

다단 보 구조에서의 티모센코 보 유한요소 모델링 오차분석 및 개선

홍성욱[#], 이용덕^{*}, 김만달^{**}

Error Analysis and Improvement of the Timoshenko Beam based Finite Element Model for Multi-Stepped Beam Structures

Seong-Wook Hong[#], Yong-Duk Lee^{*}, Man-Dal Kim^{**}

ABSTRACT

The Timoshenko beam model has been known as the most accurate model for representing beam structures. However, the Timoshenko beam model may give rise to a significant error when it is applied to multi-stepped beam structures. This paper is intended to demonstrate the modeling error of Timoshenko beam based finite element model for multi-stepped beam structures and to suggest a new modeling method to improve the accuracy. A tentative bending spring is introduced into the stepped section to represent the softening effect due to the presence of step. This paper also proposes a finite element modeling method in the light with the tentative bending spring model for the step softening effect. The proposed method rigorously adapts computation results from a commercial finite element code. The validity of the proposed method is demonstrated through a series of simulation and experiment.

Key Words : Timoshenko beam (티모센코 보), Multi-stepped beam (다단 보), Stress concentration (응력집중), Natural frequency (고유진동수)

1. 서론

보 형태의 구조물이나 회전축 계의 동적 모델링을 위해 티모센코 보 이론에 의한 운동방정식이 널리 쓰이고 있다.¹⁻⁹ 티모센코 보 이론은 보에 대한 가장 일반적인 환경의 운동방정식으로 인정되고 있으며 많은 연구를 통해 그 유용성이 입증되어 왔다. 범용 유한요소 프로그램을 이용한 입체요소 모델링 방법이 비록 일반 구조물에서 광범위하게 사용되고 있으나 보 구조물에 한정할 경우 보 요소

이론에 근거한 모델링 방법의 장점이 있어서 티모센코 보 이론에 기초한 모델링 방법이 아직까지 널리 쓰이고 있다. 보 구조물의 경우, 보 요소 모델링 방법을 이용하면 일반 입체요소에 의한 모델링 방법보다 비교할 수 없을 정도의 적은 자유도만으로 모델링이 가능함으로써 모델의 효율성이나 간편성이 좋아진다. 또한 일반적인 입체요소 모델에서는 고려할 수 없는 효과, 예컨대 회전보 모델링^{3,4}이나, 회전축 모델링⁵에서 흔히 나타나는 요소의 회전효과 등을 손쉽게 포함시킬 수 있으며, 복합적인 모델

접수일: 2003년 4월 9일; 게재승인일: 2003년 7월 11일
교신저자: 금오공과대학교 기계공학부
E-mail: swhong@kumoh.ac.kr, Tel: (054) 467-4214
* LG 이노텍
** 금오공과대학교 대학원

링⁶⁻⁸이나 특수목적 해석 문제⁹ 등에 월등히 유리하다. 따라서 실용적인 설계 및 해석 문제에서 티모센코 보 모델이 많이 활용되고 있다. 그러나 티모센코 보 이론은 보의 경계조건이 전 단면에 균일하게 적용될 때 그 응용이 가능하므로 그와 같은 경계조건을 만족하지 않는 환경에서 사용되는 보 구조물에 대해서는 오차가 발생할 가능성이 크다. 특히 단면의 크기가 서로 다른 보가 연결된 형태의 구조, 즉 다단 보 형태에서는 단차가 있는 부분의 단면 내에서 경계조건이 변화가 발생하게 됨으로써 티모센코 보 요소 모델에 오차가 유발될 가능성이 있다. 그러나 다단 보 구조물에 대한 모델링에서의 이와같은 오차 가능성에도 불구하고 이에 대한 체계적인 분석이나 개선 방안에 대한 연구를 찾기 어렵다.

본 연구에서는 티모센코 보 이론에 의한 다단 보의 모델링에 있어 발생할 수 있는 모델링 오차를 분석하였으며 오차를 개선할 수 있는 방법을 제안하였다. 이를 위해 먼저 티모센코 보 이론에 의해 모델링된 다단 보의 모델링 오차를 분석하였다. 즉, 기학학적으로 단순한 2단 보를 상용 유한요소 코드¹²에 의해 정교한 고유진동수 해석을 실시하였으며 기존의 티모센코 보요소 유한요소 모델에 의해 계산된 고유진동수 결과와 비교하였다. 이와 같은 비교를 통해 다단 보에서 티모센코 요소 모델로 모델링할 경우 큰 오차가 유발됨을 확인하였다.

본 연구에서는 기존의 티모센코 보 이론에 의한 다단 보 유한 요소 모델링 방법을 보완하여 정확성을 높이기 위해 단이 있는 부위에서의 강성 감소 효과를 고려하였다. 이를 위해 결합부위를 중심으로 보 부분의 강성 감소 효과를 나타낼 수 있는 등가 굽힘 스프링 모델링 방법을 제시하였다. 즉, 단이 있는 접합부를 구분하고 접합부가 가상적인 굽힘 스프링에 의해 연결된 것으로 모델링하였다. 굽힘 스프링 상수는 무차원 보정 함수와 기하학적 관계식의 곱으로 정의하였으며 표준적인 2단보에 대한 해석결과를 토대로 무차원 보정 함수를 결정하였다. 또한 가상의 굽힘 스프링을 포함한 유한요소 모델링 방법을 고안하였다.

제안된 모델링 방법을 검증하기 위해 상용 코드에 의해 많은 요소로서 모델링하여 높은 정확도로 계산한 경우와 비교하였으며 매우 유사한 결과를 나타냄을 확인하였다. 마지막으로 제안된 방법을 실제의 2단보 및 4단보 실험에 적용하여 그 타당성

을 검증하였다.

2. 티모센코 보 이론에 의한 모델링 및 오차분석

2.1 티모센코 보 운동방정식

전단변형과 회전관성을 고려한 티모센코 보 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.^{1,10,11}

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \phi - \frac{f}{kAG} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{m}{EI_d} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= -\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial m}{\partial x} &= f + \rho I_d \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, v, ϕ 는 각각 보의 횡 변위 및 회전 변위이고 f, m 은 전단력 및 모멘트를 나타낸다. 또, ρ, G, E 는 보의 물성치로서 각각 밀도, 전단 강성 계수(Shear modulus), 영률(Young's modulus)을 의미하며, A 는 단면적, k 는 단면 형상 보정계수(Shape factor)이다. 또, I_d 는 직경 방향 단면 관성 모멘트(Diametral area moment of inertia)를 의미한다.

식(1)을 요소에 관한 위치에너지와 운동에너지식에 각각 대입하여 요소의 길이에 대한 적분을 수행하고, 라그랑주(Lagrange) 방정식을 적용하면 아래와 같은 유한 요소 방정식을 얻을 수 있다.

$$(m_t + m_r) \ddot{q} + k q = f \quad (2)$$

여기서 m, k 는 각각 관성 및 강성 행렬을 의미하며 모두 대칭이다. 하첨자 t, r 은 각각 병진운동과 회전운동을 의미한다.¹²

2.2 티모센코 보 모델의 오차 분석

다단 보에 대한 티모센코 보 유한 요소 모델의 오차를 보이기 위해 간단한 2단 보에 대해 모델링에 따른 오차를 분석하였다. 고려한 2단 보는 Fig. 1과 같고, 그 사양은 Table 1에 주어진 바와 같다. 본 예제에서는 위와 아래에 동일한 단이 있는 것으로 두었다. 고려한 2단 보에 티모센코 보 이론에 의

한 유한요소 모델링을 하였으며 160개의 요소를 사용하였다. 또한 동일한 2단 보에 대해 일반적인 상용 코드인 I-DEAS¹³를 이용하여 고유진동수를 계산하였으며 여기서는 요소당 20 절점을 갖는 6면체형 요소(Hexahedral element)를 이용하였다. 단이 있는 부분을 세밀하게 메쉬하였으며 요소의 수는 약 12,000개를 적용하였다.

Fig. 2는 2단 보의 단차비(r)가 변할 때 아래 3개의 고유진동수에 대한 오차 추이를 보여주고 있다. 여기서 $r = a/h_1$, $a = (h_1 - h_2)/2$ 로 정의하였다. 계산결과에서 확인할 수 있는 바와 같이 기존의 보 요소 모델링 방법에 의한 경우, 단차가 커질수록 결과에서 볼 수 있는 바와 같이 상당한 정도의 오차가 발생하고 있는 것을 확인할 수 있다. 특히 1, 2차 모드의 고유진동수에서 두드러진 차이를 보이고 있다. Table 2에는 참고를 위해 1차 고유진동수 계산 결과를 비교해서 보여주고 있다. 저차 모드의 고유진동수에 더 큰 오차가 발생하고 있음을 볼 수 있다. 이는 일반적인 예상과 큰 차이를 보이는 것으로서 기존의 방법이 단차의 효과를 적절히 반영하지 못하고 있음을 나타내는 것이다.

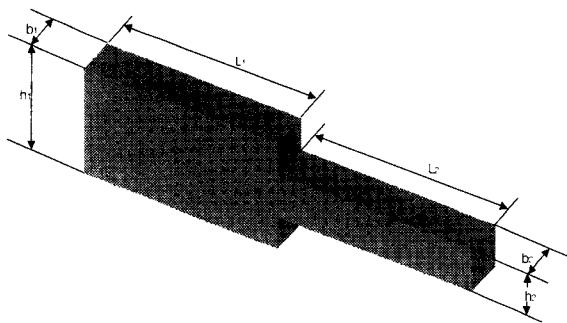


Fig. 1 A 2 stepped beam structure

Table 1 Specifications of numerical model 1

Property	Data
Dimension	$L_1=L_2=15\text{cm}$ $b_1=b_2=3\text{cm}$ $h_1=6\text{cm}$ $h_2=1.8\text{cm} \sim 6.0\text{cm}$
Young's Modulus	$2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Density	7833 kg/m^3
Poisson Ratio	0.3

3. 다단 보 효과의 모델링

3.1 강성 저하 효과 모델링

보에 Fig. 1과 같이 단이 있게되면 왼쪽 부재의 결합부 일부가 자유표면이 된다. 이 때 보에 외력이 전달되어 변형이 되면 두 부재의 접합부에서 각 부재의 평균적인 각에 불연속이 있게 되므로 티모센코 보 요소의 기본 가정을 만족시키지 못하게 된다. 그러나 모멘트와 전단력, 그리고 중심선의 변위는 연속이라고 가정할 수 있으므로 단이 있는 부재에 대해 단을 경계로 두 부분으로 구분하였을 때 다음과 같은 조건식을 만족한다고 표현할 수 있다.

$$m_R = m_L, f_R = f_L, v_R = v_L, \phi_R \neq \phi_L \quad (3)$$

여기서, 접합부에서의 좌우(L,R) 부재간 각변위 불연속성을 고려하고 각 변위의 차이가 전달되는 모멘트에 비례한다고 가정한다. 이때 모멘트와 각변위 차에 관한 비례상수를 가상의 등가 굽힘 스프

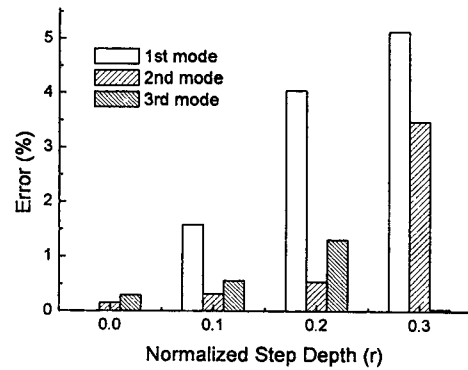
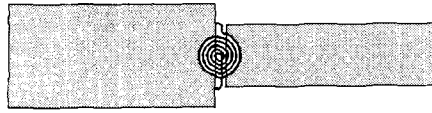


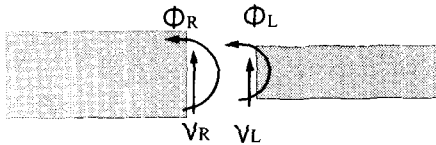
Fig. 2 Errors of natural frequencies computed by a conventional beam finite element model

Table 2 Comparison of the 1st natural frequencies of numerical model 1

r	Natural Frequency(Hz)		Error(%)
	I (I-DEAS)	B (Beam Fem)	
0	3067	3067	0.003
0.1	2694	2737	1.578
0.2	2121	2206	4.041
0.3	1413	1486	5.138



(a) Conceptual model for step-effect



(b) Sign conventions

Fig. 3 The sign conventions and the conceptual model for weakening effect of step

링 상수로 설정한다면 Fig. 3 (a)와 같은 모델링이 가능하다. 그리고 모멘트와 각변위 차이 간에는 다음과 같은 관계식을 쓸 수 있다.

$$M = k_\phi(\phi_R - \phi_L) = k_\phi \Delta\phi \quad (4)$$

이때 부호 규약은 Fig. 3 (b)와 같으며 등가 굽힘 스프링 상수는 다음과 같은 식으로 쓸 수 있다고 가정한다.

$$k_\phi = \frac{1}{2} \frac{EI}{h} \frac{1}{F(r)} \quad (5)$$

여기서 $F(r)$ 은 단차비에 따라 변화되는 강성 보정 함수이며 일반적으로 단차비가 커짐에 따라 커지는 특성을 갖는다. 또, 식(5)에서 상수 1/2은 고려 대상인 보가 상하 두 개의 단을 포함하고 있음을 고려한 것이다. 식(5)는 균열 등의 부분적인 변화에 의해 국부적인 응력집중이 발생했을 때에 대한 강성 감소 효과를 모델링하는데 유효한 것으로 확인되고 있다¹⁴.

3.2 단을 포함한 요소의 모델링

단이 있는 부분을 경계로 구분하고, 경계부분에서 굽힘 스프링에 의해 결합되는 형태로 모델링한다. 따라서 두 개 요소가 결합되는 형태로 만들어지게 된다. 그러나 전 절에서 설명한 바와 같이 보에 단이 있는 경우에는 결합부에서의 각에 대한 불연속이 있으며 변위에서는 연속이 유지되므로 부재

간의 결합부에서 각에 관한 1개의 자유도가 추가된다. 즉 부재 1의 우측단의 절점변위와 부재 2의 좌측단 절점변위가 동일하게 되나 각변위는 각각 독립적인 자유도가 됨으로서 두 요소간의 조합은 다음과 같이 이루어지게 된다.

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{1} & \textcircled{1} & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{1} & \textcircled{1} & \textcircled{1} & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{1} & \textcircled{1} & \textcircled{1} + \textcircled{2} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{2} & \textcircled{2} \\ \textcircled{1} & \textcircled{1} & \textcircled{1} & \textcircled{1} + k_\phi & -k_\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & -k_\phi & \textcircled{2} + k_\phi & \textcircled{2} & \textcircled{2} \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & 0 & \textcircled{2} & \textcircled{2} & \textcircled{2} \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & 0 & \textcircled{2} & \textcircled{2} & \textcircled{2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서 ①과 ②는 각각 좌측 보와 우측 보의 요소들을 의미한다.

3.3 강성 보정 함수의 결정

본 절에서는 식(5)에서 정의한 바와 같이 단에 의해 발생된 강성효과를 구하는 방법에 대해 논의하고자 한다. 본 연구에서는 먼저 다른 조건을 일정하게 두고 단차비만의 함수가 될 수 있도록 단의 크기만을 변화시킨 몇 개의 2단 보에 대해 각각 상용 유한요소 프로그램을 이용하여 고유진동수를 구하였다. 그리고 제안된 모델링 방법에 의한 고유진동수와 상용 유한요소 프로그램에 의해 계산된 고유진동수 간의 오차를 최소화하도록 강성값을 결정하였고, 이 값을 기초로 식(5)를 이용하여 강성 보정 함수를 결정하였다. 강성계수를 결정하기 위해 다음과 같은 오차인덱스(Error Index)를 최소화하는 방법을 이용하였다.

$$\epsilon(\%) = 100 \times \sqrt{\sum_{n=1}^N \left(\frac{\omega_n^c - \omega_n^p}{\omega_n^c} \right)^2} \quad (7)$$

여기서 ω_n^c 는 n번째 고유진동수의 참값으로서 상용코드에서 정밀하게 모델링되어 계산되었거나 실험적으로 얻어진 것이며, ω_n^p 는 제안된 방법으로 계산된 n번째 고유진동수이다. N은 고려한 고유진동수 개수로서 여기서는 3을 택하였다.

굽힘 스프링 상수 및 강성 보정 함수 $F(r)$ 을 결정하기 위해 Table 1의 특성을 갖는 2단보 모델을 고려하였다. Fig. 4는 단차에 따른 고유진동수 변화

를 고려하여 식(7)을 최소화한 굽힘 스프링 강성계수를 보여주고 있다. 또한 Fig. 5는 식(5)로부터 얻어지는 보정함수 $F(r)$ 값을 r 에 대한 4차 다항식으로 보간하여 재구성한 곡선을 보여주고 있으며 식(8)은 그 결과식이다.

$$F(r) = 0.00364 - 1.26197r + 30.80254r^2 - 165.24634r^3 + 352.86894r^4 \quad (8)$$

식(8)로 얻어진 강성 보정 함수는 단차비(r)만의 함수로서 보의 크기나 물성치 등에 영향을 받지 않는다. 따라서 형상과 물성치 등이 다른 보에도 그대로 적용할 수 있을 것으로 예상된다.

한편 Fig. 6은 곡선보간하여 얻은 보정함수를 이용하여 계산되는 굽힘 강성 계수를 채용한 제안된 방법과 일반적인 보 유한요소방법에 의한 오차인덱스를 비교해서 보여주고 있다. 또 Fig. 7에서는 각 모드별로 제안된 방법과 일반적인 방법, 그리고 참값을 제공한다고 가정한 상용코드에 의한 방법을 나란히 비교하고 있다. 제안된 방법과 상용코드에 의한 방법이 대단히 잘 일치하고 있다.

4. 개선된 모델의 검증 및 적용

4.1 수치예제: 2단 보

본 예제에서는 앞서 다루어진 표준수치 모델과 기본 형상은 같으나 외형이 커진 수치모델을 고려하였다. Table 3은 본 예제에서 고려한 모델의 사양을 보여주고 있다. 본 예제에서는 식(8)로 결정된 강성 보정 함수를 이용하여 굽힘 스프링 상수를 계산하였다. Fig. 8은 제안된 방법에 의해 개선된 2단 보 모델을 이용하여 계산한 고유진동수와 기존 보 요소 유한요소 모델, 그리고 상용코드¹³에 의해 계산된 고유진동수를 비교해서 보여주고 있다. 제안된 모델의 고유진동수가 상용코드에 의한 결과와 매우 잘 일치하고 있는 것을 볼 수 있다. 특히, 강성 보정 함수를 결정했던 모델과 그 크기가 전혀 다른 2단 보에 대해서도 기 결정된 강성 보정 함수를 이용한 계산이 적용 가능함을 확인할 수 있다. 따라서 제안된 방법이 단차가 있는 대부분 보 모델에 유용하게 활용될 수 있을 것으로 사료된다.

제안된 방법에 의한 계산은 160개 요소를 사용하였으므로 계산에 따른 시간은 무시할 수 있을 정

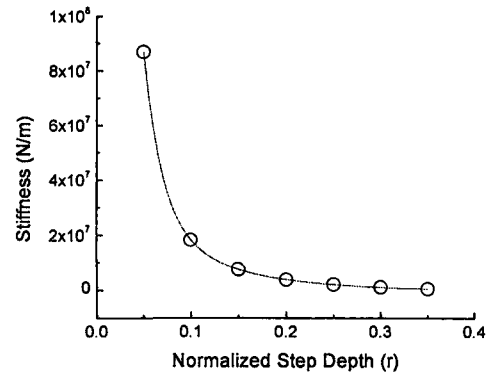


Fig. 4 Identified bending stiffness

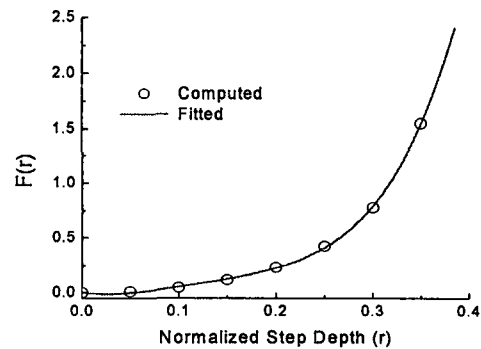


Fig 5 Identified weighting function $F(r)$

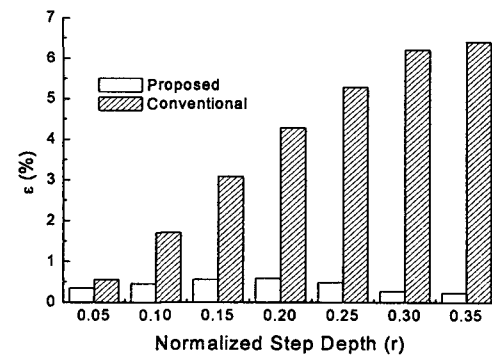
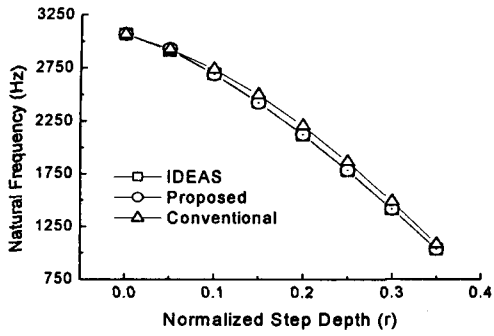
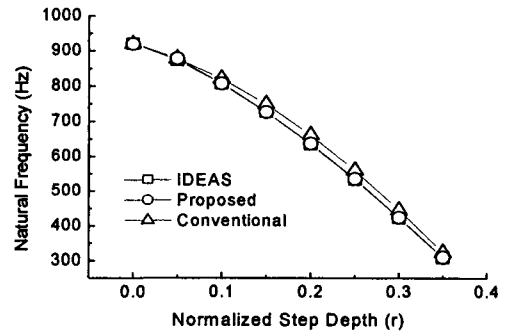


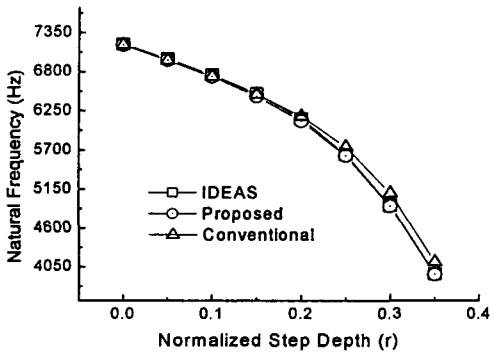
Fig. 6 Comparison of the error indexes by the proposed method and the conventional beam FEM method



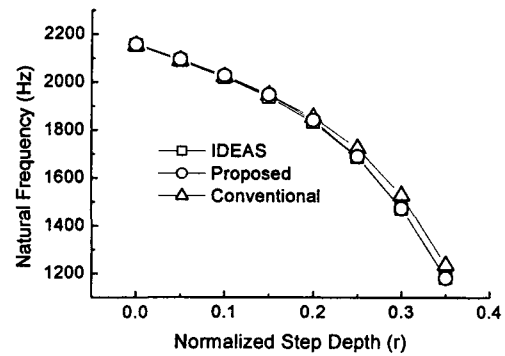
(a) the first mode



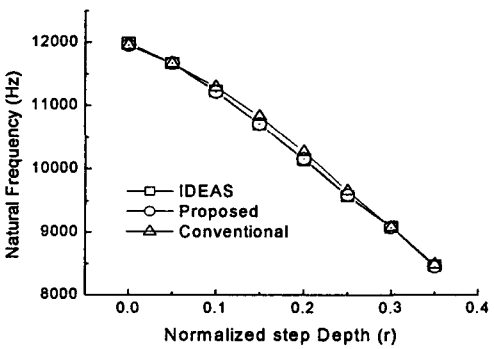
(a) the first mode



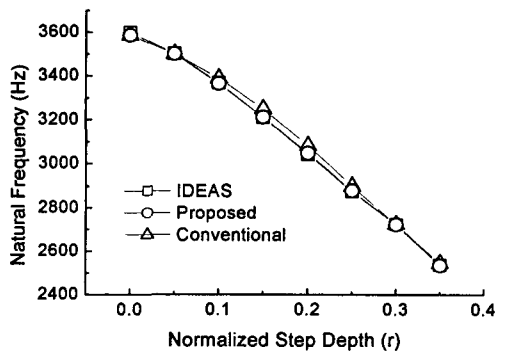
(b) the second mode



(b) the second mode



(c) the third mode



(c) the third mode

Fig. 7 Comparison of natural frequencies of numerical model 1 computed by IDEAS, the proposed method and the conventional beam FEM method

Fig. 8 Comparison of natural frequencies of numerical model 2 by IDEAS, the proposed method and the conventional beam FEM method

Table 3 Specifications of numerical model 2

Property	Data
Dimension	$L_1=L_2=50\text{cm}$ $b_1=b_2=10\text{cm}$ $h_1=20\text{cm}$ $h_2=1.8\text{cm} \sim 6.0\text{cm}$
Young's Modulus	$2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Density	7833 kg/m^3
Poisson Ratio	0.3

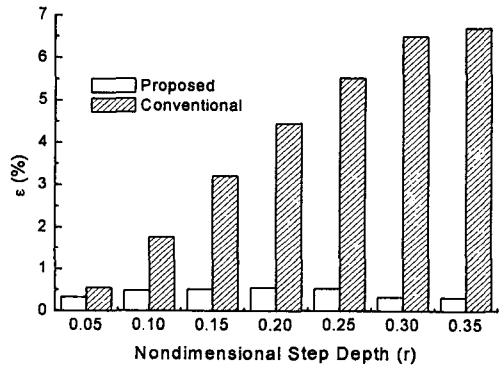


Fig. 9 Comparison of the error indexes for the natural frequencies of numerical model 2 by the proposed method and the conventional beam FEM method

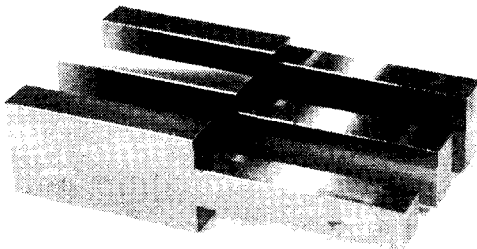
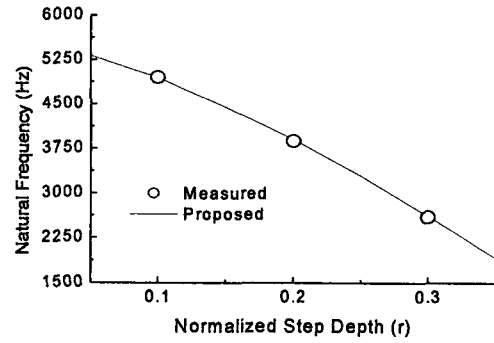
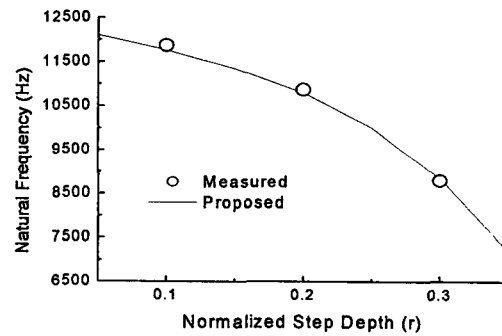


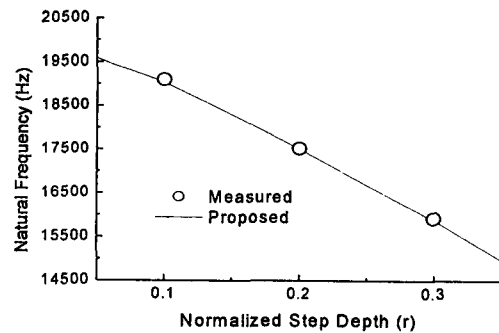
Fig. 10 Experimental model 1: two-stepped beams



(a) the first mode



(b) the second mode



(c) the third mode

Fig. 11 Comparison of measured and computed natural frequencies of experimental model 1

도인 반면, 상용코드에 의한 계산에는 1개 모델 계산에 Pentium 4 2.0GHz 컴퓨터에서 20분 이상 소요되었다.

4.2 실험 1: 2단 보

제안된 방법의 실험적 검증을 위하여 Fig. 1의 형상에서 $L_1=L_2=10\text{cm}$, $b_1=b_2=2\text{cm}$, $h_1=5\text{cm}$ 를 기준으로 제작된 시편에 대해 실험을 실시하였다. Fig. 10과 같이 $r=0.1, 0.2, 0.3$ 인 경우의 시편들을 제작하였다. 실험에 사용된 시편의 밀도와 영률의 값은 각각 7833 kg/m^3 , $2.10 \times 10^{11}\text{ N/m}^2$ 로 두었다. 고유진동수 측정을 위해 대상 시편을 양단 모두 자유단 경계로 두고 충격실험을 실시하였다. 측정센서로는 가속도계를 사용하였으며 주파수 응답함수로부터 고유진동수 값을 얻었다. Fig. 11에는 계산 및 실험 결과를 동시에 보여주고 있다. 또한 Fig. 12에는 식 (7)과 같이 계산되는 오차인덱스를 보여주고 있다. 제안된 방법으로 계산된 고유진동수가 실험치에 대단히 유사한 것을 확인할 수 있다.

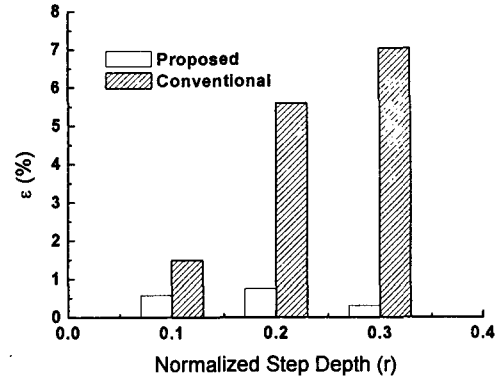


Fig. 12 Error indexes for experimental model 1 by the proposed and the conventional methods

4.3 실험 2: 4단 보

제안된 방법이 보다 일반적인 보 구조물에 적용 가능한지를 확인하기 위해 일반적인 형태의 4단 보를 실험대상으로 고려하였다.

Fig. 13은 본 실험에서 고려한 4단 보로서 시편의 밀도와 영률의 값은 각각 7833 kg/m^3 , $1.98 \times 10^{11}\text{ N/m}^2$ 로 두었다. 앞서 기술한 2단 보에서와는 달리 상면에만 단이 있으며 단차비도 위치에 따라 다른 상태이다. 단이 상면에만 있으므로 굽힘 스프링강성계수는 다음과 같이 표현된다.

$$k_\phi = \frac{EI}{h} \frac{1}{F(r)} \tag{9}$$

각 단에서 식(9)의 굽힘 스프링 강성계수를 계산하는데 있어 EI, h는 단차가 있는 두 부재 중 자유 평면이 존재하는 큰 부재의 값을 택하여야 한다. 전체 보 구조물을 모델링하기 위해 200개의 요소를 사용하였다. Table 4에는 실험과 제안된 방법으로 계산된 고유진동수를 비교해서 보여주고 있다. 측정치와 계산치가 대단히 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다.

이상의 수치예제 및 실험 결과로부터 제안된 모델링 방법은 단이 있는 보에서의 강성 감소 효과를

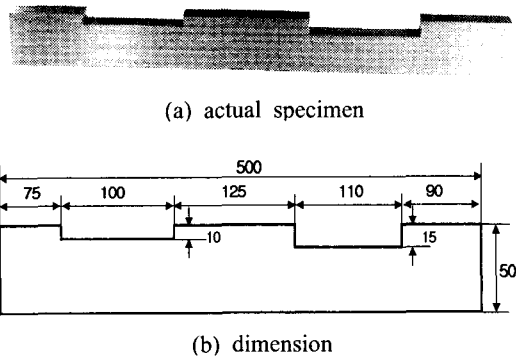


Fig. 13 Experimental model 2: a multi-stepped beam structure

Table 4 Comparison of measured and computed natural frequencies for experimental model 2

Mode	Natural Frequency(Hz)		Error(%)
	measured(M)	computed(C)	M-C /Mx100
1	793.7	794.7	0.13
2	2006.2	2008.5	0.11
3	3906.2	3902.1	0.10

적절히 나타냄으로서 보다 정확한 모델링을 가능하게 함을 확인할 수 있었다. 따라서 실제 구조물을 모델링하는데 제안된 방법을 사용하면 상용코드 사

용에 따르는 비용과 시간을 절감하면서도 매우 효율적이고도 정확한 모델링이 가능할 것으로 사료된다.

5. 요약 및 결론

본 연구에서는 단이 있는 보 구조물을 티모센코 보 이론을 이용하여 모델링할 때 단에 의해 발생하는 강성 감소 효과를 고려하여 보다 정확한 모델링이 가능하도록 개선하는 방법을 제안하였다. 이를 위해 먼저 티모센코 이론에 의한 일반적인 보 요소 유한요소모델로 모델링된 다단 보의 오차를 분석하였다. 또한 강성 감소 효과를 모델링하기 위해 단이 있는 부분에서의 굽힘각 불연속성을 가정하고, 가상의 굽힘 스프링을 도입하여 보에 전달되는 모멘트에 의해 굽힘각 차이가 발생한다고 가정하였다. 그리고 2단 보 모델을 통해 임의조건에서의 굽힘 스프링 상수값을 계산할 수 있는 강성 보정 함수를 결정하였다. 제안된 다단 보 모델링 방법을 상용유한요소코드와 비교하여 그 타당성을 검토하였으며 실제 2단보 시편과 일반적인 형상의 다단 보 시편에 적용하여 그 유용성을 실험적으로 확인하였다. 제안된 다단 보 모델링 방법은 보 구조물 유한요소 모델링에 활용함으로써 상용코드 사용에 따르는 비용과 시간을 절감하면서도 매우 효율적이고도 정밀한 모델링을 가능하게 함으로써 실제적인 문제에 유용하게 활용될 수 있을 것으로 사료된다.

후 기

이 논문은 금오공과대학교 학술공모과제 연구비 지원에 의하여 연구되었음.

참고문헌

1. Timoshenko, S., Young, D. and Weaver, W. Jr, *Vibration Problems in Engineering*, 4th ed., John Wiley & Sons, 1974.
2. Han, S. M., Benaroya, H. and Wei, T., "Dynamics of Transversely Vibrating Beams using Four Engineering Theories," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 225, No. 5, pp. 935-988, 1999.
3. Nagaraj, V. T., "Relation between Fundamental Natural Frequency and Maximum Static Deflection for Rotating Timoshenko Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 201, No. 3, pp. 404-406, 1997.
4. Rao, S. S. and Gupta, R. S., "Finite Element Vibration Analysis of Rotating Timoshenko Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 242, No. 1, pp. 103-124, 2001.
5. Nelson, H. D., "A Finite Rotating Shaft Element using Timoshenko Beam Theory," *ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 102, pp. 793-803, 1980.
6. Wu, T. X. and Thompson, D. J., "A Double Timoshenko Beam Model for Vertical Vibration Analysis of Railway Track at High Frequencies," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 224, No. 2, pp. 329-348, 1999.
7. Wang, R. T. and Lin, T. Y., "Vibration of Multi-Span Timoshenko Frames due to a Moving Load," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 212, pp. 417-434, 1998.
8. Abramovich, H., "Shear Deformation and Rotatory Inertia Effects of Vibrating Composite Beams," *Composite Structures*, Vol. 20, pp. 165-173, 1992.
9. Lee, S. P. and Maiti, S. K., "Modelling of Transverse Vibration of Short Beams for Crack Identification and Measurement of Crack Extension," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 257, No. 3, pp. 559-583, 2002.
10. Pilkey, W. D., *Formulas for Stress, Strain, and Structural Matrices*, John Wiley & Sons, Inc., 1994.
11. Hong, S. W., Kim, J. W. and Park, J. H., "A Method for Determining Exact Modal Parameters of Non-uniform, Continuous Beam Structures with Damping Elements," *Journal of the KSPE*, Vol. 15, No. 12, pp. 202-211, 1998.
12. Hong, S. W., Cho, Y. J. and Kim, J. S., "A Study on the Combined Use of Exact Dynamic Elements and Finite Elements," *Journal of the KSNVE*, Vol. 12, No. 2, pp. 141-149, 2002.
13. I-DEAS Design User's Guide, Samsung SDS, Co., 1996.
14. Hong, S. W., Kim, M. D. and Lee, C. W., "Dynamic Modeling and Analysis of Beam Structures with Cracks," *Journal of the KSPE*, Vol. 20, No. 6, pp. 197-204, 2003.