KJHM Vol. 16, No. 2, 2003, 55-70

역사-발생적 접근을 통한 논증 기하 학습의 직관적 수준에 대한 고찰

건국대학교 수학교육과 **홍진곤**
서울대학교 대학원 **권석일**

Abstract

This study investigated the intuitive level of justification in geometry, as the former step to the aximatization, with concrete examples. First, we analyze limitations that the axiomatic method has in the context of discovery and the educational situation. This limitations can be supplemented by the proper use of the intuitive method. Then, using the histo-genetic analysis, this study shows the process of the development of geometrical thought consists of experimental, intuitive, and axiomatic steps. The intuitive method of proof which is free from the rigorous axiom has an advantage that can include the context of discovery. Finally, this paper presents the issue of intuitive proving that the three angles of an arbitrary triangle amount to 180°, as an example of the local systematization.

0. 서론

중학교 수학 교육과정 중 '8-나' 단계의 도형 영역은 "삼각형의 합동조건, 닮음조건을 이용하여 간단한 도형의 성질을 증명[1, p. 74]"하는 것을 핵심적인 학습 목표로 설정하고 있다. 여기에서 논의되는 '증명'은 일상적인 생활 언어에서 흔히 사용되는 정당화의 방법과는 구별되는, 연역적인 형식을 따르는 수학적인 증명을 의미한다. 그러나 공리적 방법에 의해 구성된 추상적인 구조를 일찍부터 가르치는데 대해서는 여러 가지 이의가 제기되어 온 것도 사실이다. 무엇보다 대부분의 중, 고등학교 학생들에게는 기성 수학 체계로서의 공리적 구조에 대한 피상적인 이해와 인식 이상을 기대하기 어렵고, 결국 학생들은 이해하지 못하는 많은 증명들을 단순히 외우며 그렇게 외운 정리를 자명한 진리로 믿을 가능성이 있다는 점이 가장 큰 문제로 지적되어 왔다. 기성의 공리 체계가 아니라 구체적 자료로부터 비형식적 이

론의 국소적 조직화, 전체적 조직화의 과정을 차례로 거치는 공리화의 과정을 학생들이 경험하도록 하는 것이 무엇보다 필요하지만, 기하의 공리적 구성은 매우 난해하며 여러 기하학적 명제들의 관련성에 대한 깊은 통찰을 요구한다는 것[7, p. 290]이 많은 어려움을 야기하게 되는 것이다.

논증 기하의 내용과 관련하여 본격적으로 다루게 되는 수학적 증명은 학생들이 이전까지 학습한 수학의 다른 내용들과 비교할 때 근본적인 수준의 차이가 있으며 수학에 대한 인식의 구조적인 변화를 요구하는 것임에도 불구하고, 증명에 대한 충분한 이해가 근본적인 어려움을 가지고 있어서 증명의 형식을 모방하거나 기억하는데 그치는 경우가 대부분이라면 증명을 구상하고 활용하거나 공리화의 경험에 이른다는 것은 더욱 기대하기 어려운 일이 된다. 이러한 문제 의식으로부터 지금까지 증명 지도의 개선을 위한 수많은 연구가 이루어져 온 바, 학생들이 증명 과정에서 자주 범하는 오류의 유형이나 증명의 구성 요소를 분석한 [2], [6], [13], [18], [23] 등의 연구, 증명 지도에서 직관적인 방법을 이용할 것을 주장한 [17] 등의 연구, 증명의 본질을 분석한 [3], [12] 등의 연구가 그 대표적인 것들이라 할 수 있다.

그러나 한편으로, 기하학이 연역적인 학문의 체계를 갖추게 된 데까지는 짧지 않은 역사적 과정과 인류의 노력이 필요하였다는 점에 주목한다면, 이러한 역사 발생적인 과정을 관찰하고 분석하는 것이 또한 논증과 관련한 기하 학습-지도에 독특한 시사를 얻을 수 있으리라는 기대가 가능할 것이다. 현재 중학교에서 다루어지는 논증 기하의 내용과 체계는 대부분 유클리드(Euclid)의 **원론**으로부터 그 핵심적인 아이디어가 기인하고 있는 것이지만, 여기에서 다루고 있는 많은 내용들은 **원론**에서 연역적인 형태로 체계화되기 훨씬 이전에도 사람들이 경험적, 또는 직관적으로 알고 있었을 뿐만 아니라 엄밀하지 못한 형식이나마 어느 정도의 '정당화'까지도 소박한 형태로 이루어졌음이 역사적으로 확인되고 있다. 이는 처음으로 공리적, 연역적인 수학적 증명을 학습하게 되는 학생의 입장에서도 마찬가지로, '엄밀한 논리'의 전 단계로 거칠 수 있는 '직관적 수준'을 교육적으로 고려할 수 있는 가능성을 시사하는 것으로 보인다.

본 연구는 이러한 점에 주목하여, 논증 기하의 학습에서 형식화된 증명을 도입하기 전에 이를 보완할 수 있는 직관적인 정당화 단계를 검토하고 분석해 보고자 한다. 이를 위하여, 인간의 경험적인 활동들이 논리적이고 학문적인 체계를 갖추게 되는 과정에서 직관이 상보적으로 기여하는 바를 고찰하고, 기하학의 역사 발생적 과정에서 관찰되는 직관적 수준의 내용 체계를 분석할 것이다. 또한 현행 교과서에서 다루고 있는 연역적 구조의 형식적 증명을 보완할 수 있는 직관적 수준의 정당화 방식을 대안적으로 고려하여 학생들의 증명 활동에 대한 스스로의 의미 부여를 돕는 방안을 모색할 것이다. 이는 [3]에서 지적하고 있는 것과 같은, 증명의 학습-지도가 정당화의 맥락 뿐 아니라 발견의 맥락까지도 통합되는 형태로 이루어져야 한다는 목표를 향한 시도이기도 하다.

1. 공리적 방법과 직관의 상보성

공리로부터 연역적으로 구성되는 체계를 추구하는 것이 수학의 주된 방법론으로 자리잡게 된 데에는 여러 가지 이유가 있을 것이지만, 그 중 가장 두드러진 것은 수학을 튼튼한 하나의 구조 아래 통합함으로써 논리적인 일관성을 구축하고 그에 따르는 확실성과 보편성을 획득하려는 의도에 기인하고 있다고 할 수 있다. 특히 이러한 입장은 부르바키(Bourbaki)가 현대 수학의 전체를 세 가지의 모구조로 구조화한 시도에서 대표적으로 나타난다.

> 아주 처음부터 부르바키는 공리적 방법에 확신을 가지고 이를 지지하였다. 비판도 있었지만 그들의 과제에 그것은 필수적이었다. 공리적 방법을 엄격하게 사용함으로써 부르바키는 다양한 분야의 수학에 완전히 새로운 질서를 이끌어내었다. 해석학, 미적분, 기하, 대수, 정수론 등의 전통적인 구분은 구조라는 개념으로 대체되었으며 구조 개념은 동형 사상의 개념으로 수학의 기초적인 분야를 분류할 수 있게 하였다([15], [28, p. 9]).

공리적 방법의 전형을 최초로 보여 주었던 유클리드의 **원론**이, 수학적 진리가 영속적인 본성을 지니며 감각적인 경험과는 독립적이라는 것을 가장 잘 보여줄 수 있는 형식을 추구하였다는 것은 부르바키의 이러한 의도와도 잘 부합되는 것이어서, 부르바키는 그들의 연구결과를 '기존의 수학적 지식을 포괄적이고 체계적으로 구성하는 기초'라는 의미로 **수학 원론**(Eléments de mathématique)이라고 명명하기까지 하였던 것이다.

공리적 방법을 옹호하는 주장의 두 번째 근거는 그것이 과학 공동체의 '의사소통'을 위해 필수적이라는 것이다. 이는 톰(R. Thom)이 [29]에서 부르바키의 '현대 수학'이 추구하는 엄밀성과 공리화가 갖는 문제점을 교육적, 철학적으로 강하게 비판한데 대한 듀돈네(J. Dieudonné)의 답변에서 잘 나타나 있다.

> 공통의 언어를 통한 수학자들간의 의사소통은 계속 유지되어야 하며 그러한 지식의 전달을 천재들에게만 독점적으로 맡길 수는 없다. 대부분의 경우, 그것은 톰의 말을 인용하면 '(그 증명을) 이해하도록 적당히 교육되고 준비된' 전문가들에게 위임된다. 그들의 대부분은 창조자의 뛰어난 직관을 가지지 못할 것이므로, 그들이 수학을 잘 이해하고 그것을 학생들에게 전달할 수 있는 유일한 방법은, 정의, 가정, 논증이 어떤 잘못된 이해라도 피할 수 있을 정도로 충분히 정확하고 가능한 오류와 함정이 필요할 때마다 지적될 수 있는 자료를 조심스럽게 제시하는 것뿐이다[16, p. 16].

이상적인 의사소통, 또는 학문의 핵심적인 구조를 학생들에게 올바르게 전달하기 위한 수단으로 공리적 방법을 고려하는 이러한 입장은, 수학 교육과정과 교수법에도 큰 영향을 끼쳤으며 브루너(J. Bruner)로 대표되는 구조주의적 교육철학에 연결되었다. 게다가, 부르바키가 주장하는 수학의 모구조와 유사한 인지 발생의 구조가 피아제(J. Piaget)에 의해 주장되었고, 브루너는 이러한 아이디어들을 바탕으로 교과의 구조를 강조한 것이다.

그러나 공리적 방법이 가지는 이와 같은 강점들은 교육적인 관점뿐만 아니라 수학 자체의 방법론과 관련하여서도 많은 비판을 받아 왔으며, 발생적 관점 또는 발견의 맥락이라는 대안적 접근 경로가 꾸준히 요청되어 왔다. 즉, 아리스토텔레스의 삼단논법에 의한 연역적 방법으로만 이루어진 유클리드와 부르바키의 **원론**들은 사실상 이미 알려져 있는 명제들을 체계화하는 데에만 유용한 방법론으로, 여기에서 담보하지 못하는 것은 기존의 지식이 새로운 영역으로 확장되고 성장하도록 하는 발견의 방법론이라는 것이다.

아놀드(A. Arnauld)는 [11, p.318]을 통하여 이러한 관점에서 유클리드의 방법론이 갖는 문제점들을 다음과 같이 지적하였다.

※ 증거와 명료성이 아닌, 확실성에만 전념한다.

※ 삼각형의 두 변의 길이의 합이 나머지 변보다 크다는 것과 같은, 너무나 당연한 것을 증명한다.

※ 구성적, 직접적 증명 대신 모순을 유도하여 증명한다.

※ 증명하기에 적절한 논리적 순서 외에는 자연스러운 다른 순서를 고려하지 않는다.

그런데 여기에서 아놀드가 말하는 '자연스러운 순서(order of nature)'란 주어진 지식에서 새로운 지식을 '발견'해 나가는 순서로 이해될 수 있겠으나, 한편으로 그것이 기존에 독립적으로 주어져 있는 자료들을 연결해주는 '논리적 순서'의 가치를 폄하하는 것으로 해석될 수는 없을 것이다. 그 두 과정은 기본적으로 상호 관계를 맺고 있고, 서로 필요조건이 되며 서로의 과정을 촉진하기도 하는 것이기 때문이다. 다만 중요한 것은, 서로 상보적인 관계에 있는 이러한 공리적 방법과 발견적 방법이 교수학적 상황에서도 변증법적으로 통합될 수 있는가 하는 문제일 것이다.

부르바키의 입장을 변호하는 듀돈네도 역시, 새로운 수학적 아이디어를 보다 명확하게 만들려는 시도 속에는 '직관'과의 상호작용이 그러한 발전을 가능하게 만드는 강력한 요소임을 분명히 지적하고 있는데[16, p. 17], 그의 주장에서 더욱 주목할 것은, 이러한 '직관'을 가지게 하는 것이 수학을 가르치는 궁극적인 목표라고까지 말하고 있다는 점이다.

어떤 수준에서든 수학을 가르치는 궁극적인 목적은 분명, 학생들이 다루어야 하는 수학적 대상에 대한 믿을만한 '직관'을 주는 것이다[16, p. 18].

결국 문제가 되는 것은, 너무 이른 시기 또는 관련된 직관이 충분히 갖추어지지 않은 상태에서 공리적인 방법이 제시되는 경우일 것이다. 직관은 뼈대로서의 논리적 '구조'에 '내용'을 제공하는 역할을 하며, 또한 반대로 형식화의 과정을 겪으면서 직관의 확실성과 명료함은 더욱 힘을 얻을 수 있다는 상보적인 관계가 수학의 교수-학습 상황에서는 항상 견지되어야 한다.

우리의 사유 과정이 형식적 논리만으로는 설명할 수 없는 다양한 요소들로 이루어진다는 것은 생리학적, 심리학적 연구에서도 계속 밝혀지고 있다. 인간의 고등 정보 처리를 담당하는 대뇌는 좌, 우의 반구로 나누어져 있고, 양쪽 뇌가 각각 서로 다른 기능을 수행하는데 우세하지만 서로를 연결하고 있는 '뇌량'이라는 구조 때문에 하나의 통합된 뇌의 기능을 수행하고 있다[8, p. 10]. 이러한 대뇌반구의 기능 분화 이론에 따르면, 좌뇌는 언어적, 논리적, 분석적, 선형적으로 정보를 처리하고, 우뇌는 시간-공간적, 유추적, 직관적, 종합적, 총체적, 동시적, 다중처리적으로 정보를 처리한다. 지금까지 논의한 공리적 방법, 즉 논리적 사고는 좌뇌적인 특징이며, 이에 비하여 직관적 사고는 우뇌적인 특징이라고 할 수 있다. 그러나 이와 같은 대뇌 반구의 기능 분화 이론에서도 강조되는 것은, 이렇게 흔히 구분되고 대조되는 성격으로 파악되는 사유 작용들도 결국은 서로 관련을 맺고 작용함으로써 하나의 통합된 뇌의 기능을 수행하고 있다는 점이다. 유재근에 따르면, 브룩스(L. Brooks), 클라우스마이어(H. Klausmeier), 베르하이머(M. Wertheimer), 듀이(J. Dewey) 등의 제 학자들이 논의하는 바람직한 사고 과정은 좌뇌와 우뇌를 균형 있게 사고하는 '전뇌적 사고'이다[8, pp. 20-23]. 클라우스마이어가 말하는 '수렴적 사고'는 문제의 해답을 추구하는 과정이 논리적으로 거의 필연적인 경로를 거치며 주어진 자료 중 정답 하나만을 택하는 형태이므로 좌뇌적 사고에 가깝고, '확산적 사고'는 당면한 문제 상황에서 개인 자신이 새롭고 독특하며 다양한 방법으로 융통성 있고 치밀하게 문제를 해결해내는 창의력이 요구되는 형태이므로 우뇌적 사고에 가깝다. 베르하이머는 이러한 두 가지 종류의 사고를 구분 짓지 않고 이들 모두를 사고라는 용어에 의하여 기술하고 있지만, 그가 '생산적 사고'라고 일컬었던 문제 해결 사고는 좌뇌적 사고와 우뇌적 사고가 교대로 또는 동시에 일어나는 '전뇌적 사고'라고 할 수 있다. 사실, 인간의 창조적인 과정은 아이디어를 떠올리고 이를 구체화시키고, 그 과정에서 다시 아이디어를 조정하고 다시 이를 구체화시키는 영원한 변증법적 과정이다. 비유클리드 기하학이나 칸토어(G. Cantor)의 실무한 개념과 관련된 발견이 보여주듯이 직관만으로는 확실성이 보장되지 않으나, 직관이 없는 진정한 창조적 활동도 가능하지 않은 것이다.

이러한 직관과 논리의 상보적 관계에 대해 박성택은 다음과 같이 기술하고 있다.

> 직관적 사고는 사고의 대상을 인지하는 활동으로서 다소 분명하지 않지만 전체를 감지할 수 있는 사고이다. 또한 이론 전개의 방향과 기틀을 마련해 주는 직관적 표상으로서 이론과 구체를 맺어주는 것이고, 또 구체에서 논리의 방향을 시사해 주는 것이다. 아동의 직관적 사고는 자기중심적이며 상징적이다. 초기에는 상징적 차원으로 옮겨진 감각 운동적 지능의 연장에 불과하므로 합리적 지능보다는 실용적 지능의 특징이 강하게 드러난다. 논리적 사고는 모든 사상에 대해서 감정적 또는 정서적인 생각이나 자기중심적인 생각을 떠나 인과관계라는 입장에서 미지의 사상의 연쇄를 발견하려는 심적인 기능을 발한다. 아동들에게 있어서는 직관적 스키마가 여러 가지의 조직적 구조들로 재조직됨에 따라 균형은 보다 안정된 수준으로 상승하고, 동화와 조절은 논리적 사고를 거쳐야 비로소 그 확실성을 보장받게 된다[4, pp. 29-30].

기하 학습의 상황에 있어서도, 도형의 성질에 대한 명제적 사고가 그 명제들의 논리적 관계에 대한 연역적 구조의 사고로 나아가는 것은 이미 반 힐레(van Hiele)가 지적하였듯이 수준의 질적인 도약을 함의하는 일이다. 이 때 학습자에게 단지 완성된 형식 논리의 구조를 제시하는 것뿐만 아니라 그 구조를 직관적으로 통찰할 수 있는 경험을 제공하는 것은 중요한 의미를 가질 것이다. 다음 장에서는 공리적 방법으로 구조화되지 않은 상태에서도 독립적으로 발달할 수 있었던 기하학의 모습을 역사 발생적으로 고찰하여 교수학적인 시사점을 모색하도록 하겠다.

2. 기하적 사고의 역사 발생적 고찰

인류가 오랜 기간 획득해 온 기하학의 많은 지식들이 유클리드의 **원론**과 같은 정합적이고 연역적인 체계를 가지게 되기까지는 여러 단계의 과정을 거쳐야 했음은 역사적으로 분석될 수 있다.

인간이 자연과 접촉하면서 자연에 적응하고 자연을 해석하는 활동이 인간의 행복에 점점 큰 의미를 가지게 될 때, 인간은 일단 초보적인 형태의 학문을 만들게 된다. 고대 이집트, 바빌로니아, 고대 중국의 사람들이 이룩했던 문명과 지식으로부터 이를 확인할 수 있는데, 예를 들어 피라미드와 같은 건축물은 정사각형의 밑면, 밑변의 두 배를 지름으로 하는 원의 둘레와 같은 높이, 정확한 방위를 가리키는 배치 등으로 보아 고대 이집트인의 상당한 평면 기하의 지식을 짐작하게 한다. 또한 기원전 1700년경의 것으로 알려진 한 파피루스에는 몇몇 평면도형의 넓이를 계산하는 공식이(그 중 일부는 잘못되었지만) 남아 있는 바, 이는 이집트인들이 그들의 기하학적 지식을 보존할 필요가 있다고 생각했음을 알게 해 주는 것이다[27, pp. 7-8]. 이 외에도, 바빌로니아 시대의 관료 교육에는 수메르 문법 및 문학과 더불어 수학이 기본 덕목으로 자리잡고 있었으며[24], 중국의 고대 수학 또한 책으로 엮일 만큼의 방대한 내용을 가지고 있었다[26].

그러나 이 시기의 기하학적 지식은 그 시대 사람들의 실용적인 요구를 만족시키기에는 충분하였지만 그 내용이 논리적인 정당성이나 정합적인 체계를 갖춘 학문의 모습으로까지는 나아가지 못하고 있었다. 이러한 점에서 이 시대의 기하학은 논리적인 정합성을 탐구하기 시작하는 다음 단계와 구별하여 '실험적 단계'의 기하학이라 부를 수 있을 것이다.

기하학적 지식이 논리적인 관점에서 최초로 연구되기 시작한 것은 그리스인들에 의해서였다. 유클리드의 **원론**이 쓰여진 것은 기원전 300년경으로 추정되지만, **원론**이 태어나기 전의 약 300여년 간은 탈레스(Thales, 기원전 636-546), 피타고라스(Pythagoras, 기원전 580-500) 등에 의하여 실험적인 지식들이 정합적인 체계가 되도록 꾸준히 노력해 온 기간으로 파악될 수 있다.

탈레스는 상인으로서 방문한 이집트에서 수학과 천문학을 배웠으며, 기원전 585년 일식을 예언하였던 것이 바빌로니아의 천문학적 지식에 의했던 것으로 파악된다. 또한 그는 이집트의 경험적, 실용적 지식을 바탕으로 하여, '원은 지름에 의해 이등분된다', '이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다', '두 직선이 교차할 때 그 맞꼭지각의 크기는 같다', '반원에 내접하는 각은 직각이다' 등의 정리를 발견하였다. 탈레스의 업적이 갖는 특징은 그것이 실용적인 동시에 이론적이라는 점이다[27, p. 11]. 이집트의 기하학이 실용적인 테두리에 얽매여 있을 때, 탈레스는 고도의 추상화를 요구하는 직선과 관련된 이론을 논리적으로 발전시킨 것이다. 그렇기 때문에, 직선의 기하와 기하에 적용되는 추론 방법의 시초를 탈레스부터 찾는 것이 적절하다고 할 수 있다.

탈레스로부터 더욱 발전된 결과는 피타고라스에게서 찾을 수 있는데, 피타고라스는 넓이와 부피에 관련된 기하, 그리고 산술에 주로 관심을 기울였으며 유클리드 **원론**의 1, 2, 5, 6권에 포함되어 있는 많은 명제에 정통하였다고 알려진다[27, p. 12]. 특히, 직각삼각형의 빗변의 길이의 제곱이 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합과 같다는 피타고라스의 정리는, 이집트인들의 경우에도 직각삼각형의 변들의 길이의 비가 3:4:5일 때 성립한다는 것은 알고 있었지만 이러한 관계가 임의의 직각삼각형에 대하여 성립한다는 것을 최초로 밝힌 사람이 피타고라스라는 사실에 주목할 필요가 있다. 더구나 탈레스의 경우와 비교해 볼 때, 피타고라스는 실용적인 것에 관심을 기울인 흔적을 찾아볼 수 없기 때문에 그에 이르러 기하학이 실제 생활의 필요를 벗어난 교양 학문의 모습을 갖추게 되었다고 판단할 수 있다[27, p. 13].

그러나 유클리드 이전의 탈레스나 피타고라스와 같은 초기 학파들의 경우, 실험적으로 얻어진 기하학의 명제들을 논리적이고 일반적인 것으로 정당화하는 데에 그들의 노력을 집중하였을 뿐, 증명된 정리들을 엄밀하고 굳건하게 연역적으로 조직하는 데까지 나아가지는 못하였다. 이러한 점을 고려한다면, 이 시기의 기하학을 공리적 체계를 갖춘 유클리드 이후의 기하학과 비교하여 '직관적 단계'의 기하학이라 부르고, 공리로부터 연역되는 증명이 체계적으로 주어지는 유클리드 이후의 기하학은 '학문적 단계'의 기하학이라 부를 수 있을 것이다. 실험적인 기하학이 공리적인 체계로까지 발달해 나간 역사적 과정을 이렇게 단계별로 구분하는 것은 약간씩의 차이는 있지만 여러 학자들의 연구에서 공통된 견해를 찾아볼 수 있다.[1]

그런데 한편, 이러한 단계들의 구분은 한 단계가 이전 단계를 전면적으로 부정하고 나온 새로운 단계임을 의미하는 것이 아니라는 점을 지적해야 한다. 대부분의 발달에 관련된 수준 이론들이 그러하듯이, 새로운 단계는 이전 단계의 극복인 동시에 이전 단계와의 변증법

1) 브랜포드(B. Branford)는 [14]에서 기하 발달의 단계를 실험적 단계, 직관적 단계, 학문적 단계로 나누고 있으며, 고야마(M. Koyama)는 [22]에서 순직관 기하의 단계, 그리스 초기 단계, 유클리드 기하의 단계, 비유클리드 기하의 단계로 나누어 설명하는데, 이들은 본 고의 입장과 거의 일치한다. 또, 스탬퍼(A. Stamper)의 경우는 [27]에서 두 번째 단계를 탈레스 학파의 초기 논리적 단계와 피타고라스 학파의 교양 학문으로 다루어지는 단계로 나누어 설명한다.

적인 통합일 수밖에 없고, 각 단계에서 등장하였던 세 가지 요소들은 기하학의 발달 과정 전체에 걸쳐서 계속 어우러져 그 발달을 이끌었다고 보는 것이 정확할 것이다. 실제로 유클리드의 공리적 방법은, 1장에서도 전술하였듯이 실험적이고 직관적인 방법을 통해 발견된 지식을 체계적으로 구조화하는 역할을 하는 것일 뿐, 유클리드 이후에도 아르키메데스(Archimedes, 기원전 287-212) 등에 의한 새로운 지식의 '발견'은 지식이 조작적인 상태에서 가능한 것이었다.

수학적 지식이 갖는 '구조적'인 측면과 '조작적'인 측면은 상반되는 것 같지만 사실 분리될 수 없는 동전의 양면과 같은 쌍대 관계를 본질적으로 갖는다[25]. 이러한 점에서 본다면, 완전히 구조화된 유클리드의 공리적 형식은 학습자의 입장에서 기하학의 내용을 직관적이거나 조작적인 상태에서 받아들이고 다루는 데에는 많은 어려움을 야기하는 것이라 할 수 있는데, 공리적으로까지는 구조화되지 않은 '직관적 단계'에서도 어느 정도의 '정당화'는 가능했나는 역사적 고찰은 논증 기하의 교수-학습에서 학습자를 도울 수 있는 '직관적인 정당화'가 '공리화' 이전에 어느 정도 보완적으로 이루어질 수 있는 가능성을 시사한다.

그런데 플라톤 철학과 결합된 유클리드의 공리적 방법이 너무 강력했던 데에 부분적으로 기인하겠지만, 탈레스나 피타고라스가 실제로 기하학의 정리들을 증명한 방법에 대해서는 자료가 남아있지 않아서 이들로부터 직관적 정당화의 구체적인 사례를 얻기에는 어려운 점이 있다. 하지만 이에 비하여 공리적인 구조화로부터 자유로웠던 고대 중국의 경우에는 알고리즘과 정당화를 동시에 추구한 사례들을 많이 찾아볼 수 있는데, 대표적인 것이 **구장산술**에 나오는 알고리즘들 사이의 논리적 연관성을 설명하는 주석을 쓴 유휘(劉徽, 서기 263)의 수학이다. 유휘는 조작적 텍스트라고 할 수 있는 **구장산술**에 모종의 구조를 부가하려고 시도하였지만 기본적으로 그 텍스트의 형식을 깨거나 재구조화하지는 않았기 때문에, 그의 저술에서는 실용성과 직관적인 논증이 함께 유지될 수 있었다. 다음의 예를 보자.

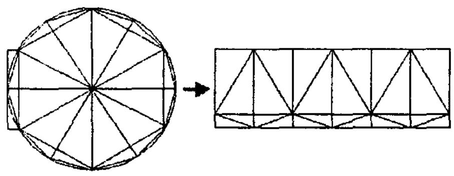
今有圓田, 周三十步, 徑十步. 問爲田幾何.

(지금 원 모양의 밭이 있는데, 둘레가 30보, 지름이 10보이다. 밭의 넓이는 얼마인가?)

(**九章算術**, 1-31)

위 문제는 원의 넓이를 계산하는 문제인데, **구장산술**은 이 문제의 풀이법을 '둘레의 반과 지름의 반을 곱하는(半周半徑相乘得積步)'[2) 것으로 제시하고 있다. 유휘는 이 공식을 설명하기 위하여, 둘레의 반과 지름의 반을 각각 가로와 세로의 길이로 갖는 직사각형으로 원을 변형시켰다(그림 1 참조).

2) 둘레의 반(πr)=15, 지름의 반(r)=5이므로 넓이는 15×5=75(보)이다.



(그림 1)

이를 위하여 유휘는 원의 내부에 정육각형을 내접시킨 후 계속해서 변의 수를 늘린 정다각형을 원에 근사시켜 나갔다.3) 그리고 이러한 과정을 계속하면 "원에 대한 내접 정다각형의 차이가 계속 작아질 것이고, 더 이상 자를 수 없을 때까지 계속하면 정다각형은 원과 일치할 것[21, p. 40]"이라고 설명하는데, 이는 극한 과정에 대한 유휘의 직관적인 이해를 짐작하게 하는 것이다.

이와 비교해 볼 때, 유클리드가 원의 넓이에 대하여 설명하고 있는 부분은 그의 **원론**[20] 12권의 명제 2로서, "원과 원 사이의 비율은 각 원의 지름으로 만든 정사각형의 비율과 같다", 즉 원의 넓이가 지름의 제곱에 비례한다는 사실뿐이며 그 비율이 실제로 얼마인지는 설명하고 있지 않음을 살펴볼 수 있다. 유클리드는 이 정리를 증명하기 위하여, 유휘가 사용한 할원의 방법과 똑같은 아이디어를 사용하지만(**원론** 10권 명제 1), 내접 다각형이 실제로 원에 '일치'한다고 가정하지는 않는다. 그 대신 내접하는 다각형을 원하는 만큼 얼마든지 원에 '근사'시킬 수 있다고만 설명하며, 실제 증명은 정리의 내용을 직접적으로 구성하는 것이 아니라 결과가 참이 아니라고 가정했을 때 모순이 생긴다는 '귀류법'을 사용하고 있다.

결국, 엄밀함을 추구하는 유클리드의 방법은 여러 가지 면에서 현대 미적분학에서의 극한의 존재성 증명에 사용되는 논의의 형태와 유사하지만, 극한 개념을 실제로 얻는 과정은 포함하고 있지 않은 반면에, 공식에 직접적으로 도달하는 유휘의 정당화 방법은 보다 직관적이고 증명의 각 단계에서 그의 목적을 분명하게 보여주고 있다고 할 수 있다.

유휘의 증명은 유클리드의 경우와 같이 공리화되어 있지 않았고 따라서 그만큼 엄밀하지는 못하지만, 그의 증명이 직관적인 수준에서의 정당화의 역할뿐만 아니라 공식을 (재)발견하는 방법까지도 설명하고 있다는 점에서, 현재의 교수학적 상황에서 공리적 방법을 보완하는 직관적 수준의 정당화 방법을 모색하는데 하나의 시사를 얻을 수 있는 것으로 보인다. "엄밀한 논증과 발견술적인 추론은 보다 나은 이해를 추구한다는 목적에 따라 균형있게 사용되어야 한다[21, p. 40]"는 유휘의 신념은 오늘날 우리의 수학 교실에서도 해당되는 말이다.

3) 이 방법은 '할원(割圓, Ge Yuan)'의 방법이라고 불린다[21, p.39].

3. 삼각형의 내각의 합에 대한 증명의 사례

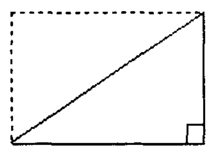
이 장에서는 모든 삼각형의 내각의 합이 180°라는 평면기하의 기본적인 정리를, 직각삼각형 및 직사각형에 대한 직관에 기반하여 정당화하는 방법을 생각해 보고, 이러한 방법이 평행선의 성질로부터 삼각형의 내각의 합이 180°임을 증명하는 현행 교과서의 방식에 대하여 어떠한 보완적인 시사점을 제공하는지 논의해 보기로 한다.

삼각형의 내각의 합이 180°라는 성질은 유클리드의 5번째 공준 및 피타고라스 정리와 각각 논리적으로 동치를 이루는 유클리드 기하의 핵심적이며 기본적인 정리이다[10, p.8]. 이 정리는 실제로 긴 발생 과정을 가지고 있는데, 이집트인들은 경험적으로 정삼각형이나 직각삼각형 등의 내각의 합이 180°라는 것을 알고 있었으며 유클리드 이전의 많은 그리스 수학자들은 모든 삼각형의 내각의 합이 180°라는 것을 나름의 방법으로 증명하였다고 한다[20, pp.317-318]. 이 정리를 유클리드는 그의 **원론** 제1권의 명제 32에 위치시키고 있는데, 그 증명은 한 쌍의 평행선과 다른 한 직선이 만날 때 생기는 엇각과 동위각이 같다는 제1권의 명제 29와 직선이 다른 직선과 만나서 만드는 두 각을 더하면 평각이 된다는 명제 13을 이용하여 이루어지고 있다. 그런데 여기서 주목해야 할 것은, 삼각형의 내각의 합이 180°라는 정리는 어느 정도의 직관적인 이해를 용인한다면 굳이 유클리드가 전개한 것과 같은 복잡한 경로를 통하여 정당화될 수 있는 것만은 아니라는 점이다.

브랜포드는 [14]에서 삼각형의 내각의 합이 180°라는 것을, 임의의 삼각형이 두 개의 직각삼각형으로 나누어지고, 임의의 직각삼각형의 내각의 합이 180°라는 사실로부터 정당화하는 방법을 제안하고 있다. 특히 이 방법은 '실험 → 직관 → 논증'이라는 역사 발생적 과정을 학습자에게 다시 경험하게 하려는 구조로 조직되어 있는데, 이를 살펴보면 다음과 같다.

처음에는 본격적인 정당화 과정에 앞서, 아동이 임의의 삼각형을 그리고 그 내각을 측정하여 기록하거나, 기록된 수치로부터 다시 삼각형을 구성해 보는 등의 실험적인 측정 활동을 하게 한다. 그 후 아동은 정삼각형, 직각이등변삼각형 등의 관찰을 통해 이들의 내각의 합이 180°라는 추측을 가지게 된다. 이 단계에서 교사는 이 성질이 모든 상상 가능한 삼각형에서 성립하는지를 생각해 보게 하고, 이러한 질문을 통하여 아동은 자신의 실험 결과를 재조명한다.

그 다음에 아동은 똑같은 직각삼각형 두 개를 직사각형 모양으로 합쳤다가 분리하는 실험을 하게 되는데, [14, p.131]에 따르면 아동은 대칭성에 대한 직관의 작용에 의해 직사각형은 두 개의 똑같은 직각삼각형으로 나누어질 수 있고, 어떤 두 개의 똑같은 직각삼각형도 직사각형으로 합쳐질 수 있을 것이라는 사실을 알게 된다(그림 2). 또한, 직사각형의 네 각의 합은 직각의 네 배라는 것, 직사각형이 분해되는 두 개의 똑같은 직각삼각형의 대응하는 내각이 각각 일치한다는 것도 직관적으로 알 수 있는


(그림 2)

사실이므로, 이 단계에서 아동은 "완벽한 직각삼각형이 그려질 수 있다면 그 세 각의 합은 직각의 두 배와 같으며, 직각삼각형의 두 예각의 합은 직각"이라는 결론을 내릴 수 있게 된다.

그 다음 단계는 이러한 사실을 활용하여 다음과 같이 체계적인 증명을 구성하는 것이다.

(1) '직사각형'이라는 도형(대칭성이 있는)이 존재한다.

(2) 모든 직사각형은 두 개의 똑같은 직각삼각형으로 분해될 수 있다.

(3) 똑같은 임의의 두 직각삼각형은 직사각형으로 합쳐질 수 있다.

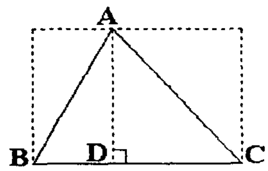
(4) 직각삼각형의 내각의 합은 정확히 직사각형의 내각의 합의 절반이다.

(5) 그러므로 직각삼각형의 내각의 합은 평각이다.

(6) 그러므로 직각삼각형에서는 직각이 아닌 두 각의 합이 직각과 같다.

(7) 모든 삼각형은 두 개의 직각삼각형으로 분해될 수 있다.

(8) (그림 3)과 같이 (종이를 접거나 적절한 도구를 사용하여) 꼭지점 A에서 변 BC에 수선을 내려서 삼각형 ABC를 두 개의 직각삼각형으로 나눈다. 그러면
$\angle BAD+\angle ABD=90°$이고 $\angle DAC+\angle DCA=90°$이므로
$\angle BAD+\angle ABD+\angle DAC+\angle DCA=180°$가 되고
$\angle BAD+\angle DAC=\angle BAC$에서 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$



(그림 3)

여기에서 단계 (2), (3), (7)의 정당화는 부분적으로는 실험적으로, 또 부분적으로는 직관에 의존하는 과정이다. 그 중에서 특히 (7)의 과정이 매우 중요한데, 그것은 이 과정이 바로 아동이 이해한 사실을 '모든' 삼각형으로 확장하는 핵심적인 과정이기 때문이다. [14, p.134]는 '모든' 삼각형이 두 개의 직각삼각형으로 나누어질 수 있는가 하는 문제는 삼각형 모양의 종이를 접는 경험과 직관을 통하여 결론 내릴 수 있는 것이라고 설명한다. 물론, 이 결론의 엄밀한 증명을 위해서는 종이를 접은 선이나 삼각형에 그린 보조선 등이 삼각형의 안쪽으로 들어간다는 사실[4]을 증명해야 하지만, 학교 수학의 상황에서는 그러한 증명 없이 이를 활용할 수 있을 것이다.

결국 이러한 정당화 과정에서는, 임의의 삼각형이 두 개의 직각삼각형으로 나누어진다는 것과 모든 직각삼각형의 내각의 합은 직사각형의 내각의 합의 절반인 2직각이라는 두 가지의 직관이 사용되고 있으며, 이 두 가지의 직관으로부터 모든 삼각형의 내각의 합이 180°라는 정리를 논리적으로 정당화하게 된다. 그런데 이와 같은 과정은 유클리드가 같은 정리를

4) 이 사실을 엄밀하게 증명하기 위해서는 점, 직선, 평면에 대한 순서공리 또는 분리공리(separation axiom)를 필요로 한다. 그러나 사실 유클리드의 경우에도 유사한 내용들을 적절한 공리나 증명 없이 사용하였다([19, pp.59-69] 참조).

연역적으로 도출해내는 과정에 비해서 상대적으로 매우 간결한 과정이라는 것에 주목할 필요가 있다. 유클리드의 **원론**에서는 임의의 삼각형의 내각의 합이 2직각이라는 정리가 32번째의 명제로 놓여 있으며, 이를 증명하기 위하여 몇 가지의 명제를 먼저 증명한 후에 평행선의 공리를 이용하여 증명을 완성하는데, 이와 같은 **원론**의 구조는 각각의 기하학적인 성질을 직접적으로 이해하기 위해 고안된 것이 아니라 전체적으로 논리적인 마찰을 최소화하는 정합적인 구조를 이루기 위한 것으로 이해될 수 있을 것이다.

이제 우리 나라 교과서에서의 증명 방법을 살펴보자. 현행 교과서에서도 중학교 학생들의 인지적, 심리적 발달 수준을 고려하여 완전한 공리화를 시도하는 대신 증명의 출발점이 되는 몇 가지의 기본적인 명제를 직관적으로 받아들이도록 하고 있는데, 그 중 하나가 다음과 같은 '평행선의 성질'이다.

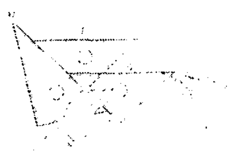
[평행선의 성질]

두 직선이 한 직선과 만날 때

(1) 두 직선이 평행하면 동위각의 크기는 같다.

(2) 동위각의 크기가 같으면 두 직선은 평행하다. [5, p.47]

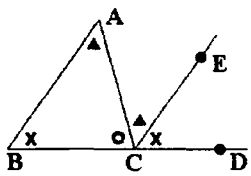
이러한 '평행선의 성질'은 보통, '투명한 종이에 겹쳐 그려보기' 또는 '삼각자의 이동(그림 4)' 등의 방법을 통하여 학생들이 직관적으로 받아들이게 된다.



(그림 4)

그리고 이와 같은 '평행선의 성질'과 맞꼭지각이 같다는 성질을 이용하여 평행선의 엇각이 같다는 사실을 증명하게 되고, 다시 이를 이용하여 주어진 삼각형의 한 변에 평행한 보조선을 그어서(그림 5) 모든 삼각형의 내각의 합이 180°라는 정리를 증명한다. 그러한 증명의 예는 다음과 같다.

(그림 5)와 같이 변 BC를 연장한 직선 CD를 긋고,
점 C에서 변 AB에 평행한 직선 CE를 그리면
$\angle A = \angle ACE$ (엇각), $\angle B = \angle DCE$ (동위각)
따라서 $\triangle ABC$의 세 내각의 크기의 합은
$\angle A + \angle B + \angle ACB = \angle ACE + \angle DCE + \angle ACB = 180°$이다. [5, p.109]



(그림 5)

'평행선의 동위각이 같다'는 성질로부터 '평행선의 엇각이 같다'는 성질과 '삼각형의 내각의 합이 2직각'이라는 성질을 계속해서 연역하는 이러한 구조는, 사실 유클리드의 **원론**에서 명제 13과 명제 29를 이용해서 32번째의 해당 명제를 증명하고 있는 것과 같은 구조를 가지고 있다. 그리고 이러한 증명의 구조는 **원론**의 전체적인 체계를 위한 논리적인 전개에 기인

하는 것이다. 실제로 **원론** 제 1 권의 명제 33에서 명제 45까지 계속해서 '평행선' 또는 '평행사변형'과 관련된 명제들로 이루어져 있는 것도 평행 공준으로부터 모든 성질들을 연역하여 하나의 정합적인 체계를 구축하려는 유클리드의 의도를 짐작하게 한다.

현행 교과서에서 제공되는 증명의 체계에서도, 삼각형의 내각의 합이 180°라는 정리를 증명하는 출발점으로 작용한다는 의미에서 사실상 공리의 역할을 하는 것이 바로 '평행선의 성질'이라는 점은, 우리의 교과서가 기하학의 각각의 정리들이 갖는 의미를 학생들이 직관적으로 파악하게 하는 것보다는 각각의 정리들이 어떠한 함의 관계를 가지고 논리적, 연역적으로 연결되어 있는지 알게 하는 데에 더 중점을 두고 있는 것이라고 보아야 할 것이다. 앞에서 제시한 '직각삼각형으로 나누어 증명하는' 방법의 경우, 증명이 시작되는 출발점은 '모든 삼각형이 두 개의 직각삼각형으로 나누어지며, 모든 직각삼각형은 어떤 직사각형의 절반'이라는 사실이었다. 두 방법을 비교해 볼 때, 각각의 논리적 출발점을 '직관적으로' 이해하고 받아들여야 한다는 점에서는 차이가 없으나 그 출발점으로부터 삼각형의 내각의 합이 180°라는 결론에 도달하는 과정은 직각삼각형을 이용하는 경우가 더 간결하고 직접적이다.

평행선의 성질로부터 모든 정리를 관통하며 연역해 나가는 교과서의 방법은 기하학이 가지고 있는 전체적인 체계의 구조적 정합성을 잘 보여주는 동시에 적절한 수준의 엄밀함도 잃지 않는다는 측면에서 분명히 포기할 수 없는 강점을 가지고 있다. 그러나 1장에서 살펴보았듯이 공리적인 전개 방식이 일반적으로 갖는 문제이지만, '논리적인' 전개 순서 이외의 다른 발생적이거나 자연스러운 전개 순서를 고려하지 못함으로써 학습자가 직관적 단계에서 풍부한 맥락과 깊이 있는 이해를 구성할 수 있는 자유로운 기회를 박탈할 위험성은 또한 항상 경계되어야 한다. 앞에서 제시된, 직각삼각형을 이용하여 삼각형의 내각의 합이 180°라는 것을 증명하는 방법과 같은 것은, 하나의 작은 사례이지만 '전체적인' 조직화를 이루기 전에 '국소적인' 조직화를 간단하게 시도할 수 있는 직관적 정당화 방법으로서 연역적인 논증 기하 교육을 보완하는 하나의 수단이 될 수 있을 것이다.

4. 결론

공리로부터 모든 정리가 연역되는 논리적 구조는 수학이라는 학문이 갖는 하나의 본질적인 측면임이 분명하며, 그러한 의미에서 유클리드나 부르바키의 **원론**들은 전형적인 수학적 체계의 구조를 보여주는 대표적인 예이다. 그러나, 이와 같은 논리적 구조는 수학적 지식의 '내용'을 서술하는 '형식'일 뿐이며 그것 자체를 바로 수학적 지식의 구조로 파악할 수는 없을 것이다. 지식의 내용과 형식은 지식을 변증법적으로 구성하는 본질적인 두 측면이며, 또한 종합과 분석, 논증과 발견은 그러한 지식의 발생과 발달 과정에서 서로 보완적인 역할을 해야 하는 두 요소이다.

수학 교과에서 특히 논증 기하는 그 연역적인 구조와 추론의 과정을 학생들이 구체적으로 경험할 수 있는 좋은 기회를 제공하는 영역이지만, 유클리드 식의 공리적인 체계가 그 내용의 발견 과정에 비해 너무 강조될 경우 처음 증명을 배우는 학생들에게는 전체 내용의 논리적 조직화 자체에 큰 부담을 가지기 쉽다. 이러한 문제를 극복하기 위하여, 논증 기하의 학습에서는 직관적인 정당화와 국소적인 조직화의 경험을 통하여 점진적인 수학화를 이루어야 한다는 것이 보완적인 방안으로 여러 연구에서 주장되어 온 바, 본 고에서는 완전한 공리화 이전 단계에서 학생들이 경험할 수 있는 정당화의 직관적 수준을 구체적인 사례와 함께 탐구하였다.

이를 위하여, 1장에서는 수학의 일관성을 구축하고 보편적인 의사소통을 가능하게 하는 공리적 방법이 발견의 맥락과 교육적 상황에서 갖는 한계를 분석하고 이를 보완할 수 있는 직관의 역할을 논의하였으며, 2장에서는 기하학적 사고가 발달하는 과정을 역사 발생적으로 분석하여 공리로부터 논리적으로 연역되는 기하학의 체계가 이루어지기 전에 실험적인 지식을 갖는 단계와 직관적인 정당화의 단계를 거쳐왔음을 밝혔다. 특히, 중국의 사례를 통하여 공리화가 완성되지 않은 상태에서도 각각의 실험적인 지식에 대하여 실질적으로 충분한 수준의 직관적인 정당화가 가능할 수 있었고, 오히려 그 직관적인 논증의 방식은 엄격한 공리적 체계에 얽매이지 않았기 때문에 정리의 발견적 맥락을 그 증명 속에 내포할 수 있었다는 증명 지도의 대안적인 가능성을 지적하였다. 그리고 3장에서는 모든 삼각형의 내각의 합이 180°라는 정리를 국소적인 국면에서 직관적으로 증명하는 문제를 논의하였다. 평행선의 공리로부터 정합적인 구조가 전체적으로 유지되는 유클리드의 **원론**에서는 이 정리의 증명이 국소적인 국면에서 독립적으로 이루어질 수 있는 여지가 없으나, 직관적으로 받아들일 수 있는 직각삼각형의 성질을 증명의 출발점으로 선택할 경우에는 상대적으로 간결한 증명과 국소적인 조직화가 가능하다. 현행 교과서의 경우, 증명의 출발점은 직관으로부터 이루어지지만 평행선의 성질로부터 연역되는 전체적인 구조는 유클리드의 **원론**과 거의 유사한 구조를 가지고 정합성을 추구하고 있다. 교과서의 저술 양식은 이러한 전체적인 구조적 정합성을 쉽게 포기할 수 없을 것이나 교사가 조직하는 수업 상황에서는 국소적인 맥락에서의 직관적인 정당화가 전체적인 체계가 갖는 형식적인 완고함을 보완할 수 있는 상보적인 도구로서 충분히 고려될 수 있을 것이다. 학습자에게 있어서 증명의 과정과 증명의 근거는 모두, 이미 만들어져서 주어지는 것이 아니라 각각의 수준에서 적절하게 스스로 조직할 수 있는 것임을 깨닫게 하는 것이 논증 기하 영역에서의 진정한 수학화를 이룰 수 있게 하는 첫걸음이기 때문이다.

참고 문헌

1. 교육부, **수학과 교육과정**, 대한교과서, 1998.

2. 國宗進, **'論證の意義'の理解に關する發達的硏究**, 明治圖書, 東京, 1992.
3. 나귀수, **증명의 본질과 지도 실제의 분석**, 서울대학교 박사학위논문, 1998.
4. 박성택, **수학교육**, 동명사, 1996.
5. 조태근 외, **중학교 수학 7-나**, 금성출판사, 2001.
6. 서동엽, **증명의 구성요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색**, 서울대학교 박사학위논문, 1999.
7. 우정호, **학교수학의 교육적 기초**, 서울대학교출판부, 1998.
8. 유재근, **대뇌반구의 기능분화를 고려한 수학 학습-지도에 관한 연구**, 서울대학교 석사학위논문, 2002.
9. 차종천 역, **구장산술/주비산경**, 범양사, 2000.
10. 최영기, "중학교 수학에서 평행공리의 의미," **학교수학** 1-1(1999), 7-17.
11. Arnauld, *Die Logik oder die Kunst des Denkens*, Darmstadt, 1972.
12. Balacheff, "A Study of Students' Proving Processes at the Junior High School Level," in Wirszup & Streit(eds.), *Developments in School Mathematics Education around the World - Proceedings of the UCSMP ICME* vol. 2(1990), 284-298.
13. Becker, "Difficulties and Errors in Geometric Proofs by Grade 7 Pupils," in Vermandel(ed.), *Proceedings of the 6th International Conference for PME*(1982), 123-127.
14. Branford, *A Study of Mathematical Education*, Clarendon Press, 1908.
15. Cartan, "Nicolas Bourbaki und die heutige Mathematik," *Arbeitsgemeinschaft f. Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen*, Heft 76, Köln, 1959.
16. Dieudonné, "Should We Teach 'Modern Mathematics'?" *American Scientist* 61(1973), 16-19.
17. Fischbein, "Intuition and Proof," *For the Learning of Mathematics* 3-2(1982), 9-18.
18. Galbraith, "Aspects of Proving: A Clinical Investigation of Process," *Educational Studies in Mathematics* 12-1(1981), 1-28.
19. Greenberg, *Euclidean & Non-Euclidean Geometries*, Freeman & Company, 1980.
20. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements with introduction and commentary*, Dover Publications, 1956.
21. Horng, "Euclid vs. Lin Hui: A Pedagogical Reflection, in Katz(ed.)," in *Using History to Teach Mathematics - An International Perspective*, MAA, INC., 2000, 37-47.
22. Koyama, "A Study on Intuition in Mathematics Education," in **數學敎育學의 觀點**, 學文社, 1990.
23. Moore, "Making the Transition to Formal Proof," *Educational Studies in Mathematics* 27(1994), 249-266.
24. Robson, "Mesopotamian Mathematics: Some Historical Background," in Katz(ed.),

Using History to Teach Mathematics - An International Perspective, MAA, INC., 2000, 149-158.

25. Sfard, "On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin," *Educational Studies in Mathematics* 22(1991), 1-36.
26. Siu, "An Excursion in Ancient Chinese Mathematics," in Katz(ed.), *Using History to Teach Mathematics - An International Perspective*, MAA, INC., 2000, 159-166.
27. Stamper, *A History of the Teaching of Elementary Geometry*, AMS press, 1909.
28. Steiner, "Two Kinds of 'Elements' and the Dialectic between Synthetic-deductive and Analytic-genetic Approaches in Mathematics," *For the Learning of Mathematics* 8-3(1988), 7-15.
29. Thom, "'Modern' Mathematics: An Educational and Philosophic Error?" *American Scientist*, 59(1971), 695-699.