KJHM Vol. 16, No. 1, 2003, 9-16

중국 및 조선시대 산학서에 나타난 원주율과 원의 넓이에 대한 고찰

한국수학사학회 **장혜원**

Abstract

This paper aims to investigate how Chinese and Korean evaluate π and measure the area of circle by reviewing the problems in the old mathematical books. The books are *Gu-Jang-San-Sul*(The nine chapters on the mathematical art) for China and *Gu-Il-Jib* for Chosun Dynasty. The result shows that our ancestors used the different values of π in relation to the accuracy and the various methods for measuring the area of circle.

0. 머리말

어느 시대, 어느 지역에서 원주율에 대한 근사값을 얼마로 정하여 사용하였는가 하는 것은 수학사를 연구하는 사람들에게 매우 흥미로운 문제이다. 왜냐하면 그 근사값의 정확도는 당시 그 지역의 수학적 활동의 발전 정도를 대변해주는 것으로 인식되기 때문이다. 사실상 원주율의 개념은 이론적인 관심에서 출발했다기보다는 원의 둘레를 측정하는 경험에서 자연스럽게 파악된 지름에 대한 비의 불변성에 기인하며, 차후 넓이를 구하는 방법을 고안하는데 그것을 이용하고, 점차 보다 정확한 값을 구하려 했다고 보는 것이 적절하다. 예컨대 고대 문명권의 대부분 지역에서 보다 정확하게 구한 값이 있었음에도 불구하고 오랜 동안 3을 원주율로 사용하였다는 사실은 이러한 실용적 경향에 대한 추정을 뒷받침한다. 마치 고성능 컴퓨터 시대의 우리는 시간적, 경제적 제한만 없다면 π의 근사값을 원하는 만큼 정확하게 계산할 수 있지만 실제로 원의 넓이, 둘레를 구할 때에는 편의상 3.14라는 근사값을 사용하고 있는 것과 같은 이치이다.

그러나 실용성에 기초한 생각이 충만했던 중국의 수학 활동에서도 실제적인 원주 및 원의 넓이 계산과 별도로 원주율에 대해 보다 정확한 근사값을 구하고자 했던 노력이 몇몇 문헌

에서 발견되며, 그에 의하면 꽤 정밀한 수준까지 규명하려고 했던 것으로 알려진다.

본 고에서는 중국 수학에서 원과 관련한 개념 및 원주율의 발달 과정을 고찰하고 중국 최고의 산학서 **구장산술**(九章算術)에 담긴 문제를 통해 옛 중국에서 사용된 원주율과 원의 넓이 측정 방법을 알아본다. 그리고 중국 수학의 영향을 받은 조선시대의 산학서인 **구일집**(九一集)에서 다루고 있는 원주율과 원의 넓이 측정 방법을 통해 우리나라의 산학 연구 수준을 파악하고자 한다.

1. 중국 수학에서 원과 원주율, 원의 넓이

중국의 수학은 산술 및 대수 지향적이었으며 특히 기하와 관련하여 유클리드식의 공리적, 연역적 전개는 찾아볼 수 없다. 다시 말해, 중국 수학의 실용적 특성이 기하에도 그대로 적용되어 기하 관련 내용은 주로 밭의 넓이를 측정하는 문제를 다룬다. 예컨대 원 모양의 땅의 넓이를 측정하려는 필요에서 그 방법을 고안해야 했고, 원의 지름과 둘레 사이에서 파악된 불변성에 기초하여 부수적으로 원주율의 개념을 정했던 것으로 생각할 수 있다.

그럼에도 불구하고 기원전 330년경으로 거슬러 오르는 **묵경**(墨經)에서 유클리드식의 연역적 전개의 일부로 간주할 수 있는 정의가 발견된다. 본 고와 관련하여 원, 중심과 지름, 반지름에 대한 정의 및 성질은 다음과 같다.[5, p. 94]

원: 원은 그 둘레의 임의의 점에 기초한다.

중심과 원주(지름): 원은 중심을 지나는(그리고 원주에 닿는) 모든 선분이 같은 길이를 갖는 도형이다. 원은 컴파스로 그릴 때 시작하는 점에서 끝나는 선이다.

중심과 원주(반지름): 원에는 중심이 있어, 거기서 원주 상의 어느 점까지든 그 거리가 동일하다. 중심은 핵심과 같아서, 거기서 시작하여 원주 상의 어느 지점까지 움직이는 점은 모든 경우에 같은 거리를 가게 된다.

이로부터 중국 수학에도 실용성과는 다른 차원의 것이 있었음을 발견할 수 있다. 적어도 묵가(墨家)들은 서구적인 영향과는 별도로, 실용적 측면에서 철학적, 이론적인 측면으로 넘어가는 과도적 특성을 지녔다고 해석할 수 있다.

한편 원주율과 관련한 중국 산학서의 기록[5, pp. 99-102]은 원의 지름과 둘레의 비가 일정하다는 사실에 대한 인식에서 출발하여 그 근사값을 다양하게 사용한 흔적을 보여준다. 기원전 2000년 경 고대 이집트와 바빌로니아 지역에서 3.1604 또는 3.125와 같은 값을 사용했다는 증거가 있긴 하지만 보통 원주율로 사용한 대략적인 값은 간단히 3이었던 것과 마찬가지로, 기원전 10세기에 시작된 주나라의 역사를 담고 있는 주례(周禮)와 한(漢)대(B.C.202~A.D.220)의 두 걸작 **주비산경**, **구장산술** 등을 통해 중국에서도 원주율의 근사값으로 수

세기 동안 사용된 값은 3이었음을 알 수 있다.

보다 정확한 값을 찾고자 했다는 기록은 1~5세기 고고학적 관심의 대상인 정복자 왕망을 위해 유흠(劉歆)이 만든 가량곡(嘉量斛)의 표준 측도에서 발견된다. 이것은 청동 원기둥으로부터 정육면체 공간을 파낸 것인데, 거기 새겨진 내용으로부터 유흠은 원주율로 3.154를 사용했음을 알 수 있지만 어떻게 해서 그 값을 얻었는지에 대한 기록은 없다.

보다 명확하고 체계적인 노력은 130년 경 장형(張衡)에 의한 것으로, 후한서(後漢書)에 따르면 그는 '하늘과 땅에 그물을 던져 (운동과 차원을) 계산했다.' 아마도 그가 사용한 원주율은 분실된 책인 산망론(算罔論)에 있겠지만, 우리는 구장산술에 대한 해설을 통해 3.1622 ($\sqrt{10}$에 해당)였음을 알 수 있다. 한편 3세기 삼국시대 오(吳)나라의 수학자이자 천문학자였던 왕번(王蕃)은 다시 계산하여 142/45, 즉 3.1555를 얻었다.

그러나 동시대(263년) 위(魏)나라의 유휘(劉徽)는 더 훌륭한 근사값을 찾았는데, 그의 방법은 아르키메데스의 내접다각형법의 변형으로, 원에 내접한 육각형에서 출발하여 192각형에 이르기까지의 넓이로부터 근사값 157/50, 즉 3.14를 얻었다. 또한 원주율의 참값의 범위로서 두 값 3.141024와 3.142704를 구하였는데, 이 상극한은 아르키메데스가 96각형을 사용하여 기원전 250년 경 발견한 22/7(3.1428)보다 더 나은 값이다. 유휘는 이 과정을 계속하여 3072각형까지 구하였고 그가 얻은 가장 정확한 값은 3.14159에 해당하는 분수이다. 그는 필요하다면 더 지속할 수 있음을 알았고 이 값은 150년 경 프톨레마이오스가 수용한 값(377/120=3.14166....)보다 더 정확하다.

따라서 그 당시 중국 수학의 수준은 그리스 수학 이상이었다는 추론을 가능하게 하며, 이러한 추론을 더욱 확고하게 하는 것은 5세기의 탁월한 수학자이자 천문가인 조충지(祖沖之: 430~501)의 업적 덕분이다. 그는 원주율로 두 개의 근사값을 제시하였다. 하나는 '대략적인' 것으로 약률(約率)이라 불리며 이 값은 아르키메데스의 것(22/7)과 동일하다. 다른 하나는 '정확한' 것으로 밀률(密率)이라 불리며 355/113, 즉 3.1415929203에 해당한다. 후자는 16세기 말까지 어디에서도 구하지 못한 값이다. 그러나 조충지는 정확도가 여전히 부족함을 의식하여 보다 정확한 근사값을 추구하였고, 결국 π값의 범위를 $3.1415926<\pi<3.1415927$로 제한하였다. 서양과 비교하면, 1593년에 비에트가 구한 값이 이 두 극한의 정확히 반에 해당한다. 당대의 수학자 이순풍(李淳風)은 조충지의 업적을 높이 샀고, 1300년 경 천체에 관한 책 혁상신서(革象新書)의 저자 조우흠(趙友欽)은 원의 내접다각형법을 16384각형에까지 적용함으로써 조충지의 값이 매우 정확함을 확인하였다.

조충지와 동시대에 인도에서 아라바타는 3.1416을, 이후 6세기 브라마굽타는 3.162($\sqrt{10}$)를 구했고, 유럽에서 프랑코는 11세기에 3.24를, 13세기에 피보나치는 3.141818을 사용했음과 비교할 때 중국의 원주율에 관한 연구 업적은 실로 위대한 것이었다. 특히 3세기의 유휘와 5세기의 조충지가 구한 값 157/50, 22/7은 주목할 만하다.

이제, 구장산술에 있는 문제를 통해 중국에서 사용된 원의 넓이를 구하는 방법에 대해 알아보자. 제1권 방전(方田)에 두 문제가 관련된다.

문제 지금 원전(원 모양의 밭)이 있다. 둘레가 30보, 지름이 10보일 때 넓이는 얼마인가?
[今有圓田 周三十步 徑十步 問爲田幾何]

답 75보 [答曰 七十五步]

문제 또 원전이 둘레 181보, 지름 60과 3분의 1보이다. 넓이는 얼마인가?
[又有圓田 周一百八十一步 徑六十步三分步之一 問爲田幾何]

답 11무 90과 12분의 1보 [答曰 十一畝九十步十二分步之一]

풀이 둘레의 반을 지름의 반과 곱하여 넓이를 얻는다. - [1]
[術曰 半周半徑相乘 得積步]

별해 둘레와 지름을 곱하여 4로 나눈다. - [2]
[又術曰 周徑相乘 四而一]

별해 지름을 제곱한 다음 3을 곱하여 4로 나눈다. - [3]
[又術曰 徑自 相乘三之 四而一]

별해 둘레를 제곱하여 12로 나눈다. - [4]
[又術曰 周自相乘 十二而一]

이상의 풀이 방법을 식으로 표현하면 다음과 같다.

[1] $\dfrac{(\text{원주})}{2} \times \dfrac{(\text{지름})}{2}$

[2] $\dfrac{(\text{원주}) \times (\text{지름})}{4}$

[3] $\dfrac{(\text{지름})^2 \times 3}{4}$

[4] $\dfrac{(\text{원주})^2}{12}$

오늘날의 기호, 즉 원주율 π, 반지름 r, 따라서 둘레는 $2\pi r$로 나타내면 다음과 같이 πr^2으로 동일한 결과를 초래함을 알 수 있다. 특히 방법 [3], [4]는 이용된 원주율이 3, 즉 고율임을 알려준다.

[1] $\dfrac{2\pi r}{2} \times \dfrac{2r}{2} = \pi r \times r = \pi r^2$

[2] $\dfrac{2\pi r \times 2r}{4} = \pi r^2$

[3] $\dfrac{(2r)^2 \times 3}{4} = 3r^2$

[4] $\dfrac{(2\pi r)^2}{12} = 3r^2$ (이때, $\pi = 3$)

2. 조선시대의 산학서 구일집에 나타난 원주율과 원의 넓이

구일집(九一集)은 중인 출신 산학자 홍정하(洪正夏)가 조선 왕조 숙종 때 저술한 산학서로서, 천, 지, 인의 세 권으로 이루어져있고, 각각은 다시 세 개의 장을 포함한다. 제 1 권인 '구일집 천(天)'의 제 1 장 3절 전무형단문(田畝形段門)은 여러 모양의 토지 측량 문제를 29개 담고 있는데, 그 중 세 문제를 통해 서로 다른 세 개의 원주율 및 원의 넓이를 구하는 세 가지 방법을 알 수 있다.

[1장 3절 8번] 지금 고원전이 있다. 둘레는 72보이고 지름은 24보이다. 넓이는 얼마인가?
[今有古圓田 周七十二步 經二十四步 問積若干]

답 432보 [答曰 四百三十二步]

풀이 원의 둘레와 지름을 서로 곱하여 나누어지는 수로하고 4로 나누면 된다.
[法曰 周經相乘爲實 四而一 得積合問]

별해 둘레를 제곱하고 지름의 법이 1을 곱한다.[저자 주: 5184를 얻는다.] 이것을 나누어지는 수로 한다. 한편 둘레의 법인 3을 4배하여 12를 얻어 이것을 나누는 수로 하여 나누면 된다.
[一法 置周自乘 又以經法一乘之 爲實 另列周法三以四因 得十二 爲法除之 亦得積]

별해 지름을 제곱하여 둘레의 법인 3을 곱하여 나누어지는 수로 한다. 한편 지름의 법인 1을 4배하여 4를 얻어 이것을 나누는 수로 하여 나누면 역시 넓이를 얻는다.
[一法 置經自乘 又以周法三乘之爲實 另列經法一以四因 得四 爲法除之 亦得積]

[1장 3절 9번] 지금 휘원전이 있다. 둘레는 314보이고 지름은 100보이다. 넓이는 얼마인가?
[今有徽圓田 周三百一十四步 經一百步 問積若干]

답 7850보 [答曰 七千八百五十步]

풀이 둘레와 지름을 서로 곱하여 4로 나누면 된다.
[法曰 周經相乘爲實 四而一 得積合問]

별해 둘레를 제곱하고 지름의 법인 50을 곱하여 나누어지는 수로 한다. 한편 둘레의 법인

157을 4배하여 628을 얻어 나누는 수로 하여 나누면 역시 넓이를 얻는다.
[一法 置周自乘 又以經法五十乘之爲實 另列周法一百五十七 以四因 得六百二十八 爲法除之 亦得積]

별해 지름을 제곱하여 여기에 둘레의 법인 157을 곱하여 나누어지는 수로 한다. 한편 지름의 법인 50을 4배하여 200을 얻어 나누는 수로 하여 나누면 역시 넓이를 얻는다.
[一法 置經自乘 又以周法一百五十七乘之爲實 又列經法五十 以四因 得二百 爲法除之 亦得積]

[1장 3절 10번] 지금 밀원전이 있다. 둘레는 44보이고 지름은 14보이다. 넓이는 얼마인가?
[今有密圓田 周四十四步 經一十四步 問積若干]

답 154보 [答曰 一百五十四步]

풀이 둘레와 지름을 서로 곱하여 4로 나누면 된다.
[法曰 周經相乘爲實 四而一 得積合問]

별해 둘레를 제곱하여 지름의 법인 7을 곱한다.[저자 주: 13552를 얻는다.] 이것을 나누어지는 수로 한다. 한편 둘레의 법인 22를 4배하여 88을 얻어 이것을 나누는 수로 나누면 역시 넓이를 얻는다.
[一法 置周自乘 又以經法七乘爲實 另列周法二十二 以四因 得八十八 爲法除之 亦得積]

별해 지름을 제곱하여 여기에 둘레의 법인 22를 곱하여 나누어지는 수로 한다. 한편 지름의 법인 7을 4배하여 28을 얻어 나누는 수로 하여 나누면 역시 넓이를 얻는다.
[一法 置經自乘 又以周法二十二乘之爲實 另列經法七 以四因 得二十八 爲法除之 亦得積]

이상의 세 문제로부터 조선시대 산학 활동에 사용된 원주율과 원의 넓이 측정 방법을 추론할 수 있다. 우선 원주율에는 고율, 휘율, 밀률이 있다. 앞에서 보았듯이 고율은 고대로부터 전해내려 온 것이고, 휘율은 유휘가 고안한 것, 밀률은 조충지가 고안한 것으로서, 각각 3, 157/50, 22/7[1]에 해당한다. 각 경우에 '지름의 법'과 '둘레의 법'을 1과 3, 50과 157, 7과 22로 한다는 설명에서, 결과적으로 원주율을 (둘레의 법)/(지름의 법)으로 간주하였음을 알 수 있고 이는 지름에 대한 원주의 비율이라는 오늘날의 생각과 같은 것이 당연하다. 이를 다음 표와 같이 정리할 수 있다.

원주율	근사값	지름의 법	둘레의 법	비고
고율	3	1	3	
휘율	157/50	50	157	3.14
밀률	22/7	7	22	

1) 엄밀히 말하면 이 값은 조충지의 원주율 중 대략적인 값인 약률에 해당한다.

한편, 원의 넓이를 구하기 위해 정확도에 있어 차이나는 세 개의 원주율 - 고율, 휘율, 밀률 - 을 모두 이용한다. 어느 원주율을 이용하는지 나타내기 위해 각각 고원전, 휘원전, 밀원전이라는 용어를 사용하며, 각각의 경우에 다음의 세 가지 방법이 적용되어 있다.

(1) $\dfrac{(\text{원주})\times(\text{지름})}{4}$

(2) $\dfrac{(\text{원주})^2\times(\text{지름의 법})}{4\times(\text{둘레의 법})}$

(3) $\dfrac{(\text{지름})^2\times(\text{둘레의 법})}{4\times(\text{지름의 법})}$

세 방법을 각각 오늘날의 표현을 빌어 원주를 $2\pi r$로, 지름을 $2r$로 써서 나타내면 역시 원의 넓이 공식 πr^2이 됨을 확인할 수 있다. 그러나 역으로 그러한 방법을 사용하게 된 이유에 대해서는 거듭된 측정 경험에 기초하여, 직접 측량 가능한 둘레 또는 지름에 대한 측정값을 이용하여 표시한 방법이라고 추정할 뿐이다.

이제, 중국과 조선시대의 방법을 비교하면, 중국의 방법 [2], [3], [4]가 조선시대의 방법 (1), (3), (2)에 각각 대응함을 알 수 있다. 중국의 [1]과 같은 방법은 조선시대에 나타나지 않는데, 식의 동치에 의해 방법 [2]와 동일시하여 별도로 의식하지 않은 것으로 보여진다.

한편 고율, 휘율, 밀률이 중국 수학의 산물이지만, 구장산술에서 본 중국의 풀이법에서는 고율만을 이용하는 것에 비해 **구일집**에서는 고율에 국한되지 않고 그 밖의 원주율을 사용한 문제를 다룸으로써 풀이법도 지름의 법, 둘레의 법에 따라 달리 서술되고 있다. 이러한 사실로부터 상황이 요구하는 정확도에 따라 원주율을 선택하여 계산하였을 우리 선조들의 과학적 융통성을 엿볼 수 있다.

3. 맺음말

본 고에서는 산학서 **구장산술**과 **구일집**에 실린 문제들을 통해 중국과 조선에서 π의 근사값을 얼마나 정확하게 구하였으며, 그것을 이용하여 원의 넓이를 어떻게 측정하였는지에 대해 고찰하였다. 3~5세기경 중국에서 구한 원주율의 근사값은 동시대 서양의 것보다 훨씬 정확하였으며 원의 넓이를 구하기 위해 다양한 방법을 사용하였음을 확인할 수 있다. 특히 조선시대의 우리 선조들은 여러 가지 방법으로 원의 넓이를 측정하였을 뿐만 아니라 세 가지 원주율을 고려함으로써 상황에 따라 적절한 정확도의 근사값을 선택하여 이용하였음을 추측할 수 있다.

이와 같은 수학사적 자료를 학교수학에서 활용할 수 있는 방안으로, 알고리즘의 타당성 검토를 통한 수학적 추론 능력의 향상과 문제해결에 대한 다각적 접근 등을 고려할 수 있

다. 본 고에서 인용한 문제들 역시 대부분의 산학서에 제시된 다른 문제들과 마찬가지로 왜 그러한 풀이법이 타당한지에 대한 설명이 없다. 문제 해법에 대해 알고리즘적 특성이 두드러지는 이러한 전개 양식을 수학교육적 관점에서 본다면, 개념적 접근의 결여를 지적하며 그러한 문제들을 배타적으로 다루는 것이 아니라, 학생들로 하여금 그 알고리즘의 타당성, 즉 왜 그러한 방법이 성립하는지에 대한 이유를 생각하게 함으로써 보다 충분한 개념적 이해의 기회로 삼고 수학적 추론과 같은 사고력을 양성하는 것에 초점을 맞추어야 할 것이다.

또한 수학적 개념에 대한 접근 및 문제 풀이 방법의 다양성을 경험하는 기회로 이용할 수 있다. π의 근사값과 관련한 역사적 과정을 언급하면서 그 속에서 근사값과 어림의 개념, 오차의 범위, 나아가 무한소수에 대해 다룰 수 있다. 그리고 선조들이 사용한 원의 넓이를 구하는 여러 방법을 다루면서 다양한 풀이법의 가능성을 음미하고 스스로 풀이법을 고안하는 경험도 해 볼 수 있다. 그러한 경험은 원주율 $\pi \fallingdotseq 3.14$, 원의 넓이에 대한 공식 πr^2만으로도 학교수학을 하는 데 별 불편이 없다는 경험과는 대조적으로 충분한 활용 가치가 있다고 생각한다.

참고 문헌

1. 홍정하, **구일집**, 한국과학기술사대계 수학편 2, 여강출판사. [서울대학교 도서관 소장]
2. **유휘**, **구장술해**, 한국과학기술사대계 수학편 6. 여강출판사. [서울대학교 도서관 소장]
3. ____, **구장산술**, [차종천 역, **구장산술 · 주비산경**, 범양사 출판부, 2000.]
4. Kangshen, S., Crossley, J.N., Lun, A.W.-C.,. *The Nine Chapters on the Mathematical Art*, Oxford university press, 1999.
5. Needham, J., Wang Ling, *Science and Civilisation in China.* Mathematics and the sciences of the heavens and the earth vol. 3, Cambridge at the university press, 1959.
6. Beckmann, P., *A History of pi*, 1976. [박영훈 역, **π의 역사**, 경문사]