KJHM Vol. 16, No. 1, 2003, 63-72

Stably 가산 근사 Frames와 Strongly Lindelöf Frames*

충북대학교 수학과 **이승온**

Abstract

This paper is a sequel to [11]. We introduce σ-coherent frames, stably countably approximating frames and strongly Lindelöf frames, and show that a stably countably approximating frame is a strongly Lindelöf frame. We also show that a complete chain is a Lindelöf frame if and only if it is a strongly Lindelöf frame by using the concept of strong convergence of filters. Finally, using the concepts of super compact frames and filter compact frames, we introduce an example of a strongly Lindelöf frame which is not a stably countably approximating frame.

0. 서론

1972년 Scott이 [10]에서 연속 격자를 소개한 이래 연속 격자는 여러 방면에 걸쳐 관심의 대상이 되었고, 무엇보다도 연속 frame이 locally compact 공간의 pointfree version이라는 점이 흥미를 끌었다. 1981년 Johnstone은 [6]에서 Tychonoff 정리를 frame의 setting에서 선택공리(axiom of choice)와 무관하게 증명함으로써 이 분야에 대한 연구가 급속히 확대되었고, 1999년 Banaschewski와 Hong은 [1]에서 frame의 수렴 구조(convergence structure)와 strict extension을 도입하여 frame의 extension을 정리하였다.

compact 공간을 일반화시킨 locally compact 공간과 Lindelöf 공간의 개념은 연속 frame과 Lindelöf frame으로 일반화되어 위상 공간과 다른 현상이 나타난다. 예를 들면 Lindelöf frame은 frame category의 coreflective subcategory를 이루고 coproductive임이 밝혀졌다 [9]. 1988년 우리는 countably way below relation과 가산 근사 격자(countably approximating lattice)의 개념을 도입하여 locally Lindelöf 공간의 개념을 일반화시켰고[7], 2000년

※ 2000 Mathematical subject Classification - 06A99, 54A99, 54D99

[11]에서 연속 frame을 일반화시킨 가산 근사 frame을 정의하였다. 또한 우리는 pointfree topology에서 locally Lindelöf 공간을 소개하고 정칙 공간 X가 locally Lindelöf 공간이 되기 위한 필요충분조건은 open set frame $\Omega(X)$가 가산 근사 frame임을 보였다.

이 논문에서 우리는 strongly Lindelöf frame과 stably 가산 근사 frame을 소개하고 stably 가산 근사 frame은 strongly Lindelöf frame이 되지만 그 역은 성립하지 않음을 반례를 들어서 설명한다. 이를 위하여 filter compact frame과 super compact frame의 개념을 소개하고 이들이 서로 동치임을 보인다.

[11]에서 우리는 L이 순서집합일 때 L의 σ-ideal 전체의 집합을 σId(L)로 표시하였으나 앞으로는 $\mathcal{H}L$로 표시한다.

이 논문의 격자는 최대원 e와 최소원 0을 갖는 유계 격자를 의미하며, 격자 준동형은 최대원과 최소원을 보존시킨다. 그 외에 이 논문에서 정의하지 않은 모든 용어는 [4], [6], [8]을 따른다.

1. σ-Coherent Frames

완비격자 L이 Heyting 대수일 때, L을 frame이라고 정의하였다[11]. 즉 완비격자 L이 frame이 되기 위한 필요충분조건은 L의 임의의 원소 x와 임의의 부분집합 S에 대하여 무한분배법칙 $x\wedge(\bigvee S)=\bigvee\{x\wedge s \mid s\in S\}$를 만족하는 것이다.

임의의 가산 상한(countable join)에 관하여 닫혀있는 격자 L이 다음을 만족시킬 때 L을 σ-frame이라고 한다[5].

$$x\wedge(\bigvee K)=\bigvee\{x\wedge k \mid k\in K\}\quad (x\in L,\ K\in \mathrm{count}(L))$$

이 절에서 우리는 σ-coherent frame을 정의하고 중요한 성질들을 소개한다.

1.1. 정의([8], [11]). 1) 두 frame L과 M 사이의 함수 $f: L\to M$가 임의의 상한과 유한하한(meet)을 보존(preserve)할 때, f를 frame 준동형이라 한다.

2) frame L의 임의의 원소 x를 $x=\bigvee\downarrow_c x=\bigvee\{s \mid s\ll_c x\}$로 나타낼 수 있을 때, L을 가산 근사 frame이라고 한다.

1.2. 표시법. frame L의 compact 원소들의 집합을 K(L)로 표시하고, Lindelöf 원소들의 집합을 $\mathcal{L}(L)$로 표시한다.

1.3. 정의. 1) K(L)이 frame L의 부분 격자이고 L을 생성할 때, L을 coherent라고 한다.

2) $\mathcal{L}(L)$이 frame L의 부분 σ-frame이고 L을 생성할 때, L을 σ-coherent라고 한다.

frame L에 대하여 $\mathcal{L}(L)$은 가산 상한에 관하여 닫혀있으므로 $\mathcal{L}(L)$이 L의 부분 σ-frame이기 위한 필요충분조건은 $e\in\mathcal{L}(L)$이고 임의의 $x, y\in\mathcal{L}(L)$에 대하여 $x\wedge y\in\mathcal{L}(L)$을 만족하는 것이다.

1.4. Remark. 1) σ-coherent frame은 일반적으로 coherent frame이 아니다. 예를 들면, 보통 순서 ≤가 주어진 완비 전순서 집합 [0, 1]은 σ-coherent frame이지만 coherent frame은 아니다.

2) σ-coherent frame L의 임의의 원소 a는 $a=\bigvee(\downarrow a\cap\mathcal{L}(L))\leq\bigvee\downarrow_c a\leq a$이므로 σ-coherent frame은 가산 근사 frame이다.

3) L이 가산 근사 frame이고 M이 L의 retract 라고 하자. 즉, M은 L의 부분 frame이고 $r|_M=1_M$인 frame 준동형 $r: L\to M$이 존재한다. M의 임의의 원소 b와 L의 임의의 원소 x에 대하여 L에서 $x\ll_c b$이면, $b\leq\bigvee_M S=\bigvee_L S$인 M의 부분집합 S에 대하여 $x\leq\bigvee_L K$인 S의 가산부분 집합 K가 존재하므로 M에서 $r(x)\ll_c b$가 된다. 따라서 $r(x)\leq r(\bigvee_L K)=\bigvee_M r(K)$이고 $r|_M=1_M$이므로 $r(x)\leq\bigvee_M K$가 된다.

L이 가산 근사 frame이므로 M의 원소 b에 대하여 $b=\bigvee_L\{x|\ x\ll_c b \text{ in } L\}$이고 $r(b)=b=\bigvee_M\{r(x)|\ x\ll_c b \text{ in } L\}\leq\bigvee_M\{y|\ y\ll_c b \text{ in } M\}\leq b$가 된다. 따라서 M도 가산 근사 frame이다. 즉 가산 근사 frame의 retract는 역시 가산 근사 frame이다.

2. Stably 가산 근사 Frames

일반적으로 frame L에서 countably way below relation $\ll_c$는 유한 하한에 관하여 닫혀있지 않다[8]. 이 절에서 우리는 가산 근사 frame의 특수한 형태인 stably 가산 근사 frame을 정의하고 가산 근사 frame L이 stably 가산 근사 frame이 되기 위한 필요충분조건은

함수 $\downarrow_c : L \to \mathcal{H}L$가 frame 준동형이 되는 것을 보인다.

2.1. 정의. 가산 근사 frame L의 countably way below relation $\ll_c$가 임의의 유한 하한에 대하여 닫혀있을 때, L을 stably 가산 근사 frame이라고 한다.

정의에 의하면 가산 근사 frame L이 stably 가산 근사 frame이 되기 위한 필요충분조건은 $e \ll_c e$를 만족하고, $x \ll_c a$, $y \ll_c b$일 때 $x \wedge y \ll_c a \wedge b$가 되는 것이다. 즉, L이 Lindelöf frame이고 $x \ll_c a$, $x \ll_c b \Rightarrow x \ll_c a \wedge b$가 되는 것이다.

2.2. Remark ([8]). 1) L이 σ-coherent frame일 때 $\mathfrak{L}(L)$이 frame L의 부분 σ-frame이므로, σ-coherent frame은 stably 가산 근사 frame이다.

2) 가산 근사 frame L이 stably 가산 근사 frame이 되기 위한 필요충분조건은 함수 $\downarrow_c : L \to \mathcal{H}L$가 frame 준동형이 되는 것이다. 왜냐하면 가산 근사 frame L에서의 함수 $\downarrow_c : L \to \mathcal{H}L$는 상한 함수 $\bigvee : \mathcal{H}L \to L$의 left adjoint가 되고, 따라서 함수 $\downarrow_c$는 임의의 상한을 보존시키기 때문이다.

3) L이 stably 가산 근사 frame이고 M이 L의 retract이면 Remark 1.4의 3)에 의하여 M은 가산 근사 frame이다. 또한 M이 L의 부분 frame이고 L이 Lindelöf frame이므로 M도 역시 Lindelöf frame이다. M에서 $b \ll_c x$, $b \ll_c y$이면 $b \ll_c x = \bigvee_M \{ r(p) | p \ll_c x \text{ in } L\}$이므로 L에서 $p \ll_c x$이고 $b \leq r(p)$인 L의 원소 p가 존재한다. 마찬가지로 L에서 $q \ll_c y$이고 $b \leq r(q)$인 L의 원소 q가 존재한다. L이 stably 가산 근사이므로 L에서 $p \wedge q \ll_c x \wedge y$이고, $x \wedge y \in M$이므로 M에서 $r(p \wedge q) \ll_c x \wedge y$가 된다. 따라서 $b \leq r(p) \wedge r(q) = r(p \wedge q)$이므로 M에서 $b \ll_c x \wedge y$이다. 즉 stably 가산 근사 frame의 retract는 역시 stably 가산 근사 frame이다.

2.3. 정리. frame L에 대하여 다음은 서로 동치이다.

1) L은 stably 가산 근사이다.

2) L은 σ-coherent frame의 retract이다.

증명. L이 stably 가산 근사 frame이면 $\downarrow_c : L \to \mathcal{H}L$는 frame 준동형이고

$(\bigvee \circ \downarrow_c)(a) = a = 1_L(a)$이므로 $\bigvee : \mathcal{H}L \to L$은 retraction이다.

따라서 L은 σ-coherent frame $\mathcal{H}L$의 retract이다. 역으로 L이 σ-coherent frame의 retract이면 L은 stably 가산 근사의 retract이므로 Remark 2.2의 3)에 의하여 stably 가산 근사 frame이 된다.

3. Strongly Lindelöf Frames

3.1. **정의**([1], [2]). frame L에서 frame T로 가는 유계 하한 준격자 준동형 $\varphi : L \to T$를 filter라고 정의하였다. 이 filter φ에 대하여 다음을 정의한다.

1) filter φ가 격자 준동형일 때, 즉 φ가 유한 상한과 유한 하한을 보존시킬 때 φ를 prime filter라고 한다.

2) filter φ가 σ-frame 준동형일 때, 즉 φ가 임의의 가산 상한과 유한 하한을 보존시킬 때 φ를 σ-prime filter라고 한다.

3) filter φ가 L의 cover를 T의 cover로 보존할 때 φ는 수렴한다(convergent)고 한다.

4) filter φ에 대하여 $h \leq \varphi$인 frame 준동형 $h : L \to T$가 존재하면 φ는 strongly convergent한다고 한다.

5) 임의의 prime filter φ가 strongly convergent할 때, L을 strongly compact라고 한다.

6) 임의의 σ-prime filter φ가 strongly convergent할 때, L을 strongly Lindelöf frame이라고 한다.

7) $f \circ g \leq 1_T$인 frame 준동형 $f : L \to T$와 $g : T \to L$가 존재할 때, T를 L의 lax retract라 한다.

정의에 의하면 모든 retract는 lax retract이다.

3.2. **Remark**([8]). 1) L이 σ-coherent frame이면 $L = \mathcal{H}A$가 되는 σ-frame A가 존재한다. 임의의 σ-prime filter $\varphi : \mathcal{H}A \to T$와 σ-frame 준동형 $\downarrow : A \to \mathcal{H}A$에 대하여 $\varphi \circ \downarrow : A \to T$는 σ-frame 준동형이므로 $h \circ \downarrow = \varphi \circ \downarrow$이 되는 유일한 frame 준동형 $h : \mathcal{H}A \to T$가 존재한다. 또한, 다음이 성립한다.

$$h(I) = h(\bigvee \{ \downarrow x | x \in I \}) = \bigvee \{ (h \circ \downarrow)(x) | x \in I \}$$

$$= \bigvee \{ (\varphi \circ \downarrow)(x) \mid x \in I \} \le \varphi(I) \; (I \in \mathcal{H}A)$$

그러므로 $h \le \varphi$이다. 즉, φ는 strongly convergent이다. 따라서 임의의 σ-coherent frame은 strongly Lindelöf frame이다.

2) 임의의 σ-prime filter는 prime filter이므로, 모든 strongly compact frame은 strongly Lindelöf frame이다. 그러나 실수의 집합 R에 cocountable topology를 준 open set frame $\Omega(Rc)$는 strongly Lindelöf frame이지만 strongly compact frame은 아니다.

3) L이 strongly Lindelöf frame이고 M이 L의 lax retract이면 $f \circ g \le 1_M$인 frame 준동형 $f: L \to M$와 $g: M \to L$가 존재한다. 임의의 σ-prime filter $\varphi: M \to T$를 택하면 $\varphi \circ f: L \to T$도 역시 σ-prime filter이고, L이 strongly Lindelöf frame이므로 $h \le \varphi \circ f$인 frame 준동형 $h: L \to T$가 존재한다. 따라서 $h \circ g: M \to T$는 frame 준동형이고 $h \circ g \le \varphi$이므로 M은 strongly Lindelöf frame이다. 즉 strongly Lindelöf frame의 lax retract는 strongly Lindelöf frame이다.

4) 임의의 stably 가산 근사 frame L은 σ-coherent frame의 retract이므로 lax retract이고, 모든 σ-coherent frame은 strongly Lindelöf frame이므로, L은 strongly Lindelöf frame의 lax retract이다. 따라서 L은 strongly Lindelöf frame이다.

3.3. frame L에 대하여 다음은 서로 동치이다.

1) L은 strongly Lindelöf frame이다.

2) L은 $\mathcal{H}L$의 lax retract이다.

3) L은 σ-coherent frame의 lax retract이다.

증명. 1)⇒2) 함수 $\downarrow: L \to \mathcal{H}L$이 σ-prime filter이므로 $h \le \downarrow$인 frame 준동형 $h: L \to \mathcal{H}L$가 존재하여 $\bigvee \circ h \le \bigvee \circ \downarrow = 1_L$이 된다.

2)⇒3) $\mathcal{H}L$이 σ-coherent이므로 성립한다.

3)⇒1) Remark 3.2의 1)과 Remark 3.2의 3)에 의하여 L은 strongly Lindelöf frame이다.

3.4. Proposition. 완비 전순서 집합 L에 대하여 다음은 서로 동치이다.

1) L은 Lindelöf frame이다.

2) L은 stably 가산 근사 frame이다.

3) L은 strongly Lindelöf frame이다.

증명. 1)⇒2) L이 Lindelöf frame이므로 $e \ll_c e$이다. L이 전순서 집합이므로 $a \ll_c b$, $a \ll_c c$이면 $a < b$, $a < c$이거나 $a = b$ (또는 $a = c$)이다[11]. $a < b$, $a < c$이면 $a < b \wedge c$이므로 $a \ll_c b \wedge c$이다. $a = b$이면 $a = b \wedge c = b$ 이므로 $a \ll_c b \wedge c$이다.

L이 가산 근사 frame임을 보이기 위하여 L의 임의의 원소 a를 택하자.

$a = \bigvee \{ x \mid x < a \}$ 이면 L은 가산 근사 frame이다.

$a \neq \bigvee \{ x \mid x < a \}$ 이면 $a \leq \bigvee S$인 L의 부분집합 S를 택하자.

$a = a \wedge (\bigvee S) = \bigvee \{ a \wedge s \mid s \in S \}$ 이므로 $a \wedge s = a$가 되는 적당한 S의 원소 s가 존재하므로 $a \leq s$이다. 즉 $a \ll_c a$이다.

2)⇒3) Remark 3.2의 4)에 의하여 자명하다.

3)⇒1) strongly Lindelöf frame L이 $\mathcal{H}L$의 lax retract 이므로 $\bigvee \circ h \leq 1_L$인 frame 준동형 $\bigvee : \mathcal{H}L \to L$과 $h: L \to \mathcal{H}L$가 존재한다. L의 임의의 cover C를 택하면 $h(C)$는 Lindelöf frame $\mathcal{H}L$의 cover가 되고 $h(K)$도 역시 $\mathcal{H}L$의 cover가 되는 C의 가산 부분 집합 K가 존재한다. 따라서 $(\bigvee \circ h)(K)$는 L의 cover이고 $(\bigvee \circ h)(K) \leq 1_A(K) = K$가 L의 cover이므로 L도 역시 Lindelöf frame이다.

4. 반례

4.1. 정의([3]). 1) frame L이 다음의 식을 만족할 때 L을 super compact frame이라고 한다.

$$\bigvee \{ x \mid x < e \} \neq e$$

2) frame L 위의 임의의 filter가 strongly convergent하면 L을 filter compact frame이라고 한다.

임의의 filter compact frame은 strongly compact frame이므로 Remark 3.2의 2)에 의하여 strongly Lindelöf frame이 된다. 또한 frame L의 공집합이 아닌 down 부분 집합들로 이루

어진 집합 $\mathfrak{D}L = \{ U \subseteq L \mid \emptyset \neq U = \downarrow U \}$는 super compact frame인 동시에 filter compact frame이다. 특히 L이 filter compact이기 위한 필요충분조건이 L이 super compact인 것을 보이기 위하여 다음을 보인다.

4.2. Proposition. M이 filter compact frame이고 frame L이 M의 lax retract이면, L도 filter compact frame이다.

증명. 임의의 filter $\varphi : L \to T$를 택하면 L이 M의 lax retract이므로 $f \circ g \leq 1_L$이 되는 frame 준동형 $f: M \to L$와 $g: L \to M$가 존재한다. 여기서 $\varphi \circ f: M \to T$는 filter이고 M이 filter compact frame이므로 $\varphi \circ f$는 strongly convergent한다. 따라서 $h \leq \varphi \circ f$가 되는 frame 준동형 $h: M \to T$가 존재하여 $h \circ g: L \to T$도 frame 준동형이 되고 $h \circ g \leq \varphi \circ f \circ g \leq \varphi \circ 1_L = \varphi$가 된다. 즉 $\varphi : L \to T$는 strongly convergent filter이다.

L이 filter compact일 때, $\downarrow : L \to \mathfrak{D}L$은 filter이므로 $h \leq \downarrow$인 frame 준동형 $h: L \to \mathfrak{D}L$이 존재한다. 또한 $\bigvee \circ h \leq \bigvee \circ \downarrow = 1_L$이므로 L은 $\mathfrak{D}L$의 lax retract이다.

4.3. Proposition frame L에 대하여 L이 filter compact이기 위한 필요충분조건은 L이 super compact가 되는 것이다.

증명. ($\Rightarrow$) filter compact frame L은 $\mathfrak{D}L$의 lax retract이므로 $h \leq \downarrow$인 frame 준동형 $h: L \to \mathfrak{D}L$가 존재하여 $\bigvee \circ h \leq 1_L$이 된다. L의 임의의 cover C를 택하면, $h(C)$는 $\mathfrak{D}L$의 cover가 된다. 따라서 $e = \downarrow e = \bigvee h(C) = \bigvee \{h(c) \mid c \in C\} = \bigcup \{h(c) \mid c \in C\} = \bigcup \{\downarrow c \mid c \in C\}$이므로 $e \in \downarrow c_0$인 적당한 $c_0 \in C$가 존재한다. 그러므로 $c_0 = e \in C$이다.

($\Leftarrow$) L이 super compact이면 $x_0 = \bigvee \{ x \in L \mid x < e \} \neq e$ 이다.
frame 준동형 $h: L \to \uparrow x_0 (x \mapsto x_0 \vee x)$, ($\uparrow x_0$는 두 점으로 이루어진 전순서 집합)와 $g: \uparrow x_0 \to L (x_0 \mapsto 0,\ e \mapsto e)$에 대하여 $g(h(x)) = \begin{cases} 0 & (x \leq x_0) \\ e & (x = e) \end{cases}$ 이므로 $g \circ h \leq 1_L$이다.
따라서 L은 두 점으로 이루어진 전순서 집합 $\uparrow x_0$의 lax retract이다.

임의의 유계 하한 준격자 (bounded meet-semi lattice) 준동형 $\varphi : \uparrow x_0 \to T$는 frame 준동형이므로 filter $\uparrow x_0$는 filter compact이다. 따라서 L도 filter compact이다.

4.4. Remark. L은 최대원이 e인 frame이고 $\hat{e} \notin L$이다. $\hat{L} = L \cup \{\hat{e}\}$이고 L의 임의의

원소 x에 대하여 $x < \hat{e}$이면 우리는 다음을 얻는다.

1) $\hat{L}$은 frame이다.

2) $\bigvee_L \{x | x < \hat{e}\} = e \neq \hat{e}$이므로 $\hat{L}$은 super compact이다.

3) $\hat{L}$이 filter compact frame이므로 $\hat{L}$은 strongly Lindelöf frame이다.

4) L의 임의의 원소 a에 대하여 $a \in \mathfrak{L}(\hat{L})$ iff $a \in \mathfrak{L}(L)$이다.

5) $\hat{L}$이 stably 가산 근사 frame이면 $a, b \in \mathfrak{L}(L) \Rightarrow a \wedge b \in \mathfrak{L}(L)$이다.

4.5. Remark. Ω는 제 1 비가산 순서수이고, $[0, \Omega)$는 보통 순서 $\leq$에 대한 전순서 집합이다. $[0, \Omega)$ 안의 임의의 점 x에 대하여 $T = [0, \Omega) \bigcup \{z_1, z_2\}$, $x \leq z_1, z_2$로 정의하면 $\mathfrak{D}T = \{U \subseteq T | \emptyset \neq U = \downarrow U\}$는 frame이고 $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}T) = \{T, \downarrow z_1, \downarrow z_2\} \bigcup \{\downarrow x | x \in [0, \Omega)\}$가 된다. $L = \mathfrak{D}T$라고 하면, Remark 4.4의 3)에 의하여 $\hat{L}$은 strongly Lindelöf frame이다. 그러나 $a = \downarrow z_1$, $b = \downarrow z_2$, $c = \downarrow \Omega = [0, \Omega)$일 때 $a, b \in \mathfrak{L}(L)$이지만 $a \wedge b = c \notin \mathfrak{L}(L)$이므로 $\hat{L}$은 stably 가산 근사 frame은 아니다.

참고 문헌

1. B. Banaschewski, S. S. Hong, "Filters and strict extensions of frames," *Kyungpook Math. J.* 39(1999), 215-230.
2. B. Banaschewski, S. S. Hong, "Variants of compactness in pointfree topology," preprint.
3. B. Banaschewski, A. Pultr, "Adjointness aspects of the down-set functor," *Appl. Categ. Structures* 9(2001), 419-436.
4. G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawsonm, M. Mislove, D. S. Scott, *A Compendium of Continuous Lattices*, Springer-Verlag, 1980.
5. C. R. A. Gilmour, "Realcompact spaces and regular σ-frames," *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 96(1984), 73-79.
6. P. T. Johnstone, *Stone Space*, Cambridge Univ. Press, 1982.
7. S. O. Lee, "On Countably Approximating Lattices," *J. of KMS* 25(1988), 11-23.
8. S. O. Lee, "Countably Approximating Frames," *Comm. Korean Math. Soc.* 17(2002), No. 2, 295-308.
9. J. Madden, J. Vermeer, "Lindelöf locales and realcompactness," *Math. Proc. Cam-*

bridge Phil. Soc. 99(1986), 478-480.

10. D. S. Scott, "Continuous Lattices," *Lect. Notes in Math.* 274(1972), Springer-Verlag, 97-136.
11. 이승온, "Continuous Frames and Countably Approximating Frames," *KJHM* 13(2000), No. 2, 95-104.