韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2003, 8. 제 42권, 제 3호, 419-423.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2003, Vol. 42, No. 3, 419-423.

일표본 모평균 검정의 지도에 관한 연구[1)]

김 용 태 (단국대학교 대학원)
이 장 택 (단국대학교)

I. 서 론

μ를 모평균, s를 표본표준편차, n을 표본의 크기라고 표기하면, 모분산이 미지이고 한 정규모집단인 경우에 대학교의 기초통계과정에서 다루어지는 표본평균 $\overline{X}$를 표준화시킨 t-통계량

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \tag{1}$$

는 자유도가 n-1인 t분포를 따르며, 이 사실을 이용하여 모평균 μ에 대한 추정과 검정을 할 수 있다. 그런데 통계패키지를 사용하지 않고 이론적으로 서술된 대부분의 통계학 교과서들은 대표본과 소표본으로 각각 나누어서 대표본이면, 편의상 t분포를 사용한 임계치(t-임계치)를 표준정규분포를 이용한 임계치(z-임계치)로 바꾸어 사용하고 모집단이 비정규분포일 때에도 중심극한정리에 의해서 (1)식을 z-임계치로 바꾸어 처리하는 것을 제안하고 있다.

하지만 Pearson과 Please(1975)는 모집단의 왜도가 단측검정에 대해 제1종 오류에 영향을 미치는 것을 발견하였으며, Pocock(1982)은 극히 비대칭적인 L-모양 모집단에 대하여 통계량 t가 표본크기가 매우 큰 경우를 제외하고는 정규분포를 따르지 않는다는 사실을 확인하였다. 또한 Rhiel과 Chaffin(1996)의 연구에서는 모의실험을 통하여 대부분의 경우에 t-임계치를 사용한 t-검정법이 z-임계치를 사용한 z-검정법보다 더 로버스트 하다는 것을 보였고, 극도로 왜도가 큰 비대칭분포인 경우에는 t-검정법과 z-검정법 모두 로버스트 판단기준에 미치지 못한다는 것을 보였다.

그러므로 대표본과 소표본으로 각각 분리하여 일표본 모평균 검정을 수행하는 방법은 컴퓨터와 통계패키지를 쉽게 사용할 수 있는 오늘날에는 별로 적합하지 않을뿐더러 특정경우에는 심각한 오류를 범하게 된다. 따라서 본 논문에서는 기초과정의 통계학 강의를 할 때, 일표본 모평균 검정을 대표본과 소표본으로 각각 분리하여 설명하는 방법대신 보다 합리적인 교육 지도법을 제안한다.

본 논문의 구성은 I절 서론에서는 연구배경과 목적에 대하여 논의하고, II절에서는 모의실험의 과정과 결과를 비교 설명하였으며, 끝으로 III절에서는 본 연구의 결론을 제시하였다.

II. 모의실험의 과정 및 결과

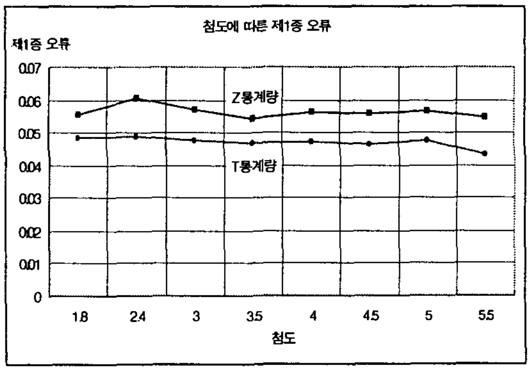
모의실험은 통계패키지 S-Plus 4.0과 SAS 6.12를 이용하였으며, 대표본과 소표본의 구분기준은 일반적으로 많이 사용하는 표본의 크기인 30개를 사용하였다. 그리고 다양한 첨도에 대한 영향을 살펴보기 위하여 고려한 분포로 첨도값이 1.8인 균등분포, 2.4인 삼각분포, 3인 정규분포 그리고 첨도값이 각각 3.5, 4, 4.5, 5, 5.5인 오염정규분포를 이용하여 각각 5000번 반복수행의 평균값인 추정된 제1종 오류값을 얻었다. 또한 오염정규분포의 경우는 두 정규분포를 혼합시켜 난수를 발생시켰으며, 각 분포의 반영 비율은 동등한 비율로 하고 설정된 첨도를 구하기 위해 두 정규분포의 모분산 값을 조정하여 수행하였다. 그리고 비대칭분포에 대한 왜도의 효과는 감마분포와 베타분포를 이용하여 살펴보았다. 아울러 일반성을 잃지 않고 검정에는 유의수준 0.05를 사용하였다.

---

1) 이 연구는 2002학년도 단국대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음.
* 2002년 9월 투고, 2003년 5월 심사 완료.
* ZDM분류 : K15
* MSC2000분류 : 97C70
* 주제어 : 일표본, t-검정법, z-검정법.

1. 대칭분포인 경우의 첨도의 영향

대칭이지만 첨도가 다른 여러 가지 확률분포를 이용하여 표본의 크기가 30개인 경우에 t-임계치와 z-임계치를 사용했을 때의 제1종 오류를 관측하여 <그림 1>와 같은 결과를 얻었다.



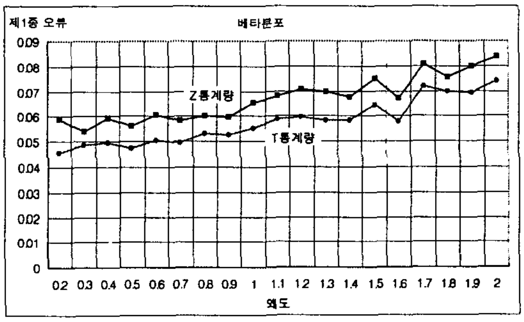
<그림 1> 대칭분포에서의 제1종 오류

<그림 1>로부터 추정된 제1종 오류는 대칭인 여러 분포의 첨도와 큰 연관성이 없음을 확인할 수 있으며 t-검정법이 z-검정법보다 더 작은 제1종 오류를 가지는 것으로 나타났다. 첨도가 5.5인 경우에는 t-검정법이 더 작은 제1종 오류를 갖지만 z-검정법이 실제 유의수준에 조금 더 근접한 것을 확인할 수 있으며, 첨도가 커지면서 제1종 오류가 조금씩 작아지지만 첨도의 변화에 매우 둔감하다는 사실을 확인할 수 있다.

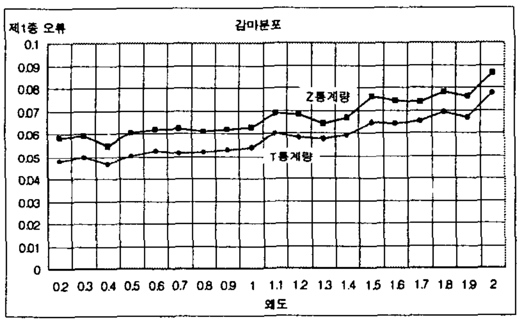
그러나 삼각분포를 이용하여 얻은 첨도 2.4인 경우를 제외하고는 모든 결과가 Bradley(1980)가 적용한 로버스트검정 판단기준인 유의수준의 20% 사이인 구간 (0.04, 0.06)에 속함을 확인할 수 있으며, 따라서 두 검정방법 모두 로버스트한 검정으로 판단되어진다. 한편 논문에는 생략되어 있지만 대칭분포인 경우에 다른 표본크기에 대해서도 거의 첨도의 영향을 받지 않음을 확인할 수 있었으며 이상을 종합하면 한 모집단의 모평균 검정에서는 제1종 오류에 대한 첨도의 영향을 무시하여도 된다고 판단되어진다.

2. 비대칭분포인 경우의 왜도와 첨도의 영향

비대칭분포인 경우에 제1종 오류가 왜도와 첨도의 영향을 어떻게 받는지를 알아보기 위하여 베타분포와 감마분포에서 표본크기 30개인 경우에 왜도 0.2부터 2.0까지 0.1씩 변화시켜가며 z-검정법과 t-검정법을 관찰하였다. 그 결과는 <그림 2>, <그림 3>과 같으며 베타분포와 감마분포 모두 같은 왜도에 대해서 거의 같은 결과를 보였다. 이 사실은 감마분포와 베타분포의 왜도값이 같더라도 첨도 값이 다르기 때문에 대표본에서는 제1종 오류는 대부분 왜도의 영향을 받는다는 사실을 확인할 수 있다. 또한 이 사실은 다른 표본크기에 대해서도 성립하여 같은 표본크기에서는 거의 왜도에 의하여 제1종 오류가 변화됨을 알 수 있었다.



<그림 2> 베타분포에서의 제1종 오류



<그림 3> 감마분포에서의 제1종 오류

3. 왜도와 제1종 오류

<표 1> 왜도에 따른 제1종 오류

왜도	t-검정법	z-검정법
0.0	0.0518	0.0608
0.5	0.0472	0.0584
0.6	0.0548	0.0656
0.7	0.0520	0.0600
0.8	0.0584	0.0716
0.9	0.0504	0.0592
1.0	0.0538	0.0650
1.5	0.0676	0.0764
2.0	0.0768	0.0854
3.0	0.0920	0.1016
5.0	0.1634	0.1728
10.0	0.3182	0.3252

<표 1>은 표본크기가 30개인 경우에 왜도와 표본크기에 따른 제1종 오류에 대한 결과를 보여주며, 왜도는 첨도가 미치는 영향과는 다르게 제1종 오류에 절대적인 영향을 미치는 것으로 나타났다. 이와 같이 왜도는 제1종 오류에 많은 변화를 가져오는 주 요인이 되고 있는데, 특히 z-검정법의 경우 왜도가 0인 대칭분포에서도 매우 큰 제1종 오류가 발생하는 것을 볼 수 있다. 그러나 t-검정법의 경우에는 왜도가 1이 되더라도 로버스트 범위를 초과하지 않았다. 왜도가 2를 초과하는 경우에 있어서는 t-검정법인 경우에도 극심한 제1종 오류를 발생시킨다.

왜도가 10인 경우의 추정된 제1종 오류값은 Hogg와 Craig(1995)가 제시한 매우 치우친 분포로부터 정규분포를 이용하여 신뢰계수를 계산하는 경우에 95%이기 보다는 70%에 보다 가깝다고 한 결과와 거의 일치한다고 볼 수 있다.

<표 2> 왜도에 따른 표본크기

왜도	t-검정법	z-검정법
0.0	5	24
0.5	5	26
0.6	5	30
0.7	5	30
0.8	10	40
0.9	14	45
1.0	14	50
1.5	40	100
2.0	100	100
3.0	200	200
5.0	500	1000
10.0	5000	5000

<표 2>는 왜도의 변화에 대응되는 t-검정법과 z-검정법을 사용하기 위한 적절한 표본의 크기를 제시하며, 모의실험 결과 추정된 제1종 오류가 Bradley(1980)가 제시하는 로버스트 범위인 0.4에서 0.6 이내에 속하는 표본크기를 기록한 것이다. <표 2>를 통하여 왜도가 2 미만이면 t-검정법을 사용하는 것이 z-검정법을 사용하는 것보다 훨씬 효율적임을 알 수 있다. 왜도가 2 이상인 경우에는 z-검정법이나 t -검정법 모두 효율성에 큰 차이가 없는 것으로 나타났다. 한편 본 논문에는 소개되어 있지는 않지만 유의수준 값을 0.1로 바꾸어서 조사한 결과도 거의 비슷한 사실을 확인할 수 있었다.

4. 왜도와 표본크기에 따른 제1종 오류

<표 3>은 왜도와 표본의 크기에 따른 제1종 오류에 대한 결과이다. 왜도가 0.8, 1인 경우의 t-검정법은 표본크기가 작은 경우를 제외하고는 대략 로버스트하다고 할 수 있으나 왜도가 1.5인 경우에는 표본크기가 40인 경우부터 로버스트 범주기준에 포함되는 것을 확인할 수 있다.

<표 3> 왜도와 표본의 크기에 따른 제1종 오류

	왜도					
	0.8		1.0		1.5	
표본 크기	t-검정	z-검정	t-검정	z-검정	t-검정	z-검정
5	0.065	0.140	0.072	0.148	0.093	0.165
7	0.063	0.112	0.066	0.110	0.082	0.128
10	0.059	0.099	0.063	0.099	0.080	0.116
14	0.058	0.074	0.059	0.077	0.072	0.093
20	0.059	0.073	0.051	0.067	0.068	0.087
30	0.057	0.071	0.053	0.065	0.067	0.076
35	0.056	0.064	0.056	0.064	0.063	0.072
40	0.048	0.056	0.056	0.063	0.060	0.068
45	0.051	0.058	0.052	0.061	0.058	0.064
50	0.050	0.055	0.055	0.060	0.058	0.063
100	0.046	0.049	0.051	0.053	0.058	0.060
300	0.048	0.049	0.050	0.051	0.058	0.060

III. 결 론

본 논문에서는 모의실험을 통하여 일표본 모평균 검정에서 첨도와 왜도의 변화에 따른 제1종 오류와 왜도에 따른 다양한 표본크기에서의 제1종 오류 변화과정을 살펴보고, Bradley(1980)의 로버스트 범위기준을 이용한 t-검정법 및 z-검정을 적용할 수 있는 표본크기를 연구하였다. 연구결과 제1종 오류의 주 변화 원인이 왜도 임을 확인할 수 있었으며 분포가 아주 심하게 치우치지만 않는다면 t-검정법을 사용하는 것이 z-검정법 보다는 훨씬 효율적인 것을 확인할 수 있었다.

따라서 일표본 모평균 검정을 지도할 때 "표본크기와 확률분포에 제한을 두지 말고 자료의 왜도를 구하여 그 값이 1 미만이 되면 t-검정법을 사용하고, 왜도의 값이 1 보다 큰 경우에는 자료의 변환이나 비모수 통계기법의 사용을 고려하는 것이 바람직하다."라고 하는 것이 훨씬 합리적이라고 간주되어진다.

참 고 문 헌

Bradley, J. V. (1980). Nonrobustness in Z, t, and F Tests at Large Sample Sizes, *Bulletin of the Psychonomics Society* **16(5)**, pp.333-336.

Hogg, R. V. & Craig, A. T. (1995). *Introduction to Mathematical Statistics* (5th Ed.), Prentice-Hall, 1995.

Pearson, E. S. & Please, N. W. (1975). Relationship Between the Shape of Population Distribution and Robustness on Four Simple Testing Statistics, *Biometrika*, **62**, pp.223-241.

Pocock, S. J. (1982). "When Not to Rely on the Central Limit Theorem - An Example from Absentee Data", *Communications in Statistics, Part A -Theory and Methods* **11(19)**, pp.2169-2179.

Rhiel, G. S. & Chaffin, W. W. (1996). An Investigation of the Large - Sample / Small Sample Approach to the One - Sample Test for a Mean (Sigma Unknown), *Journal of Statistics Education* [Online], **4(3)**.

A Study on Teaching Method of One-Sample Test for Population Mean

Kim, Yong Tae & Lee, Jang Taek
Division of Information and Computer Science, Dankook University,
Yongsan-ku, Hannam-dong, Seoul, 140-714, Korea
E-mail : jtlee@dankook.ac.kr

The main purpose of this paper is to investigate effects of skewness and kurtosis on the one-sample test. We have found that type I error brought about a little bit change which is ignorable in relation to kurtosis. Also the change of type I error was completely based on skewness under the same size of the sample. We conclude that using t-test is more similar to robust than using z-test.

In introductory statistics classes where data analysis includes techniques for detecting skewness, we recommend the t-test when skewness is smaller than the value 1 to the one-sample test for a mean when the variances is unknown using the probability of a type I error as the criterion of interest.

* ZDM classification : K15
* 2000 Mathematics Classification : 97C70
* key word : one-sample, t-test, z-test.