

朝鮮朝代 句股의 兩和術

군산대학교 수리정보통계학부 柳寅永

Abstract

Gougu Rule for the right triangles is the Chinese Pythagorean theorem. In the late age of the Chosun Dynasty, mathematicians of Chosun pioneered the study of the Chinese Nine Chapters and other advanced mathematical problems as well as the Easternism in spite of the various difficulties after the Imchinoeran(壬辰倭亂), Chungyuchairan(丁酉再亂) and Byungchahoran(丙子胡亂) The technologies of the addition and addition twice are the methods of the solution of the problems in the right triangles. This paper is intended to introduce some problems using these methods of solution.

0. 안내

본 논문은 구고술 가운데 한 방법인 양화술을 다룬다. 전개의 순서는 다음과 같다.

1. 구고술에 필요한 안내
2. 양화술에 관련된 문제
3. 가까운 이웃 문제(현화교)
4. 결론
참고 문헌

1. 구고술에 필요한 안내

유씨구고술요도해(劉氏句股術要圖解)에서 직각삼각형을 '구고'라고 한다. 직각을 낀 짧은 변(가로변)과 직각을 낀 긴 변(세로변) 및 빗변을 각기 구(句)와 고(股) 및 현(弦)이라고 한다. 화(和)는 덧셈 또는 합(合)의 뜻이고 교(較)는 뺄셈 또는 차(差)의 뜻이다. 변의 요

소가 셋이니 들씩 더하는 방법도 3가지이다. 즉, 구고화와 구현화 및 고현화가 그 셋이다. 물론 교도 세 가지이다. 즉, 구고교와 구현교 및 고현교이다. 여기서 구 고 현을 각기 $x y z$ 라고 놓으면 위에서 말한 3화는 $y+x, z+x, z+y$ 이오, 3교는 $y-x, z-x, z-y$ 로 된다. 3교의 문제는 현화교(弦和較; 구고화와 현과의 차이, 즉 $y+x-z$)로 통일되어 문제 풀이가 일반화되고 3화의 문제는 소위 양화술이라는 이름 아래 각기 다른 형태의 풀이법이 있으나, 그 가운데의 들은 서로 유사하고 그 중에 있는 현화화(구고화와 현과의 합; $y+x+z$)는 현화교와 더불어 직각삼각형에 관련 문제에서 편리하게 이용된다.



음; 도해갑을위구현화갑정위고현화상승득갑을병정장방형내무기경정위현자승지정방신을임기 위구고상승지장방갑신기무위고현상승지장방기임병경위구현상승지장방야

구고현총화자승득계자측인일대정방즉기묘진사인위현자승지정방오미신진위고자승지정방유 자술미위구자승지정방양방상병우위현자승지정방가유미오여미술건신위구고상승지이장방해오 진묘여진신감사위고현상승지이장방계간오해여신건축감위구현상승지이장방비갑을병정장방매 일형구다일배고양화상승배지개방득계자유매일변위총화야

우술도해갑을병정구현화자승정방내합갑신기무구자승방기경병임현자승방신을경기여무기임 정구현상승이방우계자측인고현화자승정방내합계사진묘고자승방진오측미현자승방사자오진여 묘진미인고현상승이방병지위실즉기적위현자승방삼단 「구자승방고자승방공위현자승방고득현 자승방삼단」 고현상승방구현상승방각이단약이현위활작장방형즉기장위삼현이고이구공고배양 화득사현이고이구공위정염 「즉장활화」 이일위부우개평방득현

원문; 圖解甲乙爲句弦和甲丁爲股弦和相乘得甲乙丙丁長方形內戊己庚丁爲弦自乘之正方辛乙壬己爲句股相乘之長方甲辛己戊爲股弦相乘之長方己壬丙庚爲句弦相乘之長方也

句股弦總和自乘得癸子丑寅一大正方則其卯辰巳寅爲弦自乘之正方午未辛辰爲股自乘之正方酉子戊未爲句自乘之正方兩方相併又爲弦自乘之正方良酉未午與未戌乾辛爲句股相乘之二長方亥午辰卯與辰辛坎巳爲股弦相乘之二長方癸良午亥與辛乾丑坎爲句弦相乘之二長方比甲乙丙丁長方每一形俱多一(2)倍故兩和相乘(2)倍之開方得癸子類每一邊爲總和也

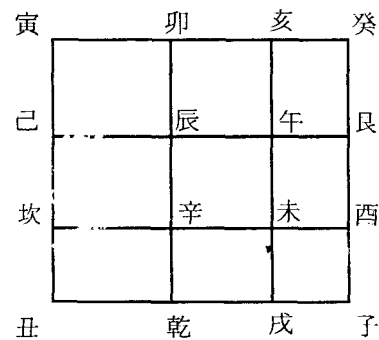
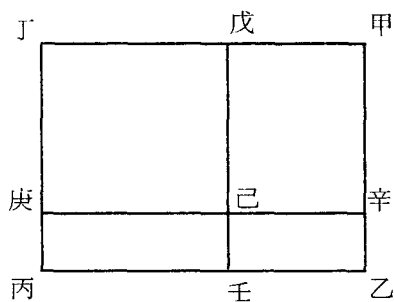
又術圖解甲乙丙丁句弦和自乘正方內函甲辛己戊句自乘方己庚丙壬弦自乘方辛乙庚己與戊己壬丁句弦相乘二(長)方又癸子丑寅股弦和自乘正方內函辛巳辰卯股自乘方辰午丑未弦自乘方己了午辰與卯辰未寅股弦相乘二(長)方併之爲實則其積爲弦自乘方三段 「句自乘方股自乘方共爲弦自乘

方故得弦自乘方三段」股弦相乘方句弦相乘方各二段若以弦爲闊作長方形則其長爲三弦二股二句共故(2)倍兩和得四弦二股二句共爲正廉「卽長闊和」以一爲負隅開平方得弦.

문역; 그림의 해설 갑을은 구현화가 되고 갑정은 고현화가 되어 서로 곱하면 갑을병정의 장방형(직4각형)을 얻고, 그 안에 무기경정은 현자승의 정방(정4각형)이 되고, 신을임기는 구고상승의 장방(직4각형)이 되고, 갑신기무는 고현상승의 장방(직4각형)이 되고, 기임병경은 구현상승의 장방(직4각형)이 되느니라.

구고현의 총화를 자승하면 계자축인의 한 큰 정방(정4각형)을 얻는다. 즉 그 진묘사인(진묘인사)은 현자승의 정방(정4각형)이 되고 오미신진은 고자승의 정방(정4각형)이 되고 유자술미는 구자승의 정방(정4각형)이 되어, 두 정방(정4각형)을 서로 더하면 또 현자승의 정방(정4각형)이 된다. 간유미오는 미술건신과 더불어 구고상승의 2 장방(직4각형)이 되고 해오진묘는 진신감사와 더불어 고현상승의 2 장방(직4각형)이 되고 계간오해는 신건축감과 더불어 구현상승의 2 장방(직4각형)이 되어, 갑을병정 장방(직4각형)을 비교하면 매 1 모형은 모두가 함께 1(2)배로 많은 고로, 양화를 상승 2배로 하여 개방하면 계자 종류의 매 1변을 얻어 총화(구고현의 총화)가 되느니라.

또 술수의 그림의 해설은 갑을병정은 구현화의 자승한 정방(정4각형)이고, 그 안에는 갑신무기(갑신기무)의 구의 자승방(제공한 정4각형)과 기경병임의 현의 자승방(제공한 정4각형)과 신을경기는 무기임정(무정임기)와 더불어 구현상승의 2 장방(직4각형)이 포함된다. 또 계자축인은 고현화의 자승한 정방(정4각형)이고, 그 안에는 계사진묘의 고의 자승방과 진오축미의 현의 자승방(제공한 정4각형)과 사자오진은 묘진미인(묘인미진)과 더불어 고현상승의 2 장방(직4각형)이 있어서 이를 더하여 실이라고 하는 즉 그의 적은 현의 자승방(제공한 정4각형)의 3단이 되고 「구의 자승방(제공한 정4각형)과 고의 자승방(제공한 정4각형)의 합은 현의 자승방(제공한 정4각형)인 고로 현의 자승방(제공한 정4각형) 3단이다.」 고현상승의 장방(직4각형)과 구현상승의 장방(직4각형) 각 2단이 되는 고로 만일 현이 활이 되는 장방(직4각형)인 즉 그의 작은 3현과 2고와 2구의 합이 되는 고로 양화를 2배로 하면 4현과 2고와 2구를 얻어 정음이 되고 「즉 장과 활의 합이다.」 1로 부우라고 하여 평방법으로 개방하면 현을 얻는다.

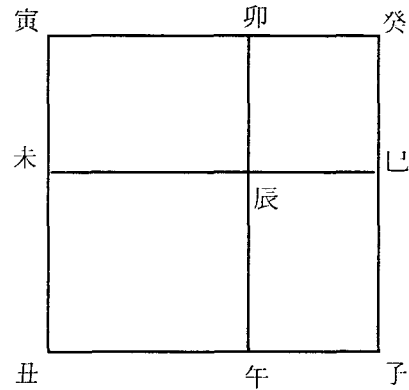
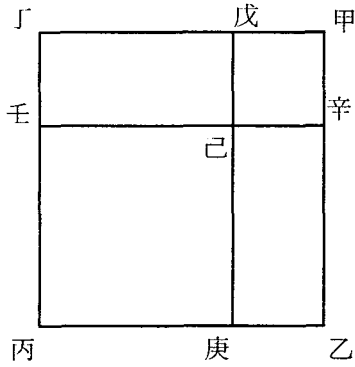


朝鮮朝代 句股의 兩和術

위의 왼편 그림에서 甲辛=정경=무기=정무=경기=병입=z, 辛乙=기입=경병=x, 甲戊=辛己=乙壬=y 라고 두면 □甲乙丙丁=(z+x)(z+y)=z²+zy+xz+xy 이다.

또, 오른편의 그림에서 寅卯=사진=갑신=축건=인사=묘진=해오=계간=z, 卯亥=진오=신미=건술=사갑=진신=오미=간유=y, 亥癸=오간=미유=술자=갑축=신건=미술=유자=x 라고 두면 □계자축인=□진묘사인(진묘인사)+□오미신진+□유자술미+□간유미오+□미술건신+□해오진묘+□진신갑사+□계간오해+□신건축갑=(z+y+x)²=z²+y²+x²+2zy+2zx+2yx=2(z²+zy+zx+yx)=2(z+x)(z+y)=2□甲乙丙丁이다.

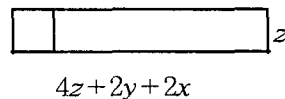
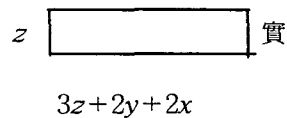
따라서 z+y+x=√2(z+x)(z+y)이다.



또 위의 왼편의 그림에서 甲辛=무기=정입=갑무=신기=을경=x, 辛乙=기경=임병=z 라고 두면, □甲乙丙丁=□갑신무기(갑신기무)+□기경병임+□신을경기+□무기임정(무정임기)=(z+x)²=z²+x²+2zx 이다.

위의 오른편의 그림에서 癸巳=묘진=인미=계묘=사진=자오=y, 巳子=진오=미축=묘인=미진=축오=z 라고 두면 □癸子丑寅=□계사진묘+□진오축미+□사자오진+□묘진미인(묘인미진)=(z+y)²=z²+y²+2zy 이다. 변적(實; shi)=□갑을병정+□계자축인=(z+x)²+(z+y)²=3z²+2zx+2zy=4z²+2zx+2zy-z² 이다.

따라서 z²-(4z+2y+2x)z+shi(實)=0의 현(z)의 변수로 표시되는 이차방정식이다.

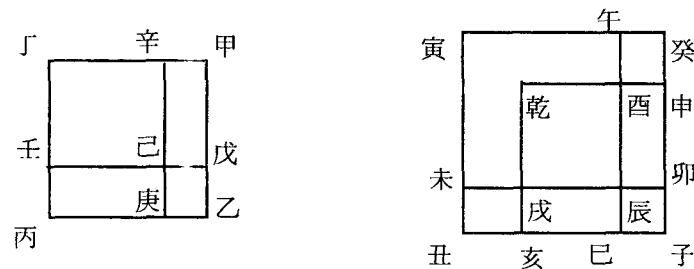


음; 도해갑을병정구고화자승방내무을경기위구자승방신기임정위고자승방갑무기신여기경병인 위구고상승이방우계자축인구현화자승방내묘자사진위구자승방오진미인위현자승방계묘진오이 진사축미위구현상승이방상갑위실즉기적위구떡일단구승고현교적이단 「감여즉계신건해축인경 절형이기중오유건술미인경절형즉현떡내감고떡지여고위구떡이계신유오여술해축미이장방각위

구승고현교적야」 악이구위활작장방형즉기장위일구이고현교지공고양화상감배지득이고현교 「즉장활교」 위중이일위우개평방득구

원문; 圖解甲乙丙丁句股和自乘方內戊乙庚己爲句自乘方辛己壬丁爲股自乘方甲戊己辛與己庚丙壬爲句股相乘二方又癸子丑寅句弦和自乘方內卯子巳辰爲句自乘方午辰未寅爲弦自乘方癸卯辰午與辰巳丑未爲句弦相乘二方相減爲實則其積爲句冪一段句乘股弦較積二段 「減餘卽癸申乾亥 丑寅磬折形而其中午酉乾戌未寅磬折形卽弦冪內減股冪之餘故爲句冪而癸申酉午與戌亥丑未二長方各爲句乘股弦較積也」 若以句爲闊作長方形則其長爲一句二股弦較之共故兩和相減倍之得二股弦較 「卽長闊較」 爲從以一爲隅開平方得句

문역; 그림의 해설 갑을병정은 구고화의 자승정방(제공한 정4각형)이요, 안의 무을경기는 구의 자승정방(제공한 정4각형)이고, 신기임정은 고의 자승정방(제공한 정4각형)이고, 갑무기신은 기경병임과 더불어 구와 고의 상승한 2 장방(직4각형)이다. 또 계자축인은 구현화의 자승정방(제공한 정4각형)이요, 안의 묘자사진은 구의 자승방(제공한 정4각형)이고, 오진미인은 현의 자승방(제공한 정4각형)이고, 계묘진오는 진사축미(축사진미)와 더불어 구현의 서로 곱한 2 장방(직4각형)이다. 서로 감하여 실이라고 하면 즉 그의 적은 구역(구의 제공)의 1단과 구를 고현교에 곱한 적(장방적; 직4각형의 넓이) 2단이 된다. 「감한 나머지는 즉 계신건해축인의 경절형이요 그 가운데 오유건술미인의 경절형은 즉 현역(현의 제공)의 안에 고역(고의 제공)을 감한 나머진 고로 구역(구의 제공)이 되고, 계신유오는 술해축미와 더불어 2 장방(직4각형)은 각기 구에 고현교를 곱한 적 이니라.」 만일 구로써 활이라고 하여 장방형(직4각형)을 만들면 즉 그의 장은 1구와 2고현교의 합이 되는 고로 양화를 서로 감하여 이를 2배로 하면, 2 고현교를 얻어 「즉 장활교이다.」 종이 되고 1로 우라고 하여 평방법을 써서 개방하면 구를 얻는다.



위의 원편의 그림에서 戊乙=기경=임병=을경=무기=갑신=x, 甲戊=신기정임=경병기 임=신정=y 라고 두면 □甲乙丙丁=□무을경기+□신기임정+□갑무기신+□기경병임=y²+x²+2yx 이다.

또 오른편의 그림에서 卯子=진사=술해=미축=사자=진묘=유신=오계=x, 卯癸=진오

=미인=사측=진미=오인=z 라고 두면 □계자측인=□묘자사진+□오진미인+□계묘진오+□진사측미(측사진미)=(z+x)²=z²+x²+2zx 이고 절경형면적(癸申乾亥丑寅; 實)=□癸子丑寅-□신자해건(=□갑을병정)=(z+x)²-(y+x)²=z²-x²+2(z-y)x=x²+2(z-y)x 이다. 따라서 x²+2(z-y)x-shi(實)=0의 변수(x)의 이차방정식이 된다.

한편, 오른편의 그림에서 卯子=진사=술해=미측=사자=진묘=유신=오계=y로 두면 x와 y의 하는 역할이 바뀐다. 따라서 y²+2(z-x)y-shi(實)=0의 변수(y)의 이차방정식이 된다.

2. 양화술에 관련된 문제

문제* 1. 음; 구현화일백삼십육척구촌고현화일백육십팔척이촌문구고현

원문; 句弦和一百三十六尺九寸股弦和一百六十八尺二寸問句股弦(圖解, p. 23)

문역; 구현의 화는 136척 9촌이오 고현의 화는 168척 2촌이다. 구 고 현을 묻는다.

답구사십육척사촌(答句四十六尺四寸),
 고칠십칠척오(*오→칠)(股七十七尺五(五→七)寸),
 현구십척오촌(弦九十尺五寸)

해법 음; 술왕양화상승배지위실평방개득현화화내감고현화여위구야감구현화여위고야이고감고현화여위현우술양화각자승병지위실양화상병배지위정염이일위부우평방개득현

원문; 術曰兩和相乘倍之爲實平方開得弦和內減股弦和餘爲句也減句弦和餘爲股也以股減股弦和餘爲弦 又術兩和各自乘併之爲實兩和相併倍之爲正廉以一爲負隅平方開得弦.

문역; 술수가 가라사대 양화(구현화와 고현화)를 서로 곱하여 이를 배로 하여 실이라고 하고 평방법으로 개방하면 현화화를 얻고 고현화를 내감하면 구가 되느니라. 구현화를 내감하면 고가 되느니라. 고로써 고현화에서 감하면 현이 된다.///

역자 주; 구 고 현을 각 x y z라고 하자.

해 1). 그러면 다음이 성립한다.

$$2(x+z)(y+z)=(x+y+z)^2=46053.16=214.6^2$$

따라서 x+y+z=214.6이므로, 다음을 얻는다.

$$y=77.7, x=46.4, z=90.5////$$

해 2). 또 술수는 양화를 각기 자승하여 이를 더하여 실이라고 하고 양화를 서로 더하고 (2)배로 하여 정염이라고 하고 1로 부우라고 하여 평방법으로 개방하면 현을 얻는다.

즉, 다음과 같이 놓자.

$$(x+z)^2 + (y+z)^2 = 18741.61 + 28291.24 = 47032.85 \cdots \text{실}$$

$$2\{(x+z) + (y+z)\} = 610.2 \cdots \text{정업}$$

$$1 \cdots \text{부우}$$

그러면 $H(z) = z^2 - 610.2z + 47032.85 = 0$ 이고 $H(90.5) = 0$ 이므로, 다음을 얻는다.

$$z = 90.5, \quad x = 46.4, \quad y = 77.7 \text{////}$$

해 3). 다음 관계가 성립한다.

$$x+z = 136.9 \cdots \text{①}, \quad y+z = 168.2 \cdots \text{②}, \quad z^2 = x^2 + y^2 \cdots \text{③}$$

①②→③하면 $z^2 = (136.9-z)^2 + (168.2-z)^2$ 이고, 정돈하면 다음을 얻는다.

$$H(z) = z^2 - 610.2z + 47032.85 = 0$$

$H(90.5) = 0$ 이므로, 다음을 얻는다.

$$z = 90.5, \quad x = 136.9 - z = 46.4, \quad y = 168.2 - z = 77.7 \text{////}$$

문제 2. 음; 구고화일백십이척칠촌구현화일백삼십오척이촌문구고현

원문; 句股和一百十二尺七寸句弦和一百三十五尺二寸問句股弦(圖解 p. 27)

문역; 구고의 화가 112척 7촌이오 구현의 화는 135척 2촌이다. 구 고 현을 묻는다.

답구오십오척오촌(答句五十五尺五寸)

고오십칠척이촌(股五十七尺二寸)

현칠십구척칠촌(弦七十九尺七寸)

해법 음; 술왈양화각자승상감여위실양화상감배지위종이일위우평방개득구이구감구고화여위고이고감고현화여위현

원문; 術曰兩和各自乘相減餘爲實兩和相減倍之爲從以一爲隅平方開得句以句減句股和餘爲股以股減股弦和餘爲弦

문역; 술수가 가라사대 양화를 각기 자승하여 상감한 나머지를 실이라고 하고 양화를 상감하여 이를 배로 하여 종이라고 하고 1로써 우라고 하여 평방법으로 개방하면 구를 얻고 구로 구고화에서 감한 나머지는 고가 되고 고로 고현화에서 감하면 나머지는 현이다.///

역자 주; 구 고 현을 각 x y z 라고 하자.

해 1). 술왈에서 다음을 얻는다.

$$(z+x)^2 - (y+x)^2 = 135.2^2 - 112.7^2 = 5577.75 \cdots \text{실}$$

$$2\{(z+x) - (y+x)\} = 45 \cdots \text{중}$$

$$1 \cdots \text{우}$$

그러므로 $H(x)=x^2+45x-5,577.75=0$ 이 성립한다. $H(55.5)=0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$x=55.5, z=135.2-55.5=79.7, y=112.7-55.5=57.2////$$

해 2). 다음 관계가 성립한다.

$$x+y=112.7\cdots\textcircled{1}, x+z=135.2\cdots\textcircled{2}, z^2=x^2+y^2\cdots\textcircled{3}$$

①②→③하면 $(135.2-x)^2=x^2+(112.7-x)^2$, 즉 $H(x)=x^2+45x-5,577.75=0$ 이 성립한다.

$H(55.5)=0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$x=55.5, y=112.7-x=57.2, z=135.2-x=79.7 ////$$

문제 3. 음; 고헌화일백팔십사척구촌구고화일백이십칠척일촌문구고현

원문; 股弦和一百八十四尺九寸句股和一百二十七尺一寸問句股弦(圖解 p. 28)

문역; 고헌의 화가 184.9척이오 구고의 화가 127.1척이다. 구고현을 묻는다.

답구삼십팔척칠촌(答句三十八尺七寸)

고팔십팔척사촌(股八十八尺四寸)

현구십육척오촌(弦九十六尺五寸)

해법 음; 술알양화각자승상감위실양화상감배지위중이일위우평방개득고이고감구고화즉구이고 감고현화즉현

원문; 術曰兩和各自乘相減爲實兩和相減倍之爲從以一爲隅平方開得股以股減句股和卽句以股減股弦和卽弦

문역; 술수가 가라사대 두화를 각기 자승하고 상감하여 실이라고 하고 양화를 서로 감하고 이를 배로 하여 중이라고 하고 1로써 우라고 하여 평방법으로 개방하면 고를 얻는다. 고로 구고화에서 감하면 즉 구이고 고로 고헌화에서 감하면 즉 현이다.///

역자 주; 구 고 현을 각 $x y z$ 라고 하자.

해 1). 그러면 다음을 얻는다.

$$(z+y)^2-(y+x)^2=184.9^2-127.1^2=18033.6\cdots\text{실}$$

$$2\{(z+y)-(y+x)\}=115.6\cdots\text{중}$$

$$1\cdots\text{우}$$

그러므로 다음이 성립한다.

$$H(y)=y^2+115.6y-18,033.6=0$$

$H(88.4)=0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$y=88.4, z=184.9-88.4=96.5, x=127.1-88.4=38.7////$$

해 2). 다음 관계가 성립한다.

$$y+z=184.9\cdots\textcircled{1}, \quad x+y=127.1\cdots\textcircled{2}, \quad z^2=x^2+y^2\cdots\textcircled{3}$$

①②→③하면 $(184.9-y)^2=(127.1-y)^2+y^2$, 즉 다음이 성립한다.

$$H(y)=y^2+115.6y-18033.6=0$$

$H(88.4)=0$ 이므로, 다음을 얻는다.

$$y=88.4, \quad z=184.9-y=96.5, \quad x=127.1-y=38.7////$$

문제 4. 음; 구현화십육척팔촌이분구고차삼척사촌삼분문구고현

원문; 句弦和十六尺八寸二分句股差. 三尺四寸三分問句股弦(圖解 p. 29)

문역; 구현의 화가 16척 8촌 2분이오 구고차는 3척 4촌 3분이다. 구 고 현을 묻는다.

답구오척팔촌오분(答句五尺八寸五分)
 고구척이촌팔분(股九尺二寸八分)
 현십척구촌칠분(弦十尺九寸七分)

해법 음; 술왈이차가화위고현화내용양화술

원문; 術曰以差加和爲股弦和乃用兩和術

문역; 술수가 가라사대 차로써 화에 더하면 고현화가 되고 이에 양화의 술수를 쓴다.

해설 음; 해득구고차위고고이차가화위고현화

원문; 解句得句股差爲股故以差加和爲股弦和

문역; 해설 구는 구고의 차를 얻어 고가 되는 고로 차로써 화에 더하면 고현화가 된다.

역자 주; 구 고 현을 각 $x y z$ 라고 하자.

해 1). 다음 관계를 얻는다.

$$z+x=16.82\cdots\textcircled{1}, \quad y-x=3.43\cdots\textcircled{2}, \quad (z+x)+(y-x)=z+y=20.25\cdots\textcircled{3}$$

①과 ③은 양화술이다. 다음을 얻는다.

$$2(z+y)(z+x)=(x+y+z)^2=681.21$$

따라서 $x+y+z=26.1$ 이므로 다음을 얻는다.

$$y=26.1-16.82=9.28, \quad x=y-3.43=5.85, \quad z=20.25-y=10.97////$$

해 2). $z+x=16.82\cdots\textcircled{1}$; $z+y=20.25\cdots\textcircled{2}$

$$\text{실}\cdots(z+y)^2+(z+x)^2=692.9749$$

$$\text{정염}\cdots 2[(z+y)+(z+x)]=74.14$$

$$\text{부우}\cdots 1$$

그러므로 다음이 성립한다.

$$H(z) = z^2 - 74.14z + 692.9749 = 0$$

$H(10.97) = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$z = 10.97, \quad x = 16.82 - z = 5.85, \quad y = x + 3.43 = 9.28 ///$$

해 3). 다음이 성립한다.

$$z + x = 16.82 \cdots \textcircled{1}, \quad y - x = 3.43 \cdots \textcircled{2}, \quad z^2 = x^2 + y^2 \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}\textcircled{2} \rightarrow \textcircled{3}$ 하면 $(16.82 - x)^2 = x^2 + (x + 3.43)^2$, 즉 다음이 성립한다.

$$H(x) = x^2 + 40.5x - 271.1475 = 0$$

$H(5.85) = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$x = 5.85, \quad z = 16.82 - x = 10.97, \quad y = x + 3.43 = 9.28$$

문제 5. 음; 고헌화십팔척사촌구분구현차삼척구촌이분문구고현

원문; 股弦和十八尺四寸九分句弦差三尺九寸二分問句股弦(圖解 p. 30)

문역; 구현의 화가 18척 4촌 9분이오 구 현의 차는 3척 9촌 2분이다. 구 고 현을 묻는다.

답구육척사촌오분(答句六尺四寸五分)

고팔척일촌이분(股八尺一寸二分)

현십척삼촌칠분(弦十尺三寸七分)

해법 음; 술왈이차감화위구고화

원문; 術曰以差減和爲句股和

문역; 술수가 가라사대 차로써 화에서 빼면 구고화가 된다.///

해설 음; 해현거구현차위구고이차감화위구고화

원문; 解弦去句弦差爲句故以差減和爲句股和

문역; 해설 현에서 구현차를 빼면 구가 되는 고로 차로써 화에서 빼면 구고화가 된다.///

역자 주; 구 고 현을 각 $x y z$ 라고 하자.

해 1). $z + y = 18.49 \cdots \textcircled{1}$, $z - x = 3.92 \cdots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2}; \quad y + x = 14.57 \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{실} \cdots (z + y)^2 - (y + x)^2 = 129.5952$$

$$\text{중} \cdots 2[(z + y) - (y + x)] = 7.84$$

$$\text{우} \cdots 1$$

그러므로 다음이 성립한다.

$$H(y) = y^2 + 7.84y - 129.5952 = 0$$

$H(8.12) = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$y = 8.12, \quad z = 18.49 - y = 10.37, \quad x = z - 3.92 = 6.45////$$

해 2). 다음이 성립한다.

$$z + y = 18.49 \cdots \textcircled{1}, \quad z - x = 3.92 \cdots \textcircled{2}, \quad z^2 = x^2 + y^2 \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}\textcircled{2} \rightarrow \textcircled{3}$ 하면 $z^2 = (z - 3.92)^2 + (18.49 - z)^2$, 즉 다음이 성립한다.

$$H(z) = z^2 - 44.82z + 357.2465 = 0$$

$H(10.37) = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$z = 10.37, \quad x = z - 3.92 = 6.45, \quad y = 18.49 - z = 8.12////$$

문제 6. 음; 구고화십삼척구촌삼분고현차이척팔촌팔분문구고현

원문; 句股和十三尺九寸三分股弦差二尺八寸八分問句股弦(圖解 p. 30)

문역; 구고의 화가 13척 9촌 3분이오 고 현의 차는 2척 8촌 8분이다. 구 고 현을 묻는다.

답구육척구촌육분(答句六尺九寸六分)

고육척구촌칠분(股六尺九寸七分)

현구척팔촌오분(弦九尺八寸五分)

해법 음; 술왈이차가화위구현화

원문; 術曰以差加和爲句弦和

문역; 술수가 가라사대 차로써 화에 더하면 구현화가 된다.

해설 음; 해고득고현차위현고이차가화위구현화

원문; 解股得股弦差爲弦故以差加和爲句弦和

문역; 해설 고는 고현차를 얻어 현이 되는 고로 차로써 화에 더하면 구현화가 된다.

역자 주; 구 고 현을 각 $x y z$ 라고 하자.

해 1). 다음 관계가 성립한다.

$$y + x = 13.93 \cdots \textcircled{1}, \quad z - y = 2.88 \cdots \textcircled{2}, \quad \textcircled{1} + \textcircled{2}; \quad z + x = 16.81 \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{3}$ 은 양화술이다.

$$\text{실} \cdots (z+x)^2 - (y+x)^2 = 88.5312$$

$$\text{종} \cdots 2[(z+x) - (y+x)] = 5.76$$

우...1

그러므로 다음이 성립한다.

$$H(x) = x^2 + 5.76x - 88.5312 = 0$$

$H(6.96) = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$x = 6.96, \quad y = 13.93 - x = 6.97, \quad z = y + 2.88 = 9.85///$$

해 2). 다음 관계가 성립한다.

$$x + y = 13.93 \cdots \textcircled{1}, \quad z - y = 2.88 \cdots \textcircled{2}, \quad z^2 = x^2 + y^2 \cdots \textcircled{3}$$

①②→③하여 x 와 z 를 소거하면 다음을 얻는다.

$$H(y) = y^2 - 33.62y + 185.7505 = 0$$

$H(6.97) = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$y = 6.97, \quad z = y + 2.88 = 9.85, \quad x = 13.93 - y = 6.96////$$

문제 7. 음; 구현화십육척팔촌이분고현차일척이촌일분문구고현

원문; 句弦和十六尺八寸二分股弦差一尺二寸一分問句股弦(圖解 p. 31)

문역; 구현의 화가 16척 8촌 2분이오 고현차는 1척 2촌 1분이다. 구 고 현을 묻는다.

답구오척일촌칠분(答句五尺一寸七分)

고십척사촌사분(股十尺四寸四分)

현십일척육촌오분(弦十一尺六寸五分)

해법 음; 술왈이차감화위구고화

원문; 術曰以差減和爲句股和

문역; 술수가 가라사대 차로써 화에서 빼면 구고화가 된다.

해설 음; 해현거고현차위고고이차감화위구고화

원문; 解弦去股弦差爲股故以差減和爲句股和

문역; 해설 현에서 고현차를 빼면 고가 되는 고로 차로써 화에서 빼면 구고화가 된다.

역자 주; 구 고 현을 각 x y z 라고 하자.

해 1). 다음 관계가 성립한다.

$$z + x = 16.82 \cdots \textcircled{1}, \quad z - y = 1.21 \cdots \textcircled{2}, \quad \textcircled{1} - \textcircled{2}; \quad y + x = 15.61 \cdots \textcircled{3}$$

①과 ③은 양화술이다.

$$\text{실} \cdots (z+x)^2 - (y+x)^2 = 39.2403$$

$$\text{중}\cdots 2[(z+x)-(y+x)]=2.42$$

$$\text{우}\cdots 1$$

그러므로 다음이 성립한다.

$$H(x)=x^2+2.42x-39.2403=0$$

$H(5.17)=0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$x=5.17, z=16.82-x=11.65, y=z-1.21=10.44////$$

해 2). 다음 관계가 성립한다.

$$z+x=16.82\cdots\textcircled{1}, z-y=1.21\cdots\textcircled{2}, z^2=x^2+y^2\cdots\textcircled{3}$$

①②→③하면 다음을 얻는다.

$$H(z)=z^2-36.06z+284.3765=0$$

$H(11.65)=0$ 이므로, $z=11.65$ 이고 다음을 얻는다.

$$x=16.82-z=5.17, y=z-1.21=10.44////$$

문제 8. 음; 고휘화이십사척영일분구고차칠척일촌구분문구고현

원문; 股弦和二十四尺零一分句股差七尺一寸九分問句股弦(圖解 p. 32)

문역; 고휘의 화가 24척 01분이오 구고차는 7척 1촌 9분이다. 구 고 현을 묻는다.

답구사척사촌일분(答句四尺四寸一分)

고십일척육촌(股十一尺六寸)

현십이척사촌일분(弦十二尺四寸一分)

해법 음; 술왈이차감화위구현화

원문; 術曰以差減和爲句弦和

문역; 술수가 가라사대 차로써 화에서 빼면 구현화가 된다.

해설 음; 해고거구고차위구고이차감화위구현화

원문; 解股去句股差爲句故以差減和爲句弦和

문역; 해설 고에서 구고차를 빼면 구가 되는 고로 차로써 화에서 빼면 구현화가 된다.

역자 주; 구 고 현을 각 $x y z$ 라고 하자.

해 1). 다음 관계가 성립한다.

$$z+y=24.01\cdots\textcircled{1}, y-x=7.19\cdots\textcircled{2}, \textcircled{1}-\textcircled{2}; z+x=16.82\cdots\textcircled{3}$$

①과 ③은 양화술이다. 다음을 얻는다.

$$2(z+y)(z+x)=(x+y+z)^2=807.6964, \quad x+y+z=28.42\cdots\textcircled{4}$$

④-①하면 $x=4.41$ 이고, ④-③하면 $y=11.6$ 이며 다음을 얻는다.

$$z=28.42-(y+x)=12.41///$$

해 2). 실 $\cdots(z+y)^2+(z+x)^2=859.3925$

$$\text{정염}\cdots 2[(z+y)+(z+x)]=81.66$$

$$\text{부우}\cdots 1$$

그러므로 다음이 성립한다.

$$H(z)=z^2-81.66z+859.3925=0$$

$H(12.41)=0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$z=12.41, \quad y=24.01-z=11.6, \quad x=y-7.19=4.41///$$

해 3). 다음 관계가 성립한다.

$$z+y=24.01\cdots\textcircled{1}, \quad y-x=7.19\cdots\textcircled{2}, \quad z^2=x^2+y^2\cdots\textcircled{3}$$

①② \rightarrow ③하면, $(24.01-y)^2=(y-7.19)^2+y^2$, 즉 다음을 얻는다.

$$H(y)=y^2+33.64y-524.784=0$$

$H(11.6)=0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$y=11.6, \quad z=24.01-y=12.41, \quad x=y-7.19=4.41////$$

문제 9. 음; 구고화일백삼척일촌구현차삼십삼척팔촌문구고현

원문; 句股和一百三尺一寸句弦差三十三尺八寸問句股弦(圖解 p. 32)

문역; 구고화가 103척 1촌이오 구 현의 차가 33척 8촌이다. 구 고 현을 묻는다.

답구 사십척칠촌(答句四十尺七寸)

고육십이척사촌(股六十二尺四寸)

현칠십사척오촌(弦七十四尺五寸)

해법 음; 술왈이차감화위고현화

원문; 術曰以差加和爲股弦和

문역; 술수가 가라사대 차로써 화에 더하면 고현화가 된다.

해설 음; 해구득구현차위현고이차가화위고현화

원문; 解句得句弦差爲弦故以差加和爲股弦和

문역; 해설 구는 구현차를 얻어 현이 되는 고로 차로써 화에 더하면 고현화가 된다.

역자 주; 구 고 현을 각 x y z 라고 하자.

해 1). 다음 관계가 성립한다.

$$y+x=103.1\cdots\textcircled{1}, \quad z-x=33.8\cdots\textcircled{2}, \quad \textcircled{1}+\textcircled{2}; \quad z+y=136.9\cdots\textcircled{3}$$

①과 ③은 양화술이다.

$$\text{실}\cdots(z+y)^2-(y+x)^2=8,112$$

$$\text{종}\cdots 2[(z+y)-(y+x)]=67.6$$

$$\text{우}\cdots 1$$

그러므로 다음이 성립한다.

$$H(y)=y^2+67.6y-8,112=0$$

$H(62.4)=0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$y=62.4, \quad x=103.1-y=40.7, \quad z=x+33.8=74.5///$$

해 2). 다음 관계가 성립한다.

$$y+x=103.1\cdots\textcircled{1}, \quad z-x=33.8\cdots\textcircled{2}, \quad z^2=x^2+y^2\cdots\textcircled{3}$$

①②→③이므로 $(x+33.8)^2=x^2+(103.1-x)^2$, 즉 다음이 성립한다.

$$H(x)=x^2-237.8x+9,487.17=0$$

$H(40.7)=0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$x=40.7, \quad z=x+33.8=74.5, \quad y=103.1-x=62.4////$$

문제 10. 음; 구현화떡병고현화떡공이천팔백육십척이일지운구고차십육척일촌문구고현

원문; 句弦和竊併股弦和竊共二千八百六十尺二一只云句股差十六尺一寸問句股弦(圖解 p. 161)

문역; 구현화떡과 고현화떡을 합하면 2,860.21척이다. 다만 구고차는 16척 1촌이라고 한다. 구 고 현을 묻는다.

답구육척(答句六尺)

고이십이척일촌(股二十二尺一寸)

현이십이척구촌(弦二十二尺九寸)

해법 음; 술왈차자승이감공떡여반지위실이차위종일위우평방개득구현화가차즉고현화용전양화술

원문; 術曰差自乘以減共竊餘半之爲實以差爲從一爲隅平方開得句弦和加差卽股弦和用前兩和術

문역; 술수가 가라사대 구고차를 제공하여 공떡에서 빼고 이를 반으로 하여 실이 되고 차는 종이 되고 1은 우가 되어 평방법으로 개방하면 구현의 화를 얻는다. 차를 더하면 즉 고현화이다. 앞의 양화의 술수를 쓴다.///

역자 주; 구 고 현을 각 x y z 라고 하자.

해 1). 다음 관계가 성립한다.

$$(x+z)^2 + (y+z)^2 = 2860.21 \cdots \textcircled{1}, \quad y-x = 16.1 \cdots \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{2}[(x+z)^2 + (y+z)^2 - (y-x)^2] = \frac{1}{2}(2860.21 - 259.21) = 1300.5 \cdots \text{실}$$

그러므로 다음을 얻는다.

$$x+y+z = 51 \cdots \textcircled{3}$$

③→①하면 다음을 얻는다.

$$(51-y)^2 + (51-x)^2 = 2860.21 \cdots \textcircled{4}$$

②→④하면 $(34.9-x)^2 + (51-x)^2 = 2860.21$ 이므로 다음이 성립한다.

$$H(x) = x^2 - 85.9x + 479.4 = 0$$

$H(6) = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$x = 6, \quad y = 22.1, \quad z = 22.9 \text{////}$$

해 2). 실 $\cdots (x+z)^2 + (y+z)^2 = 2,860.21$

$$\text{정염} \cdots 2[(x+z) + (y+z)] = 147.8$$

$$\text{부우} \cdots 1$$

그러므로 $H(z) = z^2 - 147.8z + 2860.21 = 0$ 이 성립한다. $H(22.9) = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$z = 22.9, \quad x = 6, \quad y = 22.1 \text{////}$$

해 3). 다음 관계가 성립한다.

$$(z+x)^2 + (z+y)^2 = 2,860.21 \cdots \textcircled{1}, \quad y-x = 16.1 \cdots \textcircled{2}, \quad z^2 = x^2 + y^2 \cdots \textcircled{3}$$

③, ②→①하면 다음을 얻는다.

$$H(x+z) = (x+z)^2 + 16.1(x+z) - 1300.5 = 0$$

$H(28.9) = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$x+z = 28.9 \cdots \textcircled{4}$$

④, ②→③하면 $G(x) = x^2 + 90x - 576 = 0$ 이 성립한다. $G(6) = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$x = 6, \quad y = x + 16.1 = 22.1, \quad z = 28.9 - x = 22.9 \text{////}$$

문제 * 11. 음; 구현화떡병구고화떡공이천삼백오십일척칠팔(*이천삼백오십일척칠팔→오천영구십이척팔이)지운고현차오척문구고현

원문; 句弦和羃併句股和羃共二千三百五十一尺七八(*二千三百五十一尺七八→五千零九十二尺八二)只云股弦差五尺問句股弦(圖解 p. 163)

문역; 구현화떡과 구고화떡을 합하면 2351.78척이다. 다만 고현차는 5척이다. 구 고 현을 묻는다. (교정문역). 구현화떡과 구고화떡을 합하면 5092.82척이다. 다만 고현차는 5척이라고 한다. 구 고 현을 묻는다.

답구십팔척(答句十八尺)

고이십구척구분(股二十九尺九寸)

현삼십사척구촌(弦三十四尺九寸)

해법 음; 술왈차자승이감공역여반지위실이차위종일위우평방개득구고화가차즉구현화용전양화술

원문; 術曰差自乘以減共冪餘半之爲實以差爲從一爲隅平方開得句股和加差則句弦和用前兩和術

문역; 술수가 가라사대 차(고현의 차)를 자승하여 공역에서 감한 나머지를 반으로 하여 실이라 하고 차는 종이 되고 1은 우가 되어 평방법으로 개방하면 구고화를 얻는다. 차를 더하면 즉 구현화이다. 앞의 양화의 술수를 쓴다.///

역자 주; 구 고 현을 각 $x y z$ 라고 하자.

해 1). 다음 관계가 성립한다.

$$(x+z)^2 + (x+y)^2 = 5092.82 \cdots \textcircled{1}, \quad z-y=5 \cdots \textcircled{2} \cdots \text{종}, \quad 1 \cdots \text{우}$$

$$\frac{1}{2}[(x+z)^2 + (x+y)^2 - (z-y)^2] = \frac{1}{2}(5092.82 - 25) = 2533.91 \cdots \text{실}$$

그러므로 $H(x+y) = (x+y)^2 + 5(x+y) - 2533.91 = 0$ 이 성립한다.

$H(47.9) = 0$ 이므로, $x+y=47.9$ 이고 $x+z=52.9$ 이다.

양화술을 써서 다음을 얻는다.

$$(x+z)^2 - (x+y)^2 = 504 \cdots \text{실}$$

$$2[(x+z) - (x+y)] = 10 \cdots \text{종}$$

1...우

그러므로 $H(x) = x^2 + 10x - 504 = 0$ 이 성립한다. $H(18) = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$x=18, \quad y=29.9, \quad z=34.9 \text{////}$$

해 2). 다음 관계가 성립한다.

$$(x+z)^2 + (x+y)^2 = 5092.82 \cdots \textcircled{1}, \quad z-y=5 \cdots \textcircled{2}, \quad z^2 = x^2 + y^2 \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2} \rightarrow \textcircled{1}$ 하면 다음을 얻는다.

$$H(x+y) = (x+y)^2 + 5(x+y) - 2533.91 = 0$$

$H(47.9) = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$x+y=47.9 \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{4}, \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{3}$ 하면 다음을 얻는다.

$$G(y) = y^2 - 105.8y + 2,269.41 = 0$$

$G(29.9) = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$y=29.9, \quad z=34.9, \quad x=18 \text{////}$$

문제 12. 음; 고현화역병구고화역공이만칠천일백칠십팔(*칠십팔→팔십칠)척이이지윤구현차

사십오척문구고현

원문; 股弦和冪併句股和冪共二萬七千一百七十八(*七十八→八十七)尺二二只云句弦差四十一 五尺問句股弦(圖解 p. 163)

문역; 고현화역과 구고화역을 합하면 27187.22척이다. 다만 구현차는 45척이라 한다. 구 고 현을 묻는다.

답구이십오척구촌(答句二十五尺九寸)
 고육십육척(股六十六尺)
 현칠십척구촌(弦七十尺九寸)

술해 음; 술왈공역내감차역여반지위실이차위종일위우평방개득구고화가차즉고현화용진양화술

원문; 術曰共冪內減差冪餘半之爲實以差爲從一爲隅平方開得句股和加差卽股弦和用前兩和術

문역; 술수가 가라사대 공역에서 차역을 내감한 나머지를 반으로 하여 실이라고 하고 차로 써 종이라고 하고 1은 우가 되어 평방법으로 개방하면 구고화를 얻는다. 차를 가하는 즉 고 현의 화이다. 앞의 양화의 술수를 쓴다.

역자 주; 구 고 현을 각 x y z 라고 하자

해 1). 다음 관계가 성립한다.

$$(y+z)^2 + (x+y)^2 = 27187.22 \dots \textcircled{1}$$

$$z-x = 45 \dots \textcircled{2} \dots \text{중}$$

1...우

$$\frac{1}{2}[(y+z)^2 + (x+y)^2 - (z-x)^2] = \frac{1}{2}(27187.22 - 2025) = 12,581.11 \dots \text{실}$$

$$H(x+y) = (x+y)^2 + 45(x+y) - 12581.11 = 0$$

$H(91.9) = 0$ 이므로, $x+y = 91.9$ 이고 $y+z = 136.9$ 이다.

이제 양화술을 쓰자. 즉 다음과 같다고 하자.

$$(y+z)^2 - (y+x)^2 = 10,296 \dots \text{실}$$

$$2[(y+z) - (y+x)] = 90 \dots \text{중}$$

1...우

그러면 다음이 성립한다.

$$H(y) = y^2 + 90y - 10,296 = 0$$

$H(66) = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$y = 66, \quad x = 25.9, \quad z = 70.9 \text{////}$$

해 2). 다음 관계가 성립한다.

$$(y+z)^2 + (x+y)^2 = 27187.22 \dots \textcircled{1}, \quad z-x = 45 \dots \textcircled{2}, \quad z^2 = x^2 + y^2 \dots \textcircled{3}$$

①←②하면 다음을 얻는다.

$$H(x+y) = (x+y)^2 + 45(x+y) - 12581.11 = 0$$

$H(91.9) = 0$ 이므로, 다음을 얻는다.

$$x+y = 91.9 \dots \textcircled{4}$$

이제 ②,④→③하면 다음을 얻는다.

$$H'(x) = x^2 - 273.8x - 6420.61 = 0$$

$H'(25.9) = 0$ 이므로, $x = 25.9$ 이고 다음을 얻는다.

$$y = 91.9 - x = 66, z = x + 45 = 70.9 \text{////}$$

문제* 13. 음; 구현화막감고현화막여육백칠십이척팔이(*이→일)지윤구고차사척일촌문구고현

원문; 句弦和冪減股弦和冪餘六百七十二尺八二(*二→一)只云句股差四尺一寸問句股弦(圖解 p. 164)

문역; 구현화막을 고현화막에서 감하면 나머지가 672.81척이다. 다만 구고차는 4척 1촌이라 한다. 구 고 현을 묻는다.

답구삼십일척구촌(答句三十一尺九寸)

고삼십육척(股三十六尺)

현사십팔척일촌(弦四十八尺一寸)

해법 음; 술왈여막내감차막여반지위실이차위법제실득구현화가차즉고현화용전양화술

원문; 術曰餘冪內減差冪餘半之爲實以差爲法除實得句弦和加差卽股弦和用前兩和術

문역; 술수가 가라사대 여막에서 차막을 내감한 나머지를 반으로 하여 실이라고 하고 차로써 법이라고 하여 실을 나누면 구현화를 얻는다. 차를 더하면 즉 고현화이다. 앞의 양화의 술수를 쓴다.///

해설 음; 해여막즉구고차막일단구고차승구현화적이단고내감차막여반지위실이차위법제실득구현화

원문; 解餘冪卽句股差冪一段句股差乘句弦和積二段故內減差冪餘半之爲實以差爲法除得句弦和

문역; 해설 여막 즉 구고차막의 1단과 구현화에 구고차를 곱한 적 2단인 고로 차막을 내감하여 나머지를 반으로 하여 실이라고 하고 차로써 법이라고 하여 나누면 구현화를 얻는다.///

역자 주; 구 고 현을 각 $x y z$ 라고 하자

해 1). 다음 관계가 성립한다.

$$(y+z)^2 - (x+z)^2 = 672.81 \cdots \textcircled{1}, \quad y-x = 4.1 \cdots \textcircled{2} \cdots \text{법}$$

$$\text{실} \cdots \frac{1}{2} [(y+z)^2 - (x+z)^2 - (y-x)^2] = \frac{1}{2} (672.81 - 16.81) = 328$$

$$\text{실} \cdots (y-x)(z+x) = 328 \cdots \textcircled{3}$$

③ ÷ ② 하면 다음을 얻는다.

$$z+x = 80 \cdots \textcircled{4}$$

④ → ① 하면 $y+z = 84.1$ 이다.

따라서 양화술을 쓰면 다음과 같다.

$$(y+z)^2 + (x+z)^2 = 13,472.81 \cdots \text{실}$$

$$2[(y+z) + (x+z)] = 328.2 \cdots \text{정염}$$

1...부우

$$H(z) = z^2 - 328.2z + 13,472.81 = 0$$

$H(48.1) = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$z = 48.1, \quad y = 36, \quad x = 31.9 \text{////}$$

해 2). 다음 관계가 성립한다.

$$2(y+z)(x+z) - (x+y+z)^2 = 13,456 = 116^2$$

따라서 $x+y+z = 116$ 이므로 다음을 얻는다.

$$x = 31.9, \quad y = 36, \quad z = 48.1 \text{////}$$

해 3). 다음 관계가 성립한다.

$$(y+z)^2 - (x+z)^2 = 672.81 \cdots \textcircled{1}, \quad y-x = 4.1 \cdots \textcircled{2}, \quad z^2 = x^2 + y^2 \cdots \textcircled{3},$$

② → ① 하면 다음을 얻는다.

$$x+z = 80 \cdots \textcircled{4}$$

④, ② → ③ 하면 다음을 얻는다.

$$H(x) = x^2 + 168.2x - 6,383.19 = 0$$

$H(31.9) = 0$ 이므로, $x = 31.9$ 이고 이를 ②와 ④에 대입하면 다음을 얻는다.

$$y = x + 4.1 = 36, \quad z = 80 - x = 48.1 \text{////}$$

문제 14. 음; 구고화벽감구현화벽여칠백오십구척구구지운고현차사척구촌문구고현

원문; 句股和冪減句弦和冪餘七百五十九尺九寸云股弦差四尺九寸問句股弦(圖解 p. 165)

문역; 구고화벽을 구현화벽에서 감하면 나머지가 759.99척이다. 다만 고현차가 4척 9촌이라 한다. 구 고 현을 묻는다.

답구이십삼척일촌(答句二十三尺一寸)

고오십이척(股五十二尺)

현오십유척구촌(弦五十六尺九寸)

해법 음; 술알여떡내감차먹여반지위실이차위법제실득구고화가차즉구현화용전양화술

원문; 術曰餘幕內減差幕餘半之爲實以差爲法除實得句股和加差卽句弦和用前兩和術

문역; 술수가 가라사대 여떡에서 차먹을 내감하여 나머지를 반으로 하여 실로 놓고 차는 법이 되고 실을 나누면 구고화를 얻는다. 차를 더하면 즉 구현화이다. 앞의 양화의 술수를 쓴다.

역자 주; 구 고 현을 각 $x y z$ 라고 하자.

해 1). 다음 관계가 성립한다.

$$(x+z)^2 - (x+y)^2 = 759.99 \cdots \textcircled{1}$$

$$z-y = 4.9 \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{실} \cdots \frac{1}{2}[(x+z)^2 - (x+y)^2 - (z-y)^2] = \frac{1}{2}(759.99 - 24.01) = 367.99$$

$$\text{실} \cdots (x+z)(z-y) = 367.99 \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3} \div \textcircled{2}$ 하면 다음을 얻는다.

$$x+y = 75.1 \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{4} \rightarrow \textcircled{1}$ 하면 $x+z = 80$ 이다.

그러므로 양화술을 쓰면 다음과 같다.

$$(x+z)^2 - (x+y)^2 = 759.99 \cdots \text{실}$$

$$2[(x+z) - (x+y)] = 9.8 \cdots \text{중}$$

$$1 \cdots \text{우}$$

$$H(x) = x^2 + 9.8x - 759.99 = 0$$

$H(23.1) = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$x = 23.1, y = 52, z = 56.9 \text{////}$$

해 2). 다음 관계가 성립한다.

$$(x+z)^2 - (x+y)^2 = 759.99 \cdots \textcircled{1}, z-y = 4.9 \cdots \textcircled{2}, z^2 = x^2 + y^2 \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ 에서 다음을 얻는다.

$$x+y = 75.1 \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{4}, \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{3}$ 하면 다음을 얻는다.

$$H(y) = y^2 - 160y + 5616 = 0$$

$H(52) = 0$ 이므로, $y = 52$ 이고 이를 $\textcircled{2}$ 또는 $\textcircled{4}$ 에 대입하여 다음을 얻는다.

$$z = y + 4.9 = 56.9, x = 75.1 - y = 23.1 \text{////}$$

문제* 15. 음; 구현화떡내감구고화떡여오천영육십사척팔삼(*오천영육십사척팔삼→팔십사척)

지운구현차삼십육척일촌문구고현

원문; 句弦和幕內減句股和幕餘五千零六十四尺八三(*五千零六十四尺八三→八十四尺)只云句(구

→고)弦差三十六尺一寸問句股弦(圖解 p. 166)

문역; 구현화역의 내에서 구고화역을 감한 나머지는 5064.83(84)척이다. 다만 句(句→股)현차가 36척 1촌이라고 한다. 구 고 현을 묻는다.

답구팔척사촌(答句八尺四寸)

고사십삼척칠촌(股四十三尺七寸)

현사십사척오촌(弦四十四尺五寸)

해법 음; 술왈여떡내감차떡여반지위실이차위법제실득구고화가차즉고현화용전양화술

원문; 術曰餘幕內減差幕餘半之爲實以差爲法除實得句股和加差卽股弦和用前兩和術

문역; 술수가 가라사대 여떡에서 차떡을 내감한 나머지를 반으로 하여 실이라고 하고 차는 법이 되어 실을 나누면 구고화를 얻는다. 차(구현차)를 더하는 즉 고현화이다. 앞의 양화의 술수를 쓴다.

역자 주; 우선 구 고 현을 각 $x y z$ 라고 하자.

해 1). 양화술로 $x < y < z$ 를 만족시키는 $x y z$ 는 없다.////

해 2). 양화술로 $y < x < z$ 를 만족시키는 $z - x = 36.1 \rightarrow z - y = 36$ 이면 구한 답과 같다. 즉

$$(x+z)^2 - (x+y)^2 = 5064.83 \cdots \textcircled{1}, \quad z-y=36.1 \cdots \textcircled{2} \cdots \text{법}$$

$$\text{실} \cdots \frac{1}{2}[(x+z)^2 - (x+y)^2 - (z-y)^2] = \frac{1}{2}(5064.83 - 1303.21) = 1880.81$$

$$\text{실} \cdots (z-y)(y+x) = 1880.81 \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3} \div \textcircled{2}$ 하면 $x+y=52.1$ 이므로 $x+z=88.2$ 이다.

그러므로 양화술을 쓰면 다음과 같다.

$$(x+z)^2 - (x+y)^2 = 5064.83 \cdots \text{실}$$

$$2[(x+z) - (x+y)] = 72.2 \cdots \text{중}$$

$$1 \cdots \text{우}$$

$$H(x) = x^2 + 72.2x - 5064.83 = 0$$

$H(43.7) = 0$ 이므로, 다음을 구한다.

$$x=43.7, \quad y=8.4, \quad z=44.5 \text{////}$$

해 3). 다음 관계가 성립한다.

$$(x+z)^2 - (x+y)^2 = 84 \cdots \textcircled{1}, \quad z-x=36.1 \cdots \textcircled{2}, \quad z^2 = x^2 + y^2 \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1} \leftarrow \textcircled{2}$ 하면 다음을 얻는다.

$$3x^2 + 144.4x + 1219.21 - y^2 = 2xy \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{2} \rightarrow \textcircled{3}$ 하면 다음을 얻는다.

$$y^2 = 72.2x + 1,303.21 \cdots \textcircled{5}$$

⑤→④하면 다음을 얻는다.

$$y = (3x^2 + 72.2x - 84) / 2x \cdots \textcircled{6}$$

⑥→⑤하면 다음을 얻는다.

$$H(x) = 9x^4 - 144.4x^3 - 504x^2 - 12129.6x + 7056 = 0$$

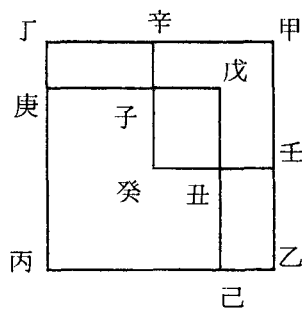
$H(8.4) = 0$ 이므로 $x = 8.4$ 이고, 이를 ⑤와 ②에 대입하면 각각 다음을 얻는다.

$$y = 43.7, \quad z = x + 36.1 = 44.5 \text{ ///}$$

3. 가까운 이웃 문제(현화교)

음; 도해갑을병정현자승방내감무기병경고자승방소여갑을기무경정경절형즉여갑임계신구자승방등을기여정경개위고현교임을여신정개위구현교이임을기축여신자경정위고현교승구현교적이단여무축계자현화교떡등 「갑을기무경정경절형여위무축계자정방형동시구자승적내소감기동즉소여필등」 고양차상승(2)배지개평방득현화교가축기구현교급신자고현교고현교위현야

원문; 圖解甲乙丙丁弦自乘方內減戊己丙庚股自乘方所餘甲乙己戊庚丁磬折形即與甲壬癸辛句自乘方等乙己與丁庚皆爲股弦較壬乙與辛丁皆爲句弦較而壬乙己丑與辛子庚丁爲股弦較乘句弦較積二段與戊丑癸子弦和較幕等 「甲乙己戊庚丁磬折形內減甲壬丑戊子辛磬折形餘爲壬乙己丑辛子庚丁二長方甲壬癸辛正方形內減甲壬丑戊子辛磬折形餘爲戊丑癸子正方形同是句自乘積內所減既同則所餘必等」 故兩差相乘倍之開平方得弦和較加丑己句弦較及辛子股弦較爲弦也



위의 그림에서 甲乙 = 을병 = 병정 = 정갑 = z , 戊己 = 기병 = 병경 = 경무 = y , 甲壬 = 임계 = 계신 = 신갑 = x 라고 하면, □갑을병정 - □무기병경 = 경절형; 갑을기무경정 = □갑임계신, 즉 $z^2 - y^2 =$ 꺾쇠형의 면적 = x^2 이다.

壬乙 = 축기 = 신정 = 자경 = 구현교 = $z - x$, 정경 = 신자 = 임축 = 을기 = 고현교 = $z - y$ 이다. 그러므로 $(x + y - z)^2 = 2(z - y)(z - x)$ 이다. 따라서 $y + x - z = \sqrt{2(z - y)(z - x)}$ 이 된다.

문역; 그림의 해설 갑을병정은 현자승의 정방적이오 무기병경의 고의 자승방적을 내감하면 남는바는 갑을기무경정의 경절형이오 즉 갑임계신 구의 자승 방적과 같고 을기는 정경과 더불어 고현교가 되고 임을은 신정과 더불어 모두가 구현교이오 임을기축은 신자경정(신정경자)과 더불어 고현교 승구현교의 적이 되고 2단은 무축계자 현화교의 멍과 같다. 「갑을기무경정의 경절형은 갑임축무자신의 경절형을 내감하면 나머지 임을기축과 신자경정의 2장방은 갑임계신의 정방형 내에서 갑임축무자신의 경절형을 감하면 나머지는 무축계자의 정방형에 같게 되는 이것이다. 구 자승의 적 내에 이미 같은 것을 감하는 바는 즉 나머지가 반드시 같다.」 그러므로 양차를 상승 이를 (2)배로 하여 평방법으로 개방하면 현화교를 얻고 기축의 구현교 및 신자의 고현교를 가하면 현이 되느니라.

원문; 圖解甲乙丙丁弦自乘方內減戊己丙庚股自乘方所餘甲乙己戊庚丁磬折形卽與甲壬癸辛句自乘方等乙己與丁庚皆爲股弦較壬乙與辛丁皆爲句弦較而壬乙己丑與辛子庚丁爲股弦較乘句弦較積二段與戊丑癸子弦和較筭等 「甲乙己戊庚丁磬折形內減甲壬丑戊子辛磬折形餘爲壬乙己丑辛子庚丁二長方甲壬癸辛正方形內減甲壬丑戊子辛磬折形餘爲戊丑癸子正方形同是句自乘積內所減既同則所餘必等」故兩差相乘(2)倍之開平方得弦和較加丑己句弦較及辛子股弦較爲弦也

문제 16. 음; 구현차사척오촌고현차삼척육촌일분문구고현

원문; 句弦差四尺五寸股弦差三尺六寸一分問句股弦(圖解 p. 56)

문역; 구현차의 차가 4척 5촌이고 고현의 차가 3척 6촌 1분이다. 구 고 현을 묻는다.

답구구척삼촌일분(答句九尺三寸一分)
고십척이촌(股十尺二寸)
현십삼척팔촌일분(弦十三尺八寸一分)

역자 주; 구 고 현을 각 x y z 라고 하면 다음 관계가 성립한다.

$$z-x=4.5\cdots\textcircled{1}, \quad z-y=3.61\cdots\textcircled{2}$$

$$*2(z-y)(z-x)=(x+y-z)^2=2\times 3.61\times 4.5=32.49=5.7^2$$

그러므로 다음을 얻는다.

$$x+y-z=5.7\cdots\textcircled{4}$$

①+④하면 $y=10.2$ 이고, ②+④하면 $x=9.31$ 이므로 다음을 얻는다.

$$z^2=x^2+y^2=86.6761+104.04=190.7161=13.81^2, \quad z=13.81\text{//}$$

문제 17. 음; 구고차십칠척오촌일분구현차십팔척문구고현

원문; 句股差十七尺五寸一分句弦差十八尺問句股弦(圖解 p. 58)

문역; 구고의 차가 17척 5촌 1분이오 구현의 차는 18척이다. 구 고 현을 묻는다.

답구사척육촌구분(答句四尺六寸九分)
 고이십이척이촌(股二十二尺二寸)
 현이십이척육촌구분(弦二十二尺六寸九分)

역자 주; 구 고 현을 각 x y z 라고 하면 관계가 성립한다.

$$y-x=17.51\cdots\textcircled{1}, \quad z-x=18\cdots\textcircled{2}$$

②-①하면 다음을 얻는다.

$$z-y=0.49\cdots\textcircled{3}$$

②와 ③에서 다음을 얻는다.

$$2(z-y)(z-x)=(x+y-z)^2=2\times 0.49\times 18=17.64=4.2^2$$

그러므로 다음이 성립한다.

$$x+y-z=4.2\cdots\textcircled{4}$$

②+④하면 $y=22.2$ 이고, ③+④하면 $x=4.69$ 이므로 다음을 얻는다.

$$z^2=x^2+y^2=4.69^2+22.2^2=21.9961+492.84=514.8361=22.69^2, \quad z=22.69////$$

문제 18. 음; 구고차오척이촌구분고현차이척문구고현.

원문; 句股差五尺二寸九分股弦差二尺問句股弦(圖解 p. 58)

문역; 구고의 차가 5척 2촌 9분이오 고현의 차가 2척이다. 구 고 현을 묻는다.

답구칠척사촌(答句七尺四寸)
 고십이척육촌구분(股十二尺六寸九分)
 현십사척육촌구분(弦十四尺六寸九分)

역자 주; 구 고 현을 각 x y z 라고 하면 다음 관계가 성립한다.

$$y-x=5.29\cdots\textcircled{1}, \quad z-y=2\cdots\textcircled{2}$$

①+②하면 다음을 얻는다.

$$z-x=7.29\cdots\textcircled{4}$$

②와 ④에서 다음을 얻는다.

$$2(z-y)(z-x)=(x+y-z)^2=2\times 2\times 7.29=29.16=5.4^2$$

그러므로 다음이 성립한다.

$$x+y-z=5.4\cdots\textcircled{5}$$

②+⑤하면 $x=7.4$ 이고, ④+⑤하면 $y=12.69$ 이므로 다음을 얻는다.

$$z^2=x^2+y^2=7.4^2+12.69^2=54.76+161.0361=215.7961=14.69^2, \quad z=14.69////$$

4. 결론

유씨구고술요도해에서 양화술이 중심에 선다고 본다. 전체의 224문중 거의 20개를 취급하고 있다. 그것도 2단계에서 말고 있다. 오류문제는 *표시를 하고 취급했다. 구고술에서 구가 고보다 작은 것이 철칙인데 문제 15는 구가 고보다 큰 수를 썼다. 서양에서는 번역을 튀긴 야생 딸기에 비유했다. 조선조의 말기에 여러 어려움을 겪는 중에 수학의 기록을 남겼다는 사실 자체만으로도 선대의 수학자들에게 고마움을 느낀다. 한글전용화 시대에 용어선택은 가급적 고전을 연구하는 학자들에게 편리한 용어를 골라 썼다. 이것이 문역의 변이다.

참고 문헌

1. 韓國科學技術史資料大系
2. 九章算術
3. 한국수학사학회지
4. 한국수학사학회 Colloquium, 매월 제3주 화(금) 17:00 한양여자대학 연구동 세미나실
5. 柳寅永, “默思集算法의 瑕疵,” 한국수학사학회지 제 12 권 제 2 호(1999), 63-68.
6. _____, “理藪新編의 管見.” 한국수학사학회지 제 13 권 제 1 호(2000), 27-32.
7. _____, “朝鮮王朝代의 秤法과 疋法,” 한국수학사학회지 제 13 권 제 2 호(2000), 23-32.
8. _____, “朝鮮王朝代 古,徽,密,新率의 圓 및 立圓積,” 한국수학사학회지 제 14 권 제 1 호(2001), 1-16.
9. _____, “朝鮮朝代의 高次方程式의 虛實,” 한국수학사학회지 제 14 권 제 2 호(2001), 1-12.
10. _____, “朝鮮朝代의 數學問題 取扱의 虛實(1),” 한국수학사학회지 제 15 권 제 1 호(2002), 57-68
11. _____, “朝鮮朝代 弧矢田積의 虛實과 三角函數表,” 한국수학사학회지 제 15 권 제 3 호(2002), 1-16
12. _____, “朝鮮朝代의 數學問題取扱의 虛實(2),” 한국수학사학회지 제 16 권 제 2 호(2003), 1-10.