상대적으로 크기가 적은 고유치들을 최소화하는 P, Q를 구하는 것이 바람직하지만 이것은 볼록 최적화 문제가 아니기 때문에 최적해를 구하기가 아주 어렵다. 따라서 반복계산에 의한 준최적해를 구하여 모델차수 축소를 수행한다. 이를 위한 한가지 방법은 다음과 같다.

step 1 : $i=0$이라두고 선형행렬 부등식 (4)와 (9)를 만족하면서 $tr(P_i + Q_i)$를 최소화하는 P_i, Q_i, R_i, S_i를 구하여 초기화한다.

step 2 : $i = i+1$이라 두고 선형행렬 부등식 (4)의 조건하에서 $J = tr((P_{i-1}Q_{i-1})^{-1} P_{i-1} Q_i)$를 최소화하는 Q_i를 구한다.

step 3 : 선형행렬 부등식 (9)의 조건하에서 $J = tr(P_{i-1} Q_i)^{-1} P_i Q_i)$를 최소화하는 P_i를 구한다.

step 4 : 만족할만한 해를 얻을때까지 step2로 가서 반복한다.

검토 : $tr(PQ) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$이므로 step 2와 3에서의 가치함수는 크기가 작은 σ_i의 가중치를 더욱더 크게하여 크기가 작은 σ_i를 더 줄이기 위해 사용하였으며 효과적인 모델 간략화를 위해서는 적절한 방법의 반복계산법에 관한 연구가 필요하다.

Ⅳ. 수치예

이 절에서는 가상적인 시간지연 시스템에 대해서 본 연구에서 제시한 모델 차수축소 방법을 사용하여 간략화된 모델을 구한다. 시간지연 시스템 (3)이 다음과 같이 주어지고 원래의 시스템과 간략화된 시스템을 보드선도로 나타내어 비교하기 위하여 지연시간을 $d(t) \equiv 1$이라고 가정한다.

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix},$$
$$F = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = [\, 0 \;\; 1 \,], \quad D = 0$$

3절에서 기술한 반복법을 이용한 준최적해를 구하여 식 (14)에서 정의된 균형화된 그래미안을 구하면

$\Sigma = diag(0.8108, 0.2231, 0.0337)$, $\Pi = diag(2.4113, 0.2798)$를 얻는다. 식 (14)에서 주어지는 균형화된 상태공간 구현은

$$A_b = \begin{bmatrix} -0.3005 & -0.7414 & -0.0913 \\ 0.8676 & -1.3319 & -1.3814 \\ -0.4606 & 2.0767 & -4.3675 \end{bmatrix},\ B_b = \begin{bmatrix} 0.6846 \\ -0.7582 \\ 0.5378 \end{bmatrix},$$
$$C_b^T = \begin{bmatrix} 0.5343 \\ 0.5957 \\ 0.1597 \end{bmatrix},\ D_b = 0,$$
$$F_b = \begin{bmatrix} -0.0155 & 0.1604 \\ 0.0171 & -0.1776 \\ -0.0122 & 0.1260 \end{bmatrix},\ G_b^T = \begin{bmatrix} 0.0586 & -0.0650 \\ -0.1790 & 0.2279 \\ -0.2996 & -0.3871 \end{bmatrix},$$
$$H_b = [0.8355\ \ 0.0289]$$

으로 주어진다. $\sigma_3 << \sigma_2$이므로 균형화된 상태공간 구현으로부터 상태변수를 1개 절삭하면 간략화된 시스템 (19)는 다음과 같이 표현된다.

$$G_r = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 0.3005 & 0.7414 & 0.0155 & 0.1604 & 0.6846 \\ 0.8676 & 1.3319 & 0.0171 & 0.1776 & 0.7582 \\ \hline 0.0586 & 0.1790 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0650 & 0.2279 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0.5343 & 0.5957 & 0.8355 & 0.0289 & 0 \end{array}\right] \quad (30)$$

간략화된 시간지연 시스템 (30)의 모델 오차는 0.0674보다 적을 것이 예상되며 모델오차의 보드 크기선도를 <그림 1>에 나타낸다.

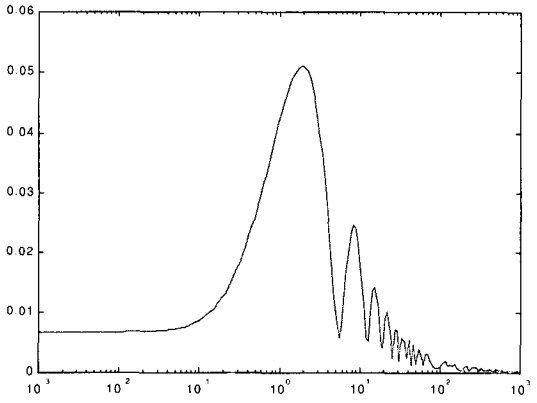

그림 1. 모델근사오차의 보드 크기선도
Fig. 1. Bode magnitude plot of model approximation error.

V. 결 론

본 연구에서는 상태변수에 시변 시간지연을 가진 선형시스템의 모델 차수축소를 위하여 선형행렬 부등식의 해로부터 구해지는 일반화 가제어성/가관측성 그래미안을 정의하였고 일반화 가제어성/가관측성 그래미안을 이용하여 시간지연 시스템을 균형화하였다. 균형화된 시간지연 시스템으로부터 상태변수를 절삭하여 간략화된 시스템을 구할 수 있으며 모델 오차의 상한치를 제시하였다. 통상의 선형 시불변 시스템의 모델 근사와는 달리 일반화 가제어성/가관측성 그래미안이 유일하게 결정되지가 않으며 비제한적인 모델오차의 상한치를 얻기 위해서는 최적화 문제를 풀어야한다. 그러나 제기된 최적화문제는 볼록하지가 않아 전역적인 최적해를 구하기가 상당히 어려워 본 연구에서는 반복법에 따른 준최적해를 구하여 근사화하는 방법을 제시하였다. 수치예를 통하여 본 연구의 효용성을 입증하였다.

참 고 문 헌

[1] B. C. Moore, "Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability and model reduction," IEEE Trans. Automatic Contr., vol.26, pp. 17-32, 1981.

[2] L. Pernebo and L. M. Silverman, "Model reduction via balanced state space representations," IEEE Trans. Automatic Contr., vol.27, pp. 382-387, 1982.

[3] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ error bounds," Int. J. Control, vol.39, pp. 1115-1193, 1984.

[4] Y. Liu and B. D. O. Anderson, "Singular perturbation approximation of balanced systems," Int. J. Control, vol.50, pp.1379-1405, 1989.

[5] G. D. Wood, P. J. Goddard and K. Glover, "Approximation of linear parameter varying systems," Proceedings of the 35th CDC, pp.406-411, Kobe, Japan, Dec. 1996.

[6] C. L. Beck, J. Doyle and K. Glover, "Model reduction of multidimensional and uncertain systems," IEEE Trans. Aotomatic Contr., vol.41, pp.1466-1477, 1996.

[7] J. H. Lee, Y. S. Moon and W. H. Kwon, "Robust H_∞ controller for state and input delayed systems with structured uncertainties," Proceedings of the 35th CDC, pp.2092-2096,

Kobe, Japan, Dec. 1996.

[8] E. T. Jeung, J. H. Kim and H. B. Park, "H_∞ output feedback controller design for linear systems with time varying delayed state," IEEE Trans. Automatic Contr., vol.43, pp. 971-974, 1998.

[9] L. Xi and C. E. de Souza, "LMI approach to delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems," Proceedings of the 34th CDC, pp.3614-3619, New Orleans, Louisiana, 1995.

저 자 소 개

柳 爽 桓(正會員) 第34券 S編 第11號 參照
현재 : 대구대학교 정보통신공학부 교수