韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2003, 8. 제 42권, 제 3호, 387-402.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2003, Vol. 42, No. 3, 387-402.

오일러 알고리즘의 안내된 재 발명*
-RME 기반 미분 방정식 수업에서 점진적 수학화 과정 분석-

권 오 남 (서울대학교)
주 미 경 (이화여자대학교)
김 영 신 (이화여자대학교 대학원)

"현실적 수학교육(Realistic Mathematics Education, 이하 RME)" 철학은 경험적으로 실제적인 맥락문제를 통해 학생들의 비형식적인 해결전략과 해를 고려하는 안내된 재발명에 초점을 두고 있다. 이 연구에서는 RME 철학을 대학미분방정식 교수설계에 교수학적 원리로 적용함으로써 지난 20 여 년간 진행되어온 미분방정식 교육 개혁을 보완하는 방안을 찾고자 하였다. 특히, 미분방정식의 수치적 접근법에 초점을 두어 학생들이 오일러 알고리즘을 재발명하고 구성하는 이해의 발달과정을 묘사하고자 하는 것이 이 연구의 목적이다. 이를 위해 먼저 RME 철학에 대한 이론적 분석을 하고, RME의 "안내된 재발명" 교수학적 설계 발견술에 초점을 두어 1계 미분방정식의 근사해 함수에 대한 학생들의 추론과정을 탐구하는 개발연구와 그 과정을 소개하였다. 마지막으로 학생들의 사고와 기호 사용을 질적으로 분석함으로써 RME의 "안내된 재발명"원리가 학생들의 오일러 알고리즘의 재발명을 어떻게 안내하고 있는가를 묘사하였다. 이 연구를 통해 현실적 수학 교육 철학에 입각한 교수 설계가 학생들이 오일러 알고리즘에 대해 심층적인 이해와 그들의 수학적 신념과 태도 형성에 긍정적인 영향을 주었음을 발견하였다. 이와 같은 연구 결과는 미분 방정식을 비롯하여 다른 대학 수학교과에도 적용하여 대학수학 교육과정과 교수설계의 아이디어를 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

1. 서 언

최근 미분방정식 교육에서는 미적분학 교육 개혁의 결과와 테크놀로지 발달에 기초하여 미분방정식의 개념과 그 분석방법의 지도에서 근본적인 변화를 시도하는 교육 개혁이 이루어지고 있다. 이러한 개혁 지향적 미분방정식 교육에서는 특정유형의 미분방정식 해결에 필요한 지필 기술 획득에 초점을 전통적인 미분 방정식 교육과 달리, 실세계와 관련된 다양한 미분방정식의 분석에 필요한 그래프적 방법과 수치적 방법의 통합을 시도하고 있다. 그러나 Rasmussen(1999)이 지적한 바와 같이 학습 초기부터 그래프와 수치적 방법을 사용한다면, 학생들은 그래프와 수치적 아이디어의 재발명과 구성과정에 참여하지 못한 채 무의미한 기호조작을 하는 것에 그치게 되며 이러한 미분방정식 개혁 노력은 결국 전통적 접근과 크게 다를 바가 없게 된다. 또한 학습자의 미분방정식의 분석 방법과 추론의 특성을 조사한 연구는 소수이며 미분방정식에서 교육과정과 교수개혁을 위해서는 학습자의 수학적 발달을 촉진할 수 있는 학습과정을 검토할 필요가 있다고 언급하였다. 따라서 이 논문에서는 이러한 개혁미분방정식의 비판점에 대한 방안으로, RME의 이론적 틀을 대학에서 미분방정식에 적용함으로써 대학수학 교수학습의 새로운 방향을 탐색하고자 한다. 특히 RME 원리를 반영한 대학 미분 방정식 수업에서 학생들이 오일러 알고리즘을 안내된 재발견을 통해 구성

* 이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2002-041-B00468).
* 2002년 9월 투고, 2003년 4월 심사 완료.
* ZDM분류 : B45, B59
* MSC2000분류 : 97-02, 97B40
* 주제어 : 대학수학교육, 현실적 수학교육.

하는 과정에 초점을 두어 수치적 방법에 대한 학생들의 개념적 이해와 추론적 능력의 발달 과정을 묘사하고 교수 방법이 그 발달과정에 기여하는 바를 논의하였다.

이를 위해 먼저 RME 원리에 대한 이론적 분석을 하고, RME의 "안내된 재발명"의 교수학적 설계발견술에 초점을 두고 1계 미분방정식의 근사해 함수에 대한 학생들의 추론과정을 탐구하는 개발연구와 그 과정을 소개하였다. 마지막으로 미분 방정식 수업 상황에서 나타나는 학생들의 수학적 토의와 기호사용을 분석함으로써 RME의 안내된 재 발명원리가 학생들의 오일러 알고리즘의 재 발명을 어떻게 안내하고 있는가를 묘사하였다.

2. RME의 기본원리

RME는 '인간활동으로서의 수학'이라는 프로이덴탈의 관점에 그 뿌리를 두고, 점진적인 수학화를 통한 "안내된 재발명", "교수학적 현상학", 그리고 "발생모델"을 그 핵심원리로 삼고 있다(Gravemeijer, 1997). RME 원리가 반영된 교실에서 학생들은 실제적 현상, 즉 문맥문제와 같이 수학적으로 학생들에게 실제적인 문맥으로부터 주제를 수학화 함으로써 그리고 그들 자신의 수학적 활동을 수학화 함으로써 수학을 학습한다. 맥락문제와 수학화에 대한 강조는 RME 뿐만 아니라 최근 진행중인 미분방정식 교육 개혁에서도 핵심적인 역할을 하고 있다. 또한 RME는 수학화와 관련된 안내 발견술(guiding heuristic)을 제공한다는 강점을 가지고 있다(Rasmussen, 1999). 따라서, 이 장에서는 RME의 핵심원리들을 보다 규범적인 방법인 교육적 발달을 위한 발견술의 관점에서 설명하고자 한다.

(1) 점진적 수학화를 통한 안내된 재발명

"안내된 재발명"에 따르면, 학생들에게 수학이 발명되는 과정과 유사한 과정을 경험하기 위한 기회가 주어져야 한다. 학생들이 의도된 수학을 스스로 발견하도록 하기 위한 세밀한 계획이 세워져야 하며, 개발자는 이를 위해 학생들이 스스로 결과에 도달할 수 있는 경로를 그리는 것으로부터 출발한다. "재발명" 원리는 학생들의 비형식적 해결과정에 의해 촉구될 수 있다. 즉, 학생들의 비형식적 전략은 보다 형식적인 과정을 예견하는 것으로서 설명될 수 있으며, 유사한 해결과정을 수학화하는 것은 재발명 과정을 위한 기회를 만든다. 따라서, 일반적으로 다양한 해의 과정을 요구하는 맥락문제의 발견을 필요로 하며, 이미 고려된 맥락문제는 점진적 수학화의 과정을 통한 가능한 학습경로를 지시한다(Gravemeijer, 1997).

이와 같이 점진적 수학화를 통한 안내된 재발명 원리에서는 맥락문제가 점진적 수학화의 토대가 된다(Freudenthal, 1991). 학생들은 맥락문제를 토대로 경험적으로 실제적인 상황으로부터 비형식적인 해결 전략을 개발해 나간다. 이 때, '실제적'이란 학생들에게 경험적으로 실제적인 상황에 있는 수학적 지식의 토대를 언급하는 것이므로 맥락문제가 반드시 일상생활의 상황을 다룰 필요는 없다. 중요한 것은 문제가 상황화되는 맥락내에서 학생들이 지적으로 활동할 수 있게 하기 위해서 맥락이 학생들에게 경험적으로 실제적이어야 한다는 것이다(Gravemeijer, 1997). 따라서 학생들의 비형식적 전략을 시작점으로 택하여 학생들로 하여금 수학이 발명되는 과정과 유사한 과정을 경험하도록 하면서 점진적 수학화에 의해 더 형식적인 전략을 재발명하도록 안내하는 일이 중요하다.

Gravemeijer(1997)에 의하면, 재발명 과정은 장기간의 학습과정이다. 분리된 학습단계로서 잘게 잘라진 학습경로인 학습순서와는 다르게 재발명의 과정은 점진적인 변화의 과정으로서 전개된다. 그러므로, 중간 단계는 그 자체로서의 목적이 아니라, 항상 장기적인 관점에서 파악되어야 한다. 수준구조의 개념에 따라 안내된 탐구에 강조점이 주어져야 한다. 개발자의 과제 중 하나는 일련의 적절한 문제를 설계함으로써 이러한 안내를 해석하는 것이다. 이 때 학습자에게 이미 정의된 구조를 제시하지 않고 수학적 지식을 개발하는 과정으로 안내하는 방법에 대한 문제가 제기될 수 있다. Treffers(1987)에 의하면 다음의 다섯 가지 구체적인 원리를 통해 "안내된 재발명" 원리가 구현될 수 있다. 첫째, 맥락문제의 사용이다. 모든 문제를 학생들이 지적으로 이해하여 다룰 수 있는 맥락에 놓음으로써, 맥락문제를 형식적 조작과 기호의 시작점이 되도록 한다. 둘째, 수직적 도구에 의한 연결이다. 수직적 도구의 역할을 하는 모델과 전략이 문제해결 과정에서 발생되고, 발생된 모델과 전략은 직관적인 비형식적 전략으로부터 더 추상적인 절차로 발달하며, 직

관적 수준과 형식적 수준사이의 차이를 연결해 준다. 셋째, 학생들의 구성활동이다. 학생들은 구성활동을 통해서 수학화 과정에서 핵심 역할을 하면서 형식적인 수학적 개념, 연산, 구조를 학습해 간다. 따라서 학생 자신의 구성으로부터 새로운 전략이 만들어지고 자신의 구성활동에 대한 반성적 사고가 촉진될 수 있다. 넷째, 상호작용이다. 학생들의 비형식적 방법은 대안적 전략을 토론하고 반성하는 구성적 학습과정에 필요 요소가 된다. 다섯째, 학습영역(learning strands)의 연결이다. 학습영역은 분리된 실체로서 다뤄지지 않고 서로 연관되고 통합되어 수학적 지식과 기능이 하나의 구조화된 전체로 조직된다. 지금까지 Treffers(1987)가 제안한 "안내된 재발명"을 위한 다섯 가지 원리는 결국 학생의 관점에서 시작해 반성, 토론, 그리고 다양한 해결을 해나가는 학습자 중심의 학습과정에서 점진적 수학화 과정이 이루어져 나감을 시사한다.

(2) 교수학적 현상학

RME의 두 번째 기본원리는 "교수학적 현상학"이다. 프로이덴탈(1983)의 교수학적 현상학에서 수학적 개념의 현상학이란 개념이 조직하는 현상과 수학적 개념 사이의 관계를 교수학적 측면에서 논하는 것이다. 교수학적 현상학을 따르기 위해서는 점진적 수학화 과정을 위해 수학이 적용되는 상황이 조사되어야 한다. Gravemeijer (1994a)에 의하면 교수학적 현상학의 목표는 개념을 조직하여 수직적 수학화를 촉진할 수 있는 상황을 찾는 것이다. 즉, 현상학적 방법을 통해 현상과 본질의 관계가 교수학적 측면에서 논해짐으로써 교실에서 만들어질 수 있는 현상학적으로 적절하며 학생들에게 경험적으로 실제적인 상황을 찾는 것이 교수학적 현상학의 목표라고 할 수 있다. 프로이덴탈(1983)은 이러한 실제적인 상황을 찾는 이유에 대해서, 교육에서 예상되어져야 하는 적용을 나타내기 위해, 그리고 점진적인 수학화의 과정을 위한 효과 면에서의 적절성을 고려하기 위해 조사되어진다고 언급하였다. 만약 우리가 수학을 실용적인 문제의 해결로부터 역사적으로 발달하는 것으로 본다면, 최근의 적용에서 이러한 과정이 발생하는 문제의 발견을 기대하는 것은 정당하다. 또한 형식적인 수학은 다양한 상황에 대한 개념과 특정상황의 문제해결절차를 일반화하고 형식화하는 과정으로부터 발생한다고 생각할 수 있다. 그러므로 특정한 접근이 예견되어 질 수 있는 상황에 대한 문제 상황을 발견하고 수직적 수학화를 조장할 수 있는 전형적인 해결절차가 발생할 수 있는 상황을 발견하는 것은 현상학적인 조사의 목적이 될 것이다(Gravemeijer, 1997).

교수현상학적 분석의 정교함은 자유 생산물(free productions)에 대한 아이디어와 잘 일치한다(Streefland, 1991). 어떤 종류의 맥락문제들을 학생들에게 소개한 후에 유사한 문제를 일반화하도록 요구할 수 있다. 자유생산물들을 만드는 것은 이전의 활동에 대한 반성을 요구하므로 학생들에게 유익하며, 학습과정의 추이에 사용될 수 있는 통찰, 개념, 비형식적인 전략을 보여줄 수 있으므로 개발자에게도 또한 유익하다.

(3) 발생모델

"발생모델" 원리는 학생들이 그들의 비형식적 수학활동의 기호모델을 창조할 수 있다는 것이다. Gravemeijer (1994a)에 의하면 비형식적 상황에서 만들어진 상황의 모델(model of)에서 수학화를 통해 만들어진 추론을 위한 모델(model for)로의 전이는 Ernest(1991)가 언급한 '주관적인 수학 지식의 발생(genesis)'과 유사하다[1]. 상황의 모델에서 추론을 위한 모델로의 전이 단계에서 일반화, 추상화, 실재화를 통한 수학적 지식의 발생과정을 찾아볼 수 있다. Gravemeijer(1997)는 비형식적 지식과 형식적 수학 사이의 차이를 메꾸어 주는 역할을 하는 발생모델은 학생들에게 친근한 상황의 모델이 만들어진 후 일반화와 형식화 과정을 통해 다음과 같은 네 수준을 거쳐서 수학적 추론을 위한 모델이 만들어진다고 주장하였다.

첫째, 상황적 수준(situational level)은 상황적 지식과 전략이 상황의 맥락, 주로 학교 밖의 일상적 생활의 맥락 내에서 사용되는 수준으로 학생들은 주어진 과제의 상황에서 활동하면서 문제를 해결하는 방법을 이해한다.

둘째, 참조적 수준(referential level)에서의 모델과 전략은 문제, 주로 학교내부의 상황에서 구성된 문제에서

1) Ernest는 주관적인 수학적 지식은 개념과 성질의 정교화(elaboration), 세련화(refinement)를 포함하는 수평적 과정과 일반화, 추상화, 실재화(reify)를 포함하는 수직적 과정에 의해 발생된다고 제시하였다(Ernest, 1991).

묘사된 상황에 주목한다. 이 때 학생들에게 경험적으로 실제적인 구체적 상황을 기반으로 하며 모델은 상황과의 관계로부터 수치적 의미를 추출하고 상황 수준의 해결전략에 대응하는 비형식적인 전략을 뒷받침하는데 사용된다.

셋째, 일반적 수준(general level)에서는 맥락에 대한 참조보다는 전략 자체에 수학적 초점이 놓인다. 따라서 모델의 역할이 변하고 전략은 수학적 시각으로 보아 더 이상 문제 상황과의 관계에 의존하지 않는다. 모델은 보다 일반적인 특징을 얻고 수학적 추론을 위한 기초로서 중요성을 가지게 되어 형식적 수학 수준을 위한 참조적 기초가 된다. 학생들은 상황과 독립적인 해석과 해결을 요하는 일반적 활동을 통해 추론을 위한 모델을 만들어 나간다.

넷째, 형식적 수준(formal level)에서는 형식적인 절차와 표기를 가지고 수행을 하는 기호화가 이루어진다. 상황의 모델에서 추론을 위한 모델이 개발되어 가는 과정에서 알 수 있듯이 RME가 지향하는 교육은 학생들이 비형식적 해결 중에 발생하는 모델이 형식적 수학을 위한 참조적 토대가 되어 가는 상향식 접근(bottom up approach)을 취함을 알 수 있다.

이상에서 RME의 핵심 원리 세 가지를 고찰해 보았다. 학생들에게 경험적으로 실제적인 현상을 제시해 주어 교사의 안내에 의해 상황모델에서 추론모델로의 발생단계를 거치면서 학생들 스스로 수학적 구조를 재 발명하게 하는 것이 곧, 인간 활동으로서의 수학을 경험하게 되는 과정이다. 그러나 여기서 고려해야 할 점은 RME 원리를 실현하기 위한 교육을 설계할 때 학생들 스스로 재발명하게 하는 것과 학습과정을 교사가 안내하는 것 사이에서 갈등이 존재할 수 있다는 것이다. 따라서, 다음 절에서는 교육과정을 이행할 때 발생할 수 있는 이러한 갈등을 해결하기 위해, 사고실험(thought experiment)[2]과 교수실험(teaching experiment)[3]이 순환적으로 이루어지는 개발연구(developmetal research)[4]를 사용한 RME 교수설계에 대해 고찰해 보고자 한다.

3. 개발연구를 통한 RME 교수설계

RME 원리를 기반으로 한 교수를 설계할 때 학생들이 스스로 재발명하게 하는 것과 교사가 학습과정을 안내하는 것 사이에서 일어날 수 있는 갈등이 해결되어야 함은 중요한 문제이다. 한편 수학교육에 대한 시각의 변화는 개인이 구성한 수학적 실제의 발달에 참여하는 것을 학생의 핵심 역할로 보아 학생들의 추론을 분석하는 데 관심을 둠과 동시에 수학활동의 사회 문화적 측면을 인정하여 학생들의 활동이 교실 소문화 내에서 그리고 수학교육에서 개혁을 구성하는 더 넓은 활동체계 내에 개인이 위치하는 것으로 보게 되었다. 또한 이론과 실행 사이의 반사적 관계를 강조해서 이론이 실행을 통해서 나오고, 실행에 근거해서 피드백 되는 관계에 초점을 두게 되었다(Cobb, 2000). Cobb는 이러한 대안적인 관점을 발생관점(emergent perspective)이라고 부르고, 여기서의 핵심가정은 학습은 능동적인 개인의 구성과 수학의 문화화(enculturation)의 과정으로 특징지을 수 있다고 하였다. 즉, 학생들의 수학적 활동을 사회적으로 상황화된 것으로 봄으로써 심리적 접근만을 취하는 시각을 초월한 것이다. 이러한 관점이 함의하고 있는 바는 RME 이론을 기반으로 한 교수를 설계할 때에 학생들의 구성적 활동과 교사와 학생의 상호작용을 통한 교실의 사회적 활동 안에서 이루어지는 활동은 서로 반사적으로 이루어지는 활동임을 알게 해 준다. 학생들은 경험적으로 실제적인 맥락 하에서 자신의 수학활동을 재조직함과 동시에 교실의 공동체가 세우는 규범과 수행에 참여하게 되는 것이다.

이러한 시각을 가지고 학생의 수학활동과 학습환경에서의 상호작용 모델을 만들기 위해 Simon(1995)은 교수실험을 통해서 가상학습궤도(hypothetical learning trajectory)를 설계하였고, Gravemeijer(1994b)는 네델란

2) 사고실험은 교사가 지도에 앞서서 수업과 관련된 모든 사고를 미리 거치는 학습방법으로서 학생의 사고활동을 무엇보다 중시하면서 상상 속에서 학생들과 대화하고 토론하며 수업을 진행시키는 방법이다.

3) 학생들의 머리 속에서 이루어지는 실제의 수학적인 작용과 수학을 가르치는 환경에서 학생들이 수학을 구성하는 과정을 알기 위해서 고안된 연구방법이다. 연구자가 학생의 수학에 대한 가정을 하고 학생들과 직접적인 상호작용을 통해 가정했던 것을 확인하는 방법이다.

4) 개발연구는 이론적 요소와 경험적 요소를 포함한다. 교육이론에 의해서 안내 받는 교육개발과 계획단계와 해석적 틀에 의해 안내 받는 연구단계가 반사적으로 순환과정을 이루면서 장기간에 걸쳐 진행된다.

드의 개발연구 결과 국소적 교수이론(local instruction theory)[5]을 개발하게 되었음을 언급하였다. 가상학습궤도는 교사의 학습목표, 학습활동에 대한 교사의 계획, 학습과정에 대한 교사의 가설로 구성된다. 이 학습궤도를 통해 교사는 자신이 생각하고 있는 교수활동에 학생들이 참여하여 구성되는 실제적인 교수학습과정이 학생의 가상된 학습궤도와 어느 정도 일치하는지를 분석하여 학생의 사고과정에 대한 개념화를 이해하게 된다(Simon, 1995). 가상학습궤도는 교수실험을 통해 만들어지게 되는데 이러한 교수실험의 주목적은 연구자가 학생의 수학학습과 추론을 경험하는 것이다. 학생들이 스스로 구성한 수학을 연구자와의 상호작용을 통해서 해석해서 학생들의 수학에 대한 모델을 만든다(Steffe, Thomson, & von Glasersfeld, 2000). 이러한 교수실험은 가설을 형성해서 실험하고 재구성하는 재귀적 사이클을 통해 개념적 분석과 이론적 분석이 순환된다. 이 과정은 Gravemeijer (1994b)가 기술한 개발연구 사이클과 많은 방법에 있어서 유사하다. 개발연구 사이클은 교수이론에 의해 기반한 교수개발과 계획단계와 경험적 방법론에 기반한 연구단계의 순환으로 구성된다.

RME 이론을 토대로 한 교수를 설계하기 위해 사고실험과 교수실험이 순환적으로 이행되는 이러한 개발연구는 프로이덴탈(1991)의 교수개발에 대한 철학을 반영한 것이다. 개발연구에서 교수실험 과정은 학생들이 다양한 해결전략을 만들 수 있는 경험적으로 실제적인 맥락문제를 교사와 학생 사이의 상호작용을 통해 이루어지므로 학생의 자율권이 유지되면서 학생의 비형식적인 해결이 더 정교한 수학적 해결로 정당화되어 나간다. Cobb(2000)에 의하면 수학학습과 수학에 대한 유사한 특징에 기초를 둔다는 점에서 발생관점과 RME 이론은 양립 가능한 것으로서 교수실험과 개발연구는 모두 수학이 인간의 창조적 활동이고 수학학습은 문제를 해결하고 상황에 대처하는 효율적인 방법을 개발하며 수학적 실체를 낳는 중에 수학적 발달이 이루어진다는 것을 전제로 하고 있다. 교수실험을 분석한 결과 학생들이 스스로 재발명을 하게 하는 과정과 교사가 학습을 안내하는 과정을 잘 중재한 접근을 취하게 된다. 결국 교수실험을 통한 개발연구는 이론적 분석을 수행하고, 이 분석결과에 기초한 교수를 수행하고, 질적이며 양적인 데이터로부터 교수효과를 평가하고, 이론적 관점을 수정해 나가는 교육연구방법으로서 사고, 학습, 교수를 이해하는 이론적 관점을 가지게 할 뿐만이 아니라 인지의 측면과 다양한 교육형태의 결과를 서술할 수 있게 해주는 교육적 의의를 가진다(Schoenfeld, 2000).

수학 교수・학습을 재 고려할 때 교육 연구자들은 학생들이 수학을 어떻게 개념화하고 학습하는지에 대한 확고한 이해가 필요하다. 따라서 교수설계와 교실기반 연구의 순환적 과정으로 구성된 개발연구를 통해 수학이 학습되고 가르쳐지는 방법에 대한 이론을 만듦과 동시에 교수 설계를 개선할 수 있을 것이다. 이제 이상에서 고찰한 RME 이론과 개발연구방법을 토대로 설계한 대학 미분방정식 수업을 통해 학생들의 오일러 알고리즘을 재발명하는 과정을 탐색하고자 한다.

4. 프로젝트 교실

이 연구는 2001년 가을 학기에 서울지역에 있는 한 대학의 사범대학 수학교육과에서 개설된 미분방정식 수업을 통하여 한 학기동안 수행된 교실기반연구의 일부이다. 수업에 참여한 학생들은 대부분 수학교육과 학생이었으며, 화학과 1명, 통계학과 2명, 유아교육과 1명, 경영학과 1명, 생물학과 1명, 그리고 1명의 보건교육과 학생들로서, 1학년 35명, 2학년 14명, 3학년 3명, 그리고 3명의 4학년 학생들인 총 55명의 학생들이 참여하였다. 학생들은 대부분 미분적분학과 선형대수학을 동시에 수강하고 있었으며, 이 중 3명은 미분방정식을 재수강하는 학생들이었다. 강의를 한 K교수는 프로젝트의 연구팀장이었으며 9년 간 대학에서 미분방정식 이외에 해석학, 복소함수론 등을 강의해오면서 학생들에게 의미 있는 교수방법의 모색에 관심을 쏟고 있었다. 매 수업은 90분 수업으로 매주 화요일과 목요일에 이루어졌다. 교재는 개혁지향교과서인 Paul Blanchard, Robert L. Devaney, 그리고 Glen, L. Hall이 저술한 *Differential Equations*를 채택하였지만, 수업시간에는 RME 원리를 반영하는 활

5) 이론과 실험 사이의 반사적 관계 내에서 진행되는 교수실험을 통해 국소적 교수 이론이 개발된다. 분수, 지필 알고리즘, 행렬, 미분 등에 대한 국소적인 교수 이론을 통해 국부적인 이론이 구체화된다.

동지를 재구성하여 사용하였고 교재는 주로 학생들에게 참조문헌으로 사용되었다. 또한 학생들은 교재의 연습문제를 통하여 맥락문제를 탐구할 뿐 아니라 기본적인 기술을 연습할 수 있었으며, 교재를 통해 개별학습을 하였다. 수업시간에 학생들이 탐구한 활동지는 Purdue 대학의 Rasmussen과 K교수가 2000년도에 공동 제작한 활동지를 수업 전 팀 미팅을 통하여 수학적 적절성, 예상되는 반응, 수업에의 적용방법 등을 검토하여 재구성한 것이다. 매 수업 후의 팀미팅을 통해서는 학생들의 반응과 수업에 대한 반성 및 토론을 하였으며, 학생들의 활동지는 자료분석을 위해 사본으로 보관되었다. 학생들의 오일러 알고리즘을 재발명하는 과정을 탐색하기 위해, 전체 23차시의 교수실험 중 2차시부터 6차시까지의 교실활동을 분석하였다. 이 기간(2차시부터 6차시)동안 학생들은 오일러 알고리즘을 재 발명하기 위해 모두 4개의 탐구하였다. 제 1활동지는 물고기 수를 예측하기 위한 변화율방정식을 통해 시간 - 물고기 수의 그래프를 그리는 활동을 포함하였으며, 이를 모색하는 가운데 오일러 알고리즘에 대한 기본적인 아이디어를 탐구하도록 하였다. 제 2활동지에서는 물고기 수를 예측하기 위한 자율 미분방정식의 해석적 방법과 수치적 방법을 비교하는 활동을 통하여 오일러 알고리즘의 비형식적인 전략을 뒷받침하는 수치적인 의미를 발견하도록 하였다. 제 3활동지는 좀 더 복잡한 미분방정식을 통하여 미래의 사슴 수를 예측하기 위한 탐구활동을 하도록 함으로써 수학적으로 더 이상 문제상황과의 관계에 의존하지 않으며 오일러 알고리즘에 대한 수학적 초점이 보다 우세하게 되도록 하였다. 마지막 제 4활동지에서는 특정한 미분방정식을 제시하지 않음으로써 학생들에게 보다 일반적인 오일러 알고리즘을 구성하도록 유도하였다.

각 활동지를 탐구하기 위한 교실활동은 대체로 다음과 같은 과정으로 이루어졌다.

먼저 그 날 탐구할 활동지를 배포되면 학생들은 약 5분간에 걸친 소그룹활동을 통해 문제의 의미를 파악한 뒤 이어 약 5분간 전체토론을 통해 문제의 의미를 공유한다. 문제의 의미가 공유된 후 학생들은 문제해결방법을 탐구하기 위해 다시 대략 20분간 소그룹토론에 들어가며 소그룹토론 후 약 15분간의 전체토론에서 문제해결에 대한 지식을 공유한다. 학생들이 소그룹활동을 하는 동안 K 교수는 교실을 순회하며 학생들의 소그룹토론을 촉진하며 전체토론에 대한 아이디어를 얻었고, 이러한 정보 하에 전체토론을 소집하여 학생들의 사고를 안내하는 발문을 통해 학생들이 스스로 오일러 알고리즘을 재발명하도록 안내하였다.

전체 교실상황은 비디오녹화를 하였으며 4차시 이후부터는 오디오녹음도 동시에 하였다. 이 기간동안에는 재원, 은정, 수미로 구성된 하나의 소그룹활동을 집중적으로 관찰하였으나, 3차시에는 비디오 설비상의 문제로 다른 그룹을 관찰하였다. 오일러 알고리즘 구성과정에 대한 이 후의 논의는 재원이의 변화에 초점을 두고 전개하였다. 재원이는 수학교육과 1학년 학생이었지만 이미 컴퓨터공학을 전공한 학생으로서 다른 학생들보다 7살 정도 나이가 많았으며 수학교육과 1학년 1학기(봄학기)에 가장 높은 평점을 얻은 학생이었다. 다음 절에서는 학생들의 활동지 자료와 수학적 토의 자료의 분석을 통해 RME 교실에서 학생들의 오일러 알고리즘의 재발명 과정을 탐색해보고자 한다.

5. 토 론

이 연구는 RME 교실에서 수치적 방법에 대한 학생들의 추론과 이해의 발달과정을 묘사하기 위해 고안되었다. 이러한 연구 목적을 위해 학생들의 오일러 알고리즘을 재발명하고 구성하는 과정을 분석하는 것에 연구의

소그룹활동 (5분)	전체토론 (20분)	소그룹활동 (20분)	전체토론 (15분)
문제이해	문제이해공유	문제해결탐구	문제해결에 대한 지식공유

<표 1> 프로젝트 교실 활동 과정

초점을 두고, 그 과정을 Gravemeijer(1997)의 발생모델에서의 네 가지 수준에 따라 탐색해보고자 한다. 자료의 분석은 소그룹활동을 녹화한 비디오 테입과 이와 동시에 녹음한 오디오 자료의 녹취물, 전체토론을 포함한 전체교실활동을 녹화한 비디오 테입의 녹취물, 그리고 학생들이 작성한 활동지의 사본을 중심으로 이루어 졌다. 교실토론, 특히 학생들이 지식을 공유하는 전체토론을 중심으로 분석하였으며, 매 수준마다 재원이의 활동지를 함께 분석함으로써 오일러 알고리즘의 재발명 과정에 이르는 각 수준을 묘사하였다.

(1) 상황적 수준

2차시는 오일러 알고리즘을 재 발명하는 총 5차시의 교실활동 중 첫 번째 차시에 해당한다. 이 차시에서는 오일러 알고리즘을 재 발명하기 위한 제 1활동지를 탐구하였다. 제 1활동지는 물고기 수의 변화율을 나타내는 미분방정식 $\frac{dP}{dt}=0.8P$ 이 주어졌을 때 다양한 초기 물고기 수에 대해 시간-물고기 수의 그래프를 그리고 그 그래프를 그린 방법을 설명하는 과제로 이루어져있다. 주어진 맥락문제를 탐구하기 위해 먼저 소그룹활동을 통하여 문제의 의미에 대해 5분간 토론하였고, 이어진 5분간의 전체토론을 통하여 문제에 대한 이해를 공유하였다. 학생들의 문제에 대한 이해가 공유된 후, 다시 20분 가량의 소그룹토론을 통해 문제해결을 탐구하였고 이어서 전체교실토론을 통하여 문제 해결에 대해 약 5분간 논의하였다. 이를 관찰 소그룹의 일원이었던 재원이의 활동을 중심으로 살펴보고자 한다.

처음에 재원이는 물고기 수의 변화율을 상수로 인식하고 있었다. 문제의 의미를 탐구하는 처음의 소그룹 활동에서, 재원이는 주어진 변화율 방정식의 우변 항에 있는 P를 시간에 대한 함수, 즉 $P(t)$로서 인식하지 못한 채 미분방정식을 t에 관해 적분함으로써 $0.8P(t)$ 라는 식을 얻었고, 이 식에 $P=1,\ 2,\ 4....$ 등을 대입하여 $0.8t,\ 1.6t,\ 3.2t...$ 와 같은 직선의 방정식을 구하였다. 재원이는 물고기 수의 변화율을 상수로 인식하고, 이를 토대로 직선의 그래프를 생각한 것이다. 다음은 이러한 것을 반영하는 재원이의 활동지 일부이다.

"처음에는 P를 t에 따라 변화하는 함수 $P(t)$로 생각하지 못했다. 그래서 (1)
$\frac{dP}{dt}=0.8P$ 를 t에 관해 적분해서 얻어지는 $0.8P(t)$를 생각해서 여기에 초기값인 (2)
$P=1,\ 2,\ 4$ 등을 대입해서 $0.8t,\ 1.6t,\ 3.2t$ 등의 그래프를 생각했었다." (3)

처음 소그룹활동에서 재원이는 주로 문제에 제시된 변화율방정식 $\frac{dP}{dt}=0.8P$ 에서 변수 P를 상수로 잘못된 해석하여 직선의 그래프를 생각하였다. 그러나 이어지는 전체토론에서 다은이는 $\frac{dP}{dt}$ 를 물고기 수의 변화량과 연관지어 설명함으로써 P가 시간에 관한 함수인 $P(t)$ 임을 지적한다:

다은: P가 일단 물고기 수니까 $\frac{dP}{dt}$ 면... 시간 단위에 따라서 물고기 수가 (4)
변한다는 거잖아요. 근데 $0.8P$니까 물고기 수가 .... 1초 지날 때 (5)
물고기 수의 0.8배가 늘어난다는 뜻이니까. (6)
K교수: ... 이거($\frac{dP}{dt}$)는 사실 시간 t의 함수죠. 어떤 시간에 있는 종족의 수 (7)
에 비례한다는 거죠, (8)

전체토론에서 다은이와 K교수와의 대화를 통해 재원이는 자신이 변화율방정식을 잘못 이해했음을 깨닫고 P를 t에 관한 함수인 $P(t)$로 인식할 수 있었다. 전체토론에서 다음과 같은 발문을 통한 교수의 안내가 이루어진 후, 곧 이어 문제의 해결을 탐구하기 시작하였다.

K교수: .... 선분이 여기(그래프에 그려진 slope mark를 가리키며) 있어요. (9)
그러면 선분은 과연 어디에서 나왔을까 생각해야겠죠? (10)

이어진 소그룹토론에서 재원이는 공유된 문제의 이해

를 토대로 문제에 제시된 그래프 상의 선분들(slopes)의 의미를 탐구하기 시작하였다. 이는 재원이가 변화율의 의미에 대해 다른 인식을 하기 시작하는 것으로 해석할 수 있다. 다음 재원이의 발문은 이러한 것을 반영한다.

재원:	이게(slope mask을 가리키며) 기울기를 의미하는 건가?	(11)
	이게 어느 점에서의 기울기지? 0.2초에서의 기울긴가?	(12)
	아니지. 0.2초일 때의 기울기는 어느 정도지?	(13)
	이게 0.1초일 때, 그 순간에 변화하는 율 아냐?	(14)

그래프 상에 제시된 기울기를 표시한 선분(slope mark)의 의미를 탐구하도록 안내한 교수의 발문(10)을 통하여, 재원이의 관심의 초점이 변화율 방정식에서 이 선분으로 옮겨갔음을 알 수 있다. 또한, 재원이는 이 선분의 의미를 탐구하는 과정에서 기울기를 표시한 선분(slope mark)을 그 점에서의 순간변화율로 인식(14)하게 되었다. 그리고, 이러한 기울기를 표시한 선분에 대한 인식 하에 문제의 상황을 이해하기 시작하였다. 다음은 소그룹토론에서 재원이가 문제의 상황에 대한 자신의 생각을 표현한 것이다.

한 마리 낳으면 두 마리 낳게 되구, 두 마리 낳게 되구 네 마리 낳게 되구	(15)
다시 또 낳게 되구. 일정하게 증가하는 게 아니지.	(16)
증가하면은 그거의 0.8배가 늘어나니까 더 늘어나게 되잖아. 점점점점	(17)
늘어나는 거잖아.	(18)

Slope mark를 순간변화율로 이해함으로써, 재원이는 주어진 문제상황에서의 물고기 수는 '점점 점점 늘어나는' 즉, 일정하게 증가하는 것이 아니라 앞에 것의 0.8 비씩 늘어나는 지수적으로 증가한다는 것을 발견하였다. 물고기 수의 변화율을 일정하게 증가하는 상수로서 인식됬던 것에서 이제는 지수적으로 증가하는 것으로 이해할 수 있게 된 것이다. 이러한 이해의 과정은 학교 외부적 상황인 '물고기' 라는 상황적인 맥락 하에서 이루어지는 Gravemeijer(1997)의 상황적 수준에 해당한다. 이제 이러한 변화율에 대한 기본적인 이해를 바탕으로 시간-물고기 수에 대한 그래프 그리기를 다음과 같이 시도하였다.

이거(초기치 2)의 0.8배지. 단위시간(0.1초)동안의 이거의 0.8배를 넣는 거잖아.	(19)
이거를 처음에 2였잖아. P가. 그러면 0.1만큼 지나면 1.6이게 만큼	(20)
율이 생기잖아. (고민) 0.16 늘어나는 시간이 0.1초니까... 이게 0.16이니까	(21)
..... 3.6의 ... 0.1초니까. 0.1초만 이잖아, 단위시간이. 그러니까 3.6의	(22)
0.8배에 다시 0.1곱한 것을 더해주면 되잖아.	(23)

이 때, 교수의 어떤 안내 없이, 주어진 그래프 상의 slope mark의 의미와 변화율 방정식을 결합함으로써 그래프 그리는 아이디어를 모색하고 있음을 발견할 수 있다. (22), (23)의 '3.6(이전의 물고기 수)의 0.8배에 다시 0.1(단위시간) 곱한 것을 (3.6에) 더해주면 되잖아.' 라는 언급으로부터, 물고기 수의 증가율(변화율)을 '0.8×(이전의 물고기 수)×(단위시간)'으로 이해하였으며, 증가한 물고기 수는 이전의 물고기 수에 증가한 물고기 수를 더하는 것으로 인식하였음을 알 수 있다. 즉, 재원이는 시간-물고기 수에 대한 그래프 그리는 방법을 모색하는 가운데 오일러 알고리즘에 대한 기본적인 아이디어를 생각해 낼 수 있었다. 그러나 아직 상황과의 관계로부터 비형식적 전략을 뒷받침하는 수치적 의미를 추출하는 수준에는 이르지 못하였다. 따라서, 주어진 과제의 상황에서 활동하면서 문제해결방법을 이해하는 상황적 수준에 해당하는 것으로 보인다.

다음 3차시는 2차시에서 소그룹으로 토론하였던 주제를 TP용지에 소그룹별로 정리하는 것으로 시작하였다. 3차시의 소그룹활동은 캠코더설비상의 문제로 재원이의 조를 관찰하지 못하고 다른 조를 관찰하게 되었지만, 마침 재원이가 전체토론에서 발표를 하였기 때문에 재원이의 이해의 과정을 계속해서 관찰할 수 있었다. 다음은 7분 가량의 소그룹활동 후에 이루어진 전체토론의 일부이다.

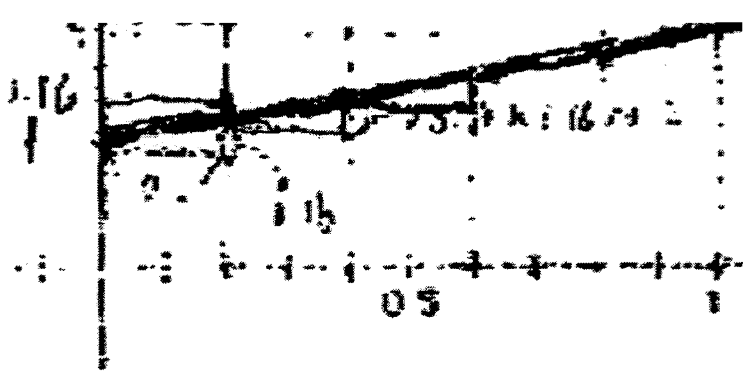
K교수:	0.1초 계산에다가.... 그러면 그 P의 값은 어떻게 구했어요?	(24)
재원:	처음의 양에 0.8곱하기 초기값 곱하기 단위시간 한 거 만큼 더해서	(25)
		(26)
	(중략)	
K교수:	(삼각형을 그리며 설명)여기서 시작해서 (가로선분)그 다음 또 0.1로	(27)
	가고 증가분 (세로선분)은 어떻게 구했어요?	(28)
재원:	0.8곱하기 1.08 곱하기 0.1	(29)

전체토론에서 이루어진 교수와 재원이의 대화로부터 재원이의 변화율에 대한 이해와 그래프를 그린 방법을 알 수 있다. (25), (26), (29)는 변화율에 대한 이해를 '0.8×(이전의 물고기 수)×(단위시간)'으로 하였음을 암시하고 있으며, (25), (26)에서는 오일러 알고리즘에 대한 초기직관을 형성하였음을 보여주고 있다. 그러나 수치적 의미를 추출하지는 못하고 있다는 점에 비추어 볼 때 상황적 수준 하에 있는 것으로 판단할 수 있다. 다음 재원이의 활동지의 일부에서도 이러한 수준이 잘 반영되어 있다(<그림 1> 참조).

재원이는 우선 시간의 단위를 0.2초로 나누고, 주어진 변화율 방정식을 이용하여 각 구간별로 물고기 수 P의 변화량($0.8\times1\times0.2=0.16$, $0.8\times1.16\times0.2$...)을 구한 후 그 증가량을 이전 물고기 수에 더하였다. 그리고 더한 값에 해당하는 점을 이전 물고기 수의 값에 해당하는 점과 연결하여 선분을 그렸다. 이러한 방법을 계속 반복하여 그래프를 그렸는데, 이러한 과정으로부터 오일러 알고리즘에 대한 초기직관을 형성하고 있음을 발견할 수 있다. 즉, 시간-물고기 수의 그래프를 그리는 활동지를 통해서 탐구하는 가운데 오일러 방법에 대한 기하학적인 의미 및 알고리즘에 대한 기초적인 아이디어를 형성하였으며, 이는 상황적 수준에 해당된다.

(2) 참조적 수준

시간-물고기 수의 그래프를 그리는 활동지에 대한 전체토론이 끝난 후, 곧이어 3차시의 주요 과제인 '정순이와 재모의 방법' 을 탐구하였다. '정순이와 재모의 방법'은 오일러 알고리즘을 발견하기 위한 4개의 활동지 중 두 번째 과제에 해당하는 활동지의 맥락문제로서 물



P의 초기값이 1일 경우 0.2초 동안 변하는 P의 변화량은 $0.8\times0.2=0.16$이다. 따라서 0.2초 때에는 $1+0.16=1.16$까지 그 수가 변한다. 그 다음 0.2초 동안은 $0.8\times1.16\times0.2$만큼 수가 증가한다. 이렇게 점점 t가 흐를수록 단위 시간당 변화하는 율은 (P가 t가 증가함에 따라 증가하므로) 증가하게 된다.

<그림 1> 재원이의 활동지: 상황적 수준

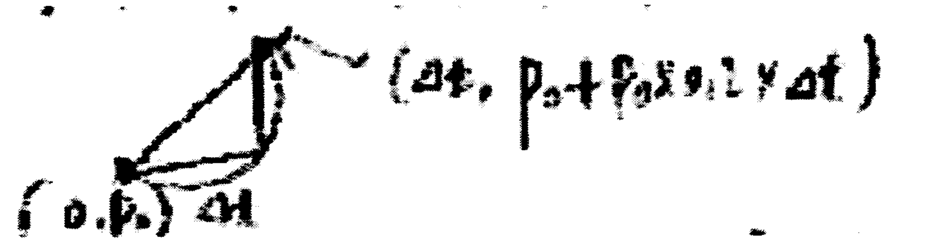
고기 수를 예측하기 위한 미분방정식 $\frac{dP}{dt}=0.2P$ 이 주어졌을 때 해석적 방법과 수치적 방법의 수학적 장단점을 비교하는 과제이다. 문제 속에서 정순이와 재모는 미래의 물고기 수를 예측하는데 각기 다른 방법을 사용한다. 정순이는 접벡터가 연속적으로 변하는 것에서의 순간변화율을 생각하는 해석적 방법을 통해 시간에 대한 물고기 수의 그래프를 그렸다. 재모는 주어진 구간에서 변화율이 일정한 접벡터들을 시작점에서 끝점까지 연결하는 수치적 방법을 사용하여 시간에 대한 물고기 수의 그래프를 완성하였다. 이 때 학생들에게는 정순이와 재모가 사용한 두 방법이 향후 2년 6개월 동안, 나아가 일반적으로 물고기 수를 예측할 때 동일한 결과에 도달할 것인지 여부를 결정하고 그 이유를 설명하는 과제가 주어졌다.

이 문제의 해결과정에서는 상황적 수준과 참조적 수준이 함께 공존하여 있는 것으로 보였다. 이 중 참조적 수준을 반영하는 교실상황을 중심으로 살펴보고자 한다. 먼저 이전 시간까지 상황적 수준에 있었던 재원이의 경우를 보면, '정순이와 재모의 방법' 을 탐구하는 활동을 통해 이전 시간에 형성한 오일러 방법에 대한 기초적인 아이디어, 즉 경험적으로 실제적인 구체적인 상황을 기반으로 하여 수치적인 의미를 발견하고 있다는 것을 그의 활동지를 통해 알 수 있었다. 다음은 재원이가 수치적 방법(재모의 방법)에 대해 자신의 활동지에 설명한 것과 이와 함께 그린 그림이다.

P의 변화량에 대해 이전의 활동지에서는 재원이는 "(처음) 0.2초 동안 변하는 P의 변화량은 $0.8\times1\times0.2=0.16$, 그 다음 0.2초 동안은 $0.8\times1.16\times0.2$만큼 수가 증가한다." 라고 설명한 반면 이제는 "단위시간 변화는 $0.2\times P_0\times\Delta t$ 로서, 즉 전의 물고기의 양과 단위시간의 곱에 0.2를 곱해서" 로 언급하고 있다는 것에 주목할 수 있다. 즉, 이전의 활동지에서는 각각의 단위 시간별로 수를 대입하여 그 증가량을 구하는데 그쳤다면 이제는 상황과의 관계로부터 수치적 의미를 추출하고 있다. 또한 표현한 식을 다시 현상으로 재해석하고 있다. 즉, 상황과의 관계로부터 수치적인 의미를 추출하는 참조적 수준에 해당한다. 한편, "즉, (t_k, $P_{k-1}+P_{k-1}\times0.2\times\Delta t$)점들을 이은 것이다." 라는 재원이의 표현은 다음 수준인 일반적 수준으로 발전하기 위한 토대가 되는 기본적인 아이디어에 해당한다.

이 과제의 탐구과정은, 먼저 소그룹 별로 문제를 이해한 후 전체토론으로 문제의 의미를 공유하고, 다시 문제 해결을 토론하는 소그룹활동이 다음 4차시에서도 계속 이어져 문제해결을 탐구한 후 마지막으로 전체토론을 함으로써 문제해결을 공유하는 식으로 이루어졌다. 처음 소그룹 별로 문제의 의미를 이해한 후 이어진 전체토론에서 발표한 다음의 희정이의 설명에서도 참조적 수준을 발견할 수 있다.

단위시간 변화는 물고기 양을 $0.2\times P_0\times\Delta t$ 로서, 즉 전의 물고기의 양과 단위시간의 곱에 0.2를 곱해서 나오게 되는데 이렇게 늘어난 양을 바로 전의 P에 더해 얻어진 물고기 수가 각각 시간에서의 P값에 해당하게 된다. 즉, (t_k, $P_{k-1}+P_{k-1}\times0.2\times\Delta t$) 점들을 이은 것이다



<그림 2> 재원이의 활동지: 참조적 수준

처음 물고기를 a라고 해보세요? 그러면 시간이 1초 증가한 후에 (30)

물고기의 수는 a에다가,그 다음에 물고기의 변화율을 r이라고 할께요. (31)

그러면 a의 수는 원래 a에다가 ar만큼 증가했겠죠 ($a+ar$이라고 판서) (32)

증가한다고 치면은 그러면은. 그 다음에 시간이 또 다음 증가한.. 2초 증가한 다음에는, (33)

얘($a+ar$)의 이 r증가한 거잖아요. 이렇게 $a+ar+(a+ar)r$ (34)

되잖아요. 정리하면은 $P=a(1+r)^2$시간에 따른 물고기 수를 P라고 하면 (35)

$P=a(1+r)^t$라고 식을 세웠어요. 그럼 얘는 지수 함수잖아요. 공비가 (36)

$1+r$이고 a는 앞에 곱해지는 상수고. 그치요? 이렇게 생각을 해서 (37)

지수함수라고 저는 생각을 했어요. (38)

희정이는 교수의 안내 없이 학교외부 상황의 활동을 통하여 문제해결 방법을 이해하는 상황적 수준에서 더 나아가 물고기 수의 예측이라는 상황과의 관계로부터 $P=a(1+r)^t$ 라는 물고기 수에 대한 수치적인 의미를 추출하였다(36). 이는 비형식적인 전략을 뒷받침한다는 점에서 상황적 수준과는 대응되지만, 문제상황과의 관계로부터 완전히 벗어나지는 못하였다는 점에서 일반적 수준과 구별되는 참조적 수준에 해당한다. 이 연구가 진행된 미분방정식 수업에서 상황적 수준에서 참조적 수준으로의 이행은 교수의 안내 없이도 자연스럽게 이루어지는 것으로 나타났다.

(3) 일반적 수준

4차시에서는 '정순이와 재모의 방법' 에 대한 논의를 마친 후, 계속해서 좀더 복잡한 미분방정식을 포함한 미래의 사슴 수를 예측하는 과제를 탐구하였다. 앞서 탐구한 맥락문제에서는 물고기 수는 자원 등의 환경적 요소의 영향을 배제하고 단순히 물고기 수 자체의 변화만을 고려하였다면 이번 문제에서 사슴 수는 한정된 자원의 영향을 받음으로써 $\frac{dP}{dt}=0.3P(1-\frac{P}{12.5})$ 와 같이 보다 복잡한 미분방정식으로 표현되었고 학생들에게는 위의 미분방정식에 대해 초기 사슴수가 주어졌을 때, 시점과 종점을 잇는 방법을 이용하여 시간 $t=0.5$, 1. 1.5, 2일 때 사슴수를 결정하는 방법을 탐구하고 그 방법의 타당성을 설명하는 과제가 주어졌다. 이 과제는 학생들이 오일러 방법을 좀 더 수학적으로 탐구할 수 있는 기회를 제공한다. 또한, 학생들은 참조적 수준에서 일반적 수준에 이르는 과정을 가장 어려워하는 것으로 보였으나, 교수의 적절한 안내가 이루어지자 자연스럽게 일반적 수준에 도달할 수 있었다. 다음은 4차시의 전체토론 중 일부를 발췌한 것이다.

K교수: 이 점은 어떻게 구할 수 있죠? 0.5는 정해졌고 (39)

(판서한 좌표 (0.5,?) 를 가리키며)이거(?)는 뭔지 모르죠? 이(?) 값은 (40)

어떻게 구할 수 있나요? (41)

지윤: $\frac{(y\text{값의 증가량})}{0.5}$ 이 0.684 니까 y값의 증가량은 0.684×0.5가 (42)

되서 0.342 가 나오잖아요. 그러면 이 y값이 원하는 0.342 니까 (43)

원래 식에다 0.342 를 더하면 3.342 가 나오잖아요. (44)

그런 식으로 0.5초마다 해줘서 여태까지 한 식으로 했어요. (45)

사슴 수를 예측하는 과제에 대한 처음 지윤이의 설명((42)~(45))은 지난 시간에 탐구한 내용 및 수준과 유사하다. 이는 지윤이는 아직 참조적 수준에 머물러 있음을 의미한다. 이 때 지윤이의 설명에 이은 교수의 발문((46)~(50))은 학생들을 일반적 수준에 이르도록 안내하는 역할을 하였다.

K교수: 그러면 일반적인 쉬운 경우를 한번 보죠? 이렇게 initial point가 주어져있어요. (46)

어떤 0일 때 P_0다. 그럼 그 다음 점 증가하는 0.5 라고 할까요? (47)

이건 맘대로 정할 수 있는 거죠. 이 증분(사슴 수의 증가량)을 (48)

지윤이가 Δy라고 이름을 붙였거든요? (49)

일반적인 경우는 Δ뭐라고 붙이면 좋을까요? (50)

학생들: t (51)

K교수: Δt. 그러면, 여기는 (사슴수의 증가량이) ΔP잖아요. 그러면 여 (52)

기 값(Δt에서 P의 값)은 얼마가 되요? Δt로 놨을 때 이 값은 뭐죠? (53)

(54)

(중략)

지윤: (O.H.P에 다음과 같이 풀이 한다.) (55)

$$\frac{\Delta p}{\Delta t}=k\cdot f(x) \qquad (56)$$

$$\Delta p=\Delta t\cdot 1k\cdot f(x) \qquad (57)$$

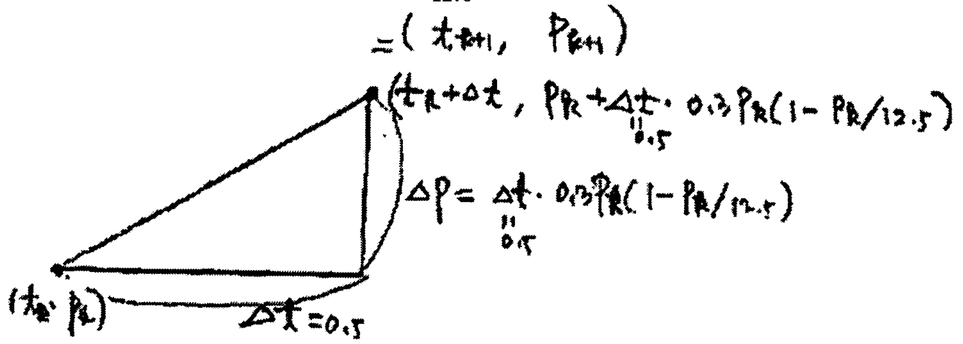
$$(\Delta t,\ p_0+\Delta t\cdot k\,p_0) \qquad (58)$$

교수는 발문을 통하여 학생들이 시간의 단위를 0.1초나 5초와 같은 구체적인 단위가 아닌 일반적인 단위인 Δt로 생각하도록 한 후((50)), Δt에 대응하는 사슴수 P의 값을 구하도록 안내하였다((52)~(54)). 교수의 이러한 발문은 학생들로 하여금 상황과 독립적인 해석을 하고 그에 따른 해결을 하도록 이끈 역할을 하였다. 교수의 발문에 따라 지윤이는 ΔP의 값을 구한 후, Δt일 때의 점의 좌표를 (Δt , $p_0+\Delta t\cdot k\,p_0$)와 같이 구하였다. 이는 재원이가 '정순이와 재모의 방법' 에서 구한 점의 좌표, (t_k , $P_{k-1}+P_{k-1}\times 0.2\times\Delta t$)와 비교해 볼 때 맥락에 대한 참조보다는 전략에 대한 수학적 초점이 우세하게 되었다는 것을 발견할 수 있다. 지윤이가 구한 점의 좌표는 수학적 시각으로 보아 더 이상 문제상황과의 관계에 의존하지 않는 것이며, 또한 다음 수준인 형식적 수준의 수학을 위한 참조적 기초를 형성한다. 지윤이는 교수의 안내를 받고 상황과 독립적인 해석과 해결을 요하는 일반적 활동을 통해 추론을 위한 모델을 만듦으로써 일반적 수준에 이르게 된 것이다. 이상의 교실 토론의 관찰으로부터, 지윤이는 참조적 수준으로부터 일반적 수준으로 스스로 발전하기는 어려웠지만, 교수의 일상적 표현을 Δy라는 보다 수학적인 표현양식을 도입한 발문을 통해 일반적 수준에 이를 수 있게 되었다는 것을 알 수 있다. 여기에서 "델타(Δ)" 는 참조적 수준에서부터 이 표현을 사용해왔지만, 이전의 수준에서는 '증가분' 의 의미로 사용되었던 것에 반해 이 수준에서는 '일반적인 경우' 를 표현하기 위한 양식으로 사용되었다.

아래에 제시된 재원의 활동지가 보여주듯이, 재원이 역시 이전의 활동지에 나타난

단위 시간((Δt)) 동안 변한 사슴의 수(ΔP)는 전의 사슴수를 P_k라 하면 $\Delta P=\Delta t\times 0.3\times P_k(1-\frac{P_k}{12.5})$ 에 의해 결정된다. ...(중략).... 따라서 어떤 시점 t(또는 $t_k+\Delta t$) 에서의 사슴의 수(P_t)는 바로 전 시점(t_k)에서의 사슴의 수(P_k)에 증가한 사슴의 수(ΔP)를 더해 주면 되는 것이다.

$$\therefore\ P_{k+1}=P_k+\Delta t\times 0.3\times P_k(1-\frac{P_k}{12.5})$$



<그림 3> 재원이의 활동지: 일반적 수준

" $P_{k+1} = P_k + \Delta t \times 0.3 \times P_k(1-\frac{P_k}{12.5})$" 라는 참조적 수준의 표현보다 일반적인 식을 구성하였다. 뿐만 아니라, 이를 설명하기 위해 구성한 모델도 이제 초기치에 근거한 것이 아닌 좀 더 일반적인 상황으로 표현하였다. 이로부터 학생들의 오일러 알고리즘에 대한 추론은 맥락에 대한 참조보다는 전략에 대한 수학적 초점이 더 우세하게 된 일반적 수준에 이른 것이라고 판단할 수 있다. 그러나 재원이가 사용한 수학적 전략은 문제 상황과의 관계로부터 완전히 독립적인 것은 아니었다. 다음 재원이의 활동지의 일부는 이를 반영한다(<그림 3> 참조). 사슴 수를 결정하는 방법에 대한 재원이의 설명으로부터, 처음에는 맥락문제를 토대로 경험적으로 실제적인 상황을 탐구하고 이를 통해 비형식적인 해결전략을 개발하는 참조적 수준에 있음을 알 수 있었다. 그러나, 학생들과의 소그룹 토론과 교수의 발문을 통해 재원의 오일러 알고리즘에 대한 추론은 점차 이전보다 더 일반적인 특징을 포함하고 수학적 추론을 위한 기초로 더 중요하며 형식적 수학 수준을 위한 참조적 기초가 되는 모델과 식을 구성하는 일반적 수준에 이르게 되었다는 것을 발견할 수 있다.

(4) 형식적 수준

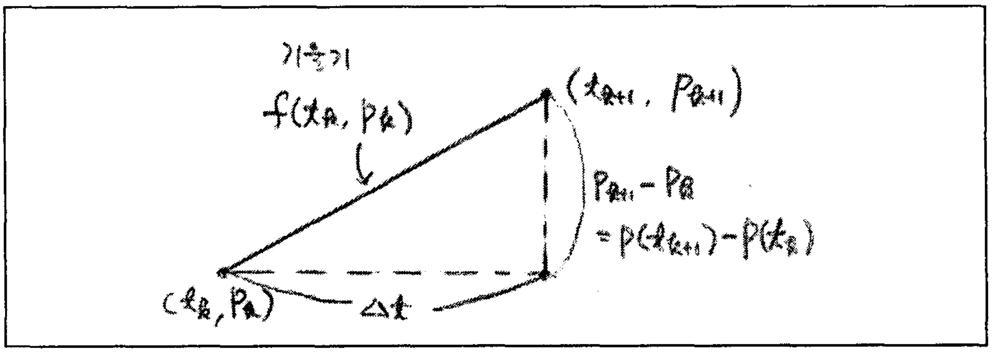
5차시와 6차시에서는 오일러 알고리즘을 재발명하기 위한 마지막 활동지를 탐구하였다. 이 활동지의 맥락문제에서는 한 생물학자가 특정 우림 지역의 미래 곤충수를 예측할 수 있는 미분방정식을 만들려고 하는 상황이 제시된다. 학생들에게는 현재의 곤충수가 P일 때 시점과 종점을 잇는 방법을 사용하여 미래의 곤충수가 ~$2P$가 되는 시간을 예측하는 과제가 주어진다. 이전의 활동지는 모두 자율미분방정식에 대한 오일러 방법을 생각하였지만, 마지막 활동지에서는 특정한 미분방정식을 제시하지 않음으로써 오일러 방법을 일반적인 경우로 확장하도록 이끌었다. 학생들은 교수의 안내 하에 지금까지 학습한 경험적으로 실제적인 상황으로부터 오일러 알고리즘을 기호화하였다. 그러나 5차시와 6차시에서는 시간이 부족하여 이 과제에 대한 전체토론과 소그룹토론을 충분히 하지 못하였다. 따라서 형식적 수준에 대한 것은 재원이의 활동지를 통해 설명하고자 한다.

재원이는 먼저 변화율 방정식을 $\frac{dP}{dt} = f(t, P)$ 라 두고 시작하여, 형식적인 절차와 표기를 가지고 문제를 탐구하고, 최종적으로 $P_k = P_{k-1} + \Delta t \times f(t_{k-1}, P_{k-1})$ 라는 가장 일반적인 오일러 알고리즘을 구성하였음을 그의 활동지를 통해 발견할 수 있었다. 다음 모델은 이 맥락문제를 탐구하면서 재원이가 그린 모델이다.

이는 두 점 사이의 평균변화율, 즉 두 점 사이의 기울기로부터 유도하는 오일러 알고리즘의 아이디어를 잘 나타내는 추론을 위한 모델이며 이는 재원이가 이제 형식적인 절차와 표기를 가지고 수행을 하는 형식적 수준에 이르게 되었음을 보여준다.

6. 결 론

지금까지 RME원리를 반영한 대학 미분방정식 교실에서 학생들이 오일러 알고리즘을 재발명하는 과정을 살



<그림 4> 재원이의 활동지: 형식적 수준

펴보았다. 본 연구 결과는 일련의 적절한 맥락 문제가 주어졌을 때 학생들은 교수의 발문을 통한 안내 하에 네 가지 수준인 상황적 수준, 참조적 수준, 일반적 수준, 형식적 수준을 거치면서 오일러 알고리즘을 재발견할 수 있음을 보여주었다. 그리고 오일러 알고리즘의 재발견 과정에서, 학생들은 그들의 수학화 과정에서 핵심역할을 담당하였다. 뿐만 아니라, 상황의 모델에서 추론을 위한 모델로의 발생단계를 거치면서 점진적 수학화를 통해 오일러 알고리즘이라는 수학적 구조를 재발명하였다. 특히 참조적 수준에서 일반적 수준에 이르는 과정으로의 이행과정에서 교수의 발문은 핵심적인 역할을 하였다. 이와 같이, 학생들은 맥락문제를 토대로 하여, 교수의 안내 하에 점진적인 수학화 과정을 통해 미분방정식의 수치적 접근방법인 오일러 알고리즘의 재발명과정에 참여하였다.

평가결과를 통해 학생들의 성적이 중상위권에 집중해 있음을 발견할 수 있었다. 이는 많은 학생들이 미분방정식 교과 내용을 자신에게 의미있는 방식으로 받아들인 것으로 해석할 수 있었다. 이러한 평균점수의 향상 이외에도 학생들의 수학적 태도의 변화를 발견할 수 있었다. 수업 후 실행된 설문지 조사에서 대부분의 학생들은 스스로 생각할 수 있는 기회가 제공된 수업이었다고 언급하였고, 수업시간을 통하여 완전한 자신의 지식으로 습득할 수 있었으며, 스스로 생각하는 가운데 자신감을 얻게 되었다고 하였다. 특히 소그룹활동이 수학적인 개념을 발견해 가는데 많은 도움이 되었으며, 이 수업을 통하여 수학수업에서도 토론이 가능하다는 것을 경험하게 되었다고 언급하였다. 다음은 이러한 것을 반영하는 한 학생과의 인터뷰 자료의 일부이다.

> “수학에서도 토론수업이 가능하다는 거. 대부분 상상을 못하잖아요. 수학은 왠지 푸는 방식이 정해져 있는 것 같고, 그것만 알면 풀 수 있을 것 같은데 그게 아니라... 수학자들이 이미 알아 놓은 방식을 우리가 습득하는 게 아니라 그걸 알아 가는 거잖아요. 수학자들이 해놓은 걸 우리가 알아가는 거잖아요.”

RME 철학은 경험적으로 실제적인 맥락문제를 통해 학생들의 비형식적인 해결전략과 해를 고려하는 안내된 재발명에 초점을 두고 있다. 이 연구에서는 이러한 RME 철학을 미분방정식 교수 설계에 반영함으로써, 지난 20년 동안 진행되어온 미분방정식 교육 개혁이 간과한 점을 보완하는 방안을 찾고자 하였다. 특히, 개혁지향적 미분방정식 교육에서 학생들은 미분방정식의 수치적 접근에 대한 의미 있는 개념의 구성과정에 참여하지 못하였다는 점에 착안하여, RME 철학이 반영된 수업상황에서 이와 같은 상황을 개선할 수 있는 방안을 찾기 위해 학생들의 오일러 알고리즘 재발견 과정을 분석하였다. 앞서 제시된 분석 결과가 보여주듯이, 학생들은 경험적으로 실제적인 맥락 문제가 주어졌을 때 소그룹 활동과 전체 토의에 참여하는 과정을 통해 미분방정식의 수치적 접근법인 오일러 알고리즘을 성공적으로 재구성하였으며, 교수의 발문을 통한 적절한 안내는 학생들의 오일러 알고리즘의 재발명 과정에 중요한 역할을 하였다. 또한, 위에 제시한 설문지 조사 결과와 인터뷰 내용을 통해 알 수 있듯이, RME 이론에 기반한 미분방정식 수업은 학생들의 미분방정식에 대한 심층적인 이해에 긍정적으로 기여하였으며, 학생들을 가르치는 교수에게는 수학 교과 내용을 지도하는 방법과 학생들을 지도하는 데 있어서 가치 있는 것이 무엇인지를 재고할 수 있는 기회를 제공할 수 있는 것으로 기대된다. 이 연구의 분석 결과가 제공하는 그 이론적 시사점은 미분방정식뿐만 아니라 다른 대학수학교과에도 적용 가능할 것으로 생각되며 대학수학 교육과정과 교수법의 개선에도 유용한 관점을 제공할 수 있을 것이라고 본다.

참 고 문 헌

Blanchard, P.; Devaney, R. & Hall, R. (1998). *Differential Equations,* Brooks/Cole Publishing Company.

Cobb, P. (2000). Conducting experiments in collaboration with teacher. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science.* Lawrence Erlbaum Associates.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education.* The Falmer Press.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of* *mathematical structure*. D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (1994a). *Developing realistic mathematics education*. Utrect: CD-β Press.

Gravemeijer, K. (1994b). Educational development and developmental research in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education*, **25(5)**, pp.443-471.

Gravemeijer, K. (1997). Instructional design for reform in mathematics education. In M. Beishuizen, K. Gravemeijer, & E. van Lieshout (Eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* pp.13-34, Utrect: CD-β Press.

Rasmussen, C. (1997). *Qualitative and numerical methods for analyzing differential equations: A case study of students understandings and difficulties*. Doctoral dissertation, University of Maryland, College Park.

Rasmussen, C. (1999). *Symbolizing and unitizing in support of students mathematics growth in differential equations*, Paper presented at the 1999 NCTM Research Precession, San Francisco, CA.

Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations: A framework for interpreting students understandings and difficulties, *The Journal of Mathematics Behavior* **20**, pp.55-87.

Rasmussen, C. & King, K. (2000). Locating starting points in differential equations: A realistic mathematics education approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* **31(2)**, pp.161-172.

Schoenfeld, A. H. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the American Mathematical society* **47(6)**, pp.641-649.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education* **26**, pp.114-145.

Steffe, L.; Thomson, P. & von Glasersfeld, E. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements, In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science*. Lawrence Erlbaum Associates.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel.

Treffers, A. (1987). *Three dimendions. A model of goal and theory description in mathematics education: The wiskobas project*, Dordrecht: Reidel.

Guided Reinvention of Euler Algorithm:

-An Analysis of Progressive Mathematization in RME-Based Differential Equations Course-

Kwon, Oh Nam
Dept. of Mathematics Education Seoul National University Shimlim-Dong Kwansk-Gu Seoul, Korea
E-mail : onkwon@snu.ac.kr

Ju, Mi-Kyung
Ewha Womans University
E-mail : mkju11@yahoo.co.kr

Kim, Young Sheen
College of Education Ewha Womans University
E-mail : nobly@ewha.ac.kr

Realistic Mathematics Education (RME) focuses on guided reinvention through which students explore experientially realistic context problems to develop informal problem solving strategies and solutions. This research applied this philosophy of RME to design a differential equation course at a university level. In particular, the course encouraged the students of the course to use numerical methods to solve differential equations. In this context, the purpose of this research was to describe the developmental process in which the students constructed and reinvented Euler algorithm in the class.

For the purpose, this paper will present the didactical principle of RME and describe the process of developmental research to investigate the inferential process of students in solving the first order differential equation numerically. Finally, the qualitative analysis of the students' reasoning and use of symbols reveals how the students reinvent Euler algorithm under the didactical principle of guided reinvention.

In this research, it has been found that the students developed deep understanding of Euler algorithm in the class. Moreover, it has been shown that the experience of doing mathematics in the course had a positive impact on students' mathematical belief and attitude. These findings imply that the didactical principle of RME can be applied to design university mathematical courses and in general, provide a perspective on how to reform mathematics curriculum at a university level.

* ZDM classification : B45, B59
* 2000 Mathematics Classification : 97-02, 97B40
* key word : collegiate mathematics education, Realistic Mathematics Education, Differential Equations.