

중학생을 대상으로 한 대수 문장제 해결에서의 유추적 전이

이 종 희 (이화여자대학교)

김 진 화 (이화여자대학교 대학원)

김 선 희 (이화여자대학교 대학원)

I. 서론

인간은 어떤 새로운 문제에 직면할 때 예전에 풀었던 비슷한 문제를 생각해내고 그 해법을 새로운 문제에 맞게 변화시켜 해결하는 경향이 있다. 이때 사용되는 추론이 바로 유추(analogy)다. 유추는 일상적으로 당면하는 문제나 수학, 물리학, 화학과 같은 전문 영역 문제의 해결, 창의적 사고 등에 중요한 정신적 과정으로 알려져 있으며, 문제해결 뿐만 아니라 새로운 영역을 이해하고 의사소통과 설득을 위한 수단이며, 단어의 의미 이해와 개념형성 등과 같은 인지적 처리과정에도 기초가 된다.

유추는 근거인 한 구조로부터 표적인 다른 구조로의 관계 사상으로 정의되며(Gentner, 1983, 1989; Holyoak & Thagard, 1995; English, 1997), 상황사이의 관계적 성질에 주목하여 패턴이나 법칙을 다루는 수학 학습에 매우 필요한 추론이다. 즉, 유추는 보다 많이 이해하고 있는 근거 영역(source domain)의 지식을 가지고 표적 문제(target problem)에 적용 가능한 새로운 규칙을 생성하는데 사용된다. 학습이 새로운 것과 기존의 아이디어 사이의 유사성을 인식하는 능동적인 구성 과정이며 이때 새로운 아이디어를 기존의 아이디어와 적절히 연결하고자 한다면, 피상적이고 표면적인 것이 아니라 아이디어 사이에 구조적인 관계를 사상시킬 수 있어야 한다. 이러한 연결은 유추의 과정에 포함되어 있으며, 인간의 인지

활동에서 특히 중요한 역할을 하는 유추는 수학 학습에서 또한 중요하다(English & Halford, 1995).

유추에 의한 문제해결은 현재의 문제를 이전에 경험했던 유사한 문제에 대한 지식과 연관짓고, 이에 기초하여 두 문제간의 유사성을 추론함으로써 주어진 문제를 해결하는 것을 말한다(Chen, 1996). 유추에 의한 문제해결은 유추적 전이(analogical transfer)라고도 하는데, 그 이유는 이전의 문제해결에서 습득한 지식을 새로운 문제 해결에 적용하는 데에 지식의 전이가 일어나기 때문이다(Holyoak & Thagard, 1995). 수학의 유추적 전이에는 다양한 요소들이 내재해 있으며 본 연구는 이러한 요소들을 중심으로 학생들의 대수 문장제 해결을 조사하고자 한다. 중학교 1학년 학생들은 산술에서 대수로의 전이 시기에 있으며, 문자를 사용하기 시작하면서 학교수학을 어려워한다. 특히 문장제는 일상 언어로 조직된 문제를 이해하고 그것을 문자로 된 수식으로 번역해야 하기 때문에 학생들이 많이 어려워하는 내용이다. 학습한 문제와 맥락이나 해결과정이 비슷한 문제를 풀게 하는 유추적 전이가 학생들의 대수 문장제 해결 능력의 향상에 도움이 될 것으로 보인다.

본 연구는 중학교 1학년 학생들이 대수 문장제를 해결하는데 어떤 유추적 전이의 요인이 영향을 미치는지를 알아보고자 한다. 즉 지금까지 유추와 관련된 선행 연구를 토대로, 학생들이 학습한 내용을 참고하고, 문제의 구조를 시각적으로 나타낸 그림·도표가 주어지고, 원학습의 양이 증가할 때 학생들의 대수 문장제 해결이 어떻게 달라지는지 알아볼 것이다. 참고허용 여부는 유추에 의한 문제 해결에 기억요인이 작용하는지를 보고자 한 것이며, 그림·도표 조건은 해결의 구조원리를 시각적으로 제시하여 개념적 이해가 촉진되는가의 여부를 보고자 한 것이다. 또한, 원학습인 학습문제의 수를 증가시켜 개념

* 이 논문은 2001년도 한국학술진흥재단의 지원(KRF-2001-030-D00015)에 의하여 이루어졌음.
* 2003년 2월 투고, 2003년 4월 심사 완료.
* ZDM분류 : D53
* MSC2000분류 : 97C99
* 주제어 : 유추, 문장제 해결.

적 이해와 해결 원리의 구조적인 측면에 주목하게 함으로써 문제 해결의 수행이 변화되는지를 알아보고자 한다.

유추적 전이에서 표적문제에 해당하는 대수 문장제는 근거 영역에 해당하는 학습문제와 맥락과 해결과정이 유사한 동치문제, 해결 과정만 유사한 동형문제, 맥락은 유사하나 해결 과정에 수정이 요구되는 유사문제로 구성된다. 본 연구의 결과는 유추에 의한 전략을 사용하여 수학적 문제 해결을 지도할 때, 어떤 요인을 고려하여 지도하여야 하는가를 연구하기 위한 기초연구가 될 것이다.

II. 이론적 배경

1. 유추와 문제 해결

유추는 유사성을 바탕으로 어떤 대상에 대하여 성립하는 성질로부터 그와 유사한 대상의 성질을 추측하는 것으로, 특히 문제해결에서 예전에 푼 문제와 새로 직면한 문제 사이의 유사성을 추측하여 해결 방법을 생각해내는 전략으로서 중요한 역할을 할 수 있다. Polya는 수학적 문제해결 전략으로, '친숙한 문제로 미지인 것이 같거나 유사한 문제를 생각해 보아라', '관련된 문제로 전에 풀어 본 일이 있는 문제가 있구나. 그것을 활용할 수 있을까? 그 결과를 활용할 수 있을까? 그 방법을 활용할 수 있을까?', '만일 제기된 문제를 풀 수 없다면, 먼저 어느 정도 그와 관련된 문제를 풀어 보아라. 보다 접근하기 쉬운 관련된 문제를 생각해 낼 수 있는가? ...유사한 문제는?'의 발문을 제안하고 있다. 이는 교사가 문제를 해결하는 학생을 돕거나 문제를 해결하는 사람이 자문하는 형식으로 유추를 불러일으키기 위한 것이다(우정호, 2000).

문제해결에서 유추는 이미 해결되었던 문제의 관계적인 구조를 새로운 문제로 사상하게 하며, 이것은 새로운 문제를 해결하는데 도움이 된다. 유추에 의한 문제 해결을 하기 위해서는 학습자가 근거 문제를 기억으로부터 재생하여 근거 문제의 관계적 구조를 일반화해야 한다. 그리고 표적문제와 근거문제 사이의 관계적 대응을 찾고 식별해야 한다. 그러나 초보 문제해결자들은 구조적인 유사성보다는 특별한 항목이나 대상과 같은 표면적인 특

징에 초점을 두기 때문에 다른 맥락의 문제들 사이에 구조적인 유사성을 알아내는데 어려움을 겪고 있다(Novick, 1988).

2. 유추적 전이의 과정과 그 촉진 요인

많은 학자들은 근거 영역의 지식을 표적 영역에 전이시켜 문제를 해결하는 단계가 있다는 생각에 많은 학자들은 동의한다(Gentner, 1989; Gick & Holyoak, 1983; Holyoak & Thagard, 1995). 그 단계의 첫 번째는 표적 영역의 정보를 부호화(encoding)하는 것으로, 표적에 관한 표상을 형성하는 과정이다. 둘째는, 기억에서 표적 영역에 맞는 근거 영역을 인출한다. 셋째는, 근거 영역과 표적 영역간의 사상(mapping)이 이루어진다. 사상은 근거와 표적, 이 두 영역의 성분들을 서로 대응시키는 과정이다. Gentner(1983)는 사상 과정이 계통성 원리(systematicity principle)를 따라 진행된다고 제안하였다. 이 원리에 따르면, 인간은 근거 영역과 표적 영역의 성분들을 사상시킬 때 대상이나 속성 중심으로 사상시키기 보다는 관계의 관계를 중심으로 사상시키며, 가능한 모든 성분들을 관계 구조에 포함시키는 사상을 선택한다. 하지만 초보 문제해결자에게는 계통성 원리가 맞지 않는 경우가 많다. 사상 과정에는 근거 영역의 해결 방안을 표적의 상황에 맞게 변화시키는 적합(adaptation) 과정이 포함되기도 하는데, Novick & Holyoak(1991)은 근거와 표적 영역의 성분들간의 사상만으로 성공적인 유추를 할 수 없고 문제에 따라 적합 과정이 필요하다는 주장을 한다. 마지막으로 유추적 전이의 네 번째 단계는 두 영역간의 공통점을 추상화하여 두 영역을 모두 포괄하는 보다 일반적인 스키마, 즉 새로운 지식구조를 형성하는 과정이다. 본 연구는 유추의 네 가지 과정 중 세 번째, 네 번째 단계에 초점을 두고 있다.

유추적 전이의 사상과 스키마 형성에서 유추적 전이를 촉진시킬 수 있는 요인들은 여러 선행 연구 결과를 토대로 찾아볼 수 있다. 이 요인들은 본 연구에서 유추적 전이의 문제 조건으로 사용될 것이다.

첫째는 근거에 대한 힌트(단서나 원리)의 제시이다. 이전에 해결한 문제 중 주어진 문제 해결에 적절한 수도 있는 것을 생각해 보게 하는 힌트를 줄 때 학생들의 유추적 전이에 향상이 있다는 연구 결과가 있다. 이 연구

들은 힌트가 제시되는 효과를 보고자 주로 영역간 전이 과제를 다루었으며 표면적인 구조의 유사성에는 관심을 두지 않는다(김영채, 1994). 힌트의 제시는 본 연구에서 표적 문제인 동형/동치, 유사문제를 해결하면서 근거문제인 학습문제를 참고할 수 있는 조건으로 사용될 것이다.

둘째, 시각적 보조물의 사용이다. 문제 해결 분야에서는 시각적 보조물을 사용할 때 어려운 문제가 쉽게 해결됨이 보고되었다. 예를 들어, Gick과 Holyoak(1983)는 문제를 풀기 전에 그림을 보여주면 피험자가 수렴적 해결책을 제대로 생성할 수 있다는 결과를 얻었다. 그림과 같은 시각적 보조물은 상황에 대한 표상을 확립시켜 주기 때문에 문제해결을 돕는 기능을 할 수 있다. 따라서 개념을 학습하고 기억, 이해해야 하는 과제에 있어서도 그림의 첨가는 시각적이고 역동적인 표상을 형성하여 추론을 도울 가능성이 크다(이현주, 1995). 본 연구에서 시각적 보조물은 문제의 구조를 시각적으로 보여주는 그림·도표의 조건으로 제시된다.

셋째, 근거유사물의 개수 즉, 원학습의 양이다. Gick과 Holyoak(1983)은 문제를 제시하기 전 근거유사물을 두 개 연속 제시하여 문제를 풀게 한 조건과 한 개의 근거유사물을 제시한 조건을 만들고 이 두 조건이 문제의 해결에 어떤 차이를 보이는지를 검토하였다. 원학습량이 많은 피험자들은 원학습량이 적은 피험자들보다 힌트가 있건 없건 간에 문제를 더 잘 풀었다. 이 결과는 유사한 문제를 풀어 학습자는 스키마를 형성하고 이로써 검사 문제를 잘 해결하게 된다는 것을 보여주며, 이것은 유추적 전이를 촉진시키는 것으로 해석된다. 원학습이 다른 과제에 전이되려면 우선 원학습의 정도가 전이가 일어나기에 충분해야 하며, 원학습의 정도가 중요한 전이 조건이 될 수 있을 것으로 보인다. 이에, 본 연구에서는 원학습량의 효과를 검증하기 위해 연구문제 5에서 학습문제의 양을 1개와 3개씩으로 하였을 때 학생들의 동치/동형 문제와 유사문제의 해결을 비교한다.

넷째, 관계구조를 추출하도록 근거와 표적간의 사상을 직접적으로 지시하는 것이다(김새로나, 1997). 유추적 전이가 일어나기 위해서는 이전의 경험 혹은 지식에 해당하는 근거영역과 새로운 문제상황에 해당하는 표적영역간에 유사성이 존재하고 이를 인지할 수 있어야 한다.

근거영역과 표적영역간에 존재하는 유사성은 표면 유사성과 구조 유사성으로 구분되는데, 표면 유사성이란 근거 영역과 표적 영역간의 대상이 색상이나 형태 등의 속성 수준에서 유사한 정도나 문제해결 상황에서 목표획득과 기능적·인과적 관련이 없는 요소들간의 유사성을 의미하고, 구조 유사성은 근거 영역과 표적 영역 각각에 포함되어 있는 대상들의 관계적 유사성이나 문제상황에서 목표획득과 기능적·인과적으로 관련되어 있는 요소들간의 유사성을 의미한다. 이런 유사성을 바탕으로 사상이 명료하게 지시될 수 있으며 본 연구에서는 근거문제인 학습문제와 이야기 맥락의 구조와 해결 절차 구조의 유사성이 사상되도록 동치문제와 동형문제, 유사문제를 구성하였다. 예를 들어, “12개의 초콜릿을 3명에게 나누어주어야 할 때 몇 개씩 나누어줄 수 있는가?”의 학습 문제가 주어진다면, 이야기 맥락과 해결과정이 학습문제와 유사한 동치문제는 “20개의 초콜릿을 5명에게 나누어 줄 때 몇 개씩 줄 수 있는가?”가 될 수 있고, 해결 과정만 유사한 동형문제는 “18개의 선물을 한 상자에 2개씩 포장한다면 몇 개의 상자가 필요한가?”가 될 수 있으며, 해결과정에 수정이 필요한 유사문제는 “21명의 학생이 4명씩 한 의자에 앉았다면 몇 개의 의자가 필요할까?”가 될 수 있을 것이다.

III. 연구 방법

본 연구는 참고 허용, 그림·도표, 학습문제의 양의 조건에 따라 근거 영역인 학습문제와 유사성이 있는 동치/동형, 유사문제의 해결이 어떠한지를 알아보고자 한 것이다. 본 연구의 절차와 방법을 구체적으로 설명하기로 한다.

1. 연구 문제 및 대상

본 연구의 연구 문제는 다음과 같다.

(1) 학습문제의 문제 구조가 그림·도표로 제시되지 않은 경우, 학습문제 풀이 과정의 참고 허용 유무와 동치/동형문제가 할당된 그룹조건에 따라 동치/동형문제와 유사문제 해결에 차이가 있는가?

(2) 학습문제의 문제 구조가 그림·도표로 제시된 경

우, 학습문제 풀이 과정의 참고 허용 유무와 동치/동형 문제가 할당된 그룹조건에 따라 동치/동형문제와 유사문제 해결에 차이가 있는가?

(3) 학습문제 풀이 과정의 참고를 허용하지 않은 경우, 그림·도표 유무와 동치/동형문제가 할당된 그룹조건에 따라 동치/동형문제와 유사문제 해결에 차이가 있는가?

(4) 학습문제 풀이 과정의 참고를 허용할 경우, 그림·도표 유무와 동치/동형문제가 할당된 그룹조건에 따라 동치/동형문제와 유사문제 해결에 차이가 있는가?

(5) 학습문제의 문제 구조가 그림·도표로 제시되고 학습문제의 풀이 과정의 참고를 허용한 경우, 원학습량과 동치/동형문제가 할당된 그룹조건에 따라 동치/동형 문제와 유사문제 해결에 차이가 있는가?

연구문제 1, 2는 참고허용의 효과, 연구문제 3, 4는 그림·도표의 효과, 연구문제 5는 원학습량의 효과를 알아보고자 한 것이다.

연구문제 1의 연구 대상은 서울 시내에 소재한 S중학교와 G중학교 1학년 학생 110명이다. 동치그룹과 동형그룹에 할당된¹⁾ 남·여 비율이 비슷하도록 조정을 하였다. 학습문제를 참고할 수 있는 경우와 그렇지 않은 경우가 있으며, 이에 따라 학생들은 <표 1>과 같이 4개 그룹으로 나뉘어진다. 실험 중 지시를 따르지 못한 학생의 자료와 불완전한 자료는 분석 대상에서 제외되었다. 연구문제 1은 문제구조가 그림·도표의 시각적 조건으로 제시되지 않은 상태에서 학습문제²⁾를 학습한 후, 참고 허용 유무와 동치/동형문제 그룹에 따라 동치/동형 문제와 유사문제 해결에 차이가 있는지 검증한다.

<표 1> 연구문제 1의 대상(그림·도표가 없는 경우)

	동치 그룹	동형 그룹	합계
참고 허용	31	27	58
참고 안함	27	25	52
합계	58	52	110

연구문제 2의 대상은 연구문제 1의 대상이 속한 S중학교와 G중학교 1학년 학생들 중에서 연구문제 1에 참

- 1) 본 연구에서 동치그룹은 동치문제와 유사문제를 받은 그룹을 말하며, 동형그룹은 동형문제와 유사문제를 받은 그룹을 말한다.
- 2) 학습문제는 유추적 전이에서 근거 문제에 해당하며, 검사 문제인 동치 문제, 동형 문제, 유사 문제는 표적 문제에 해당한다.

여하지 않은 121명이다. 참고 허용 여부와 동치/동형 문제 그룹에 따라 학생들을 <표 2>와 같이 4개 그룹으로 나누었다. 연구문제 2는 문제구조가 그림·도표의 시각적 조건으로 제시된 상태에서 학습문제를 학습한 후, 참고 허용 유무와 동치/동형문제 할당 그룹에 따라 동치/동형 문제와 유사문제 해결에 차이가 있는지를 검증한다.

<표 2> 연구문제 2의 대상(그림·도표가 있는 경우)

	동치 그룹	동형 그룹	합계
참고 허용	33	29	62
참고 안함	29	30	59
합계	62	59	121

연구문제 3의 대상은 연구문제 1, 2에 참여한 학생들 중 동치/동형 문제와 유사 문제를 푸는데 학습문제 풀이의 참고를 허용하지 않은 학생들이며, 학습문제 풀이에 그림·도표가 있는 것과 없는 것에 따라 <표 3>과 같이 4개 그룹으로 나뉜다. 연구문제 3은 학습문제를 학습한 후, 그림·도표 유무와 동치/동형 문제 그룹에 할당된 조건에 따라 동치/동형문제와 유사문제 해결에 차이가 있는지를 검증한다.

<표 3> 연구문제 3의 대상
(참고를 허용하지 않은 경우)

	동치 그룹	동형 그룹	합계
그림·도표 있음	29	30	59
그림·도표 없음	27	25	52
합계	56	55	111

연구문제 4의 대상은 연구문제 1, 2에 참여한 학생들 중 참고를 허용한 학생들로, 그림·도표가 있는 것과 없는 것에 따라 <표 4>와 같이 4개 그룹으로 나뉜다. 연구문제 4는 학습문제를 학습한 후, 그림·도표 유무와 동치/동형문제에 할당된 그룹조건에 따라 동치/동형문제와 유사문제 해결에 차이가 있는지를 검증한다.

<표 4> 연구문제 4의 대상(참고를 허용한 경우)

	동치 그룹	동형 그룹	합계
그림·도표 있음	33	29	62
그림·도표 없음	31	27	58
합계	64	56	120

연구문제 5의 대상은 연구문제 1~4의 대상이 속한 S 중학교와 G중학교 1학년 중에서 앞 연구에 참여하지 않은 123명이다. 혼합물과 일의 문제 유형³⁾ 각각에 대한 학습문제를 1개 학습한 경우와 학습문제를 3개 학습한 경우와 동치/동형 문제 그룹에 따라 <표 5>와 같이 4개 그룹으로 나뉜다. 연구문제 5는 문제 구조가 그림·도표로 제시되고 학습문제 풀이에 대한 참고를 허용한 경우, 학습량과 동치/동형문제에 할당된 그룹 조건에 따라 동치/동형문제와 유사문제 해결에 차이가 있는지를 검증한다.

<표 5> 연구문제 5의 대상
(그림·도표가 있고 참고를 허용한 경우)

	학습량1	학습량3	합계
동치그룹	33	30	63
동형그룹	29	31	60
합계	62	61	123

2. 검사 도구

연구문제에 사용된 검사도구는 Reed(1987, 1989), 김영채(1994), 이동선(1998)이 사용한 문제를 토대로 본 연구의 목적에 맞게 수정, 보완한 것이다. 문제 유형은 혼합물문제와 일문제이며, 문항의 예는 <부록 1~3>에 제시되어 있다.

본 연구에서 유추적 전이를 검증하기 위한 문제는 동치문제, 동형문제, 유사문제이다. 동치문제는 이야기 맥락과 해결 절차가 학습문제와 모두 같은 문제이고, 동형문제는 이야기 맥락은 다르지만 학습문제와 해결 절차가 같은 문제이다. 동치문제와 동형문제는 난이도를 비슷하게 조절하여, 각 그룹에게 4문제씩 제공되었다. 유사문제는 동치문제나 동형문제를 해결한 후 모든 학생에게 동일하게 4문제씩 제시되었으며, 이야기 맥락은 같지만 해결 절차는 학습문제 해결 절차에서 다소 수정이 필요한 문제이다. 각 학생의 점수는 문제의 정답수로 하였으므로 동치/동형 문제와 유사문제의 총점은 4점이다.

3. 연구 절차

학습문제와 검사문제의 유사성에 따른 유추적 전이를

3) 본 연구에서 혼합물문제는 액체나 고체를 혼합하는 문제(예: 소금물 혼합문제)를 말하며, 일문제는 어떤 일(work)을 완성하는 문제(예: 과제를 완성하는 문제, 물탱크를 채우는 문제)를 말한다.

검증하기 위한 검사문제의 적합성을 알아보기 위하여 서울에 소재하고 있는 Y중학교 2개 반을 무선 표집 하여 예비검사를 실시하였다. 예비 검사지를 투입하여 얻은 결과를 토대로 검사지를 수정, 보완하였다.

실험 중에 작용할지 모르는 가능한 사태를 통제하기 위하여 연구자들은 검사시 유의점에 대하여 실험대상 학교의 교사와 사전에 협의하고 지시하였다. 대수를 학습한지 4개월이 지난 후이기 때문에 교사는 실험이 시작되기 5분전에 혼합물문제와 일문제에 대한 사전지식을 확인하였다. 예를 들면, '소금물의 농도', '소금의 양 구하는 방법', '혼합물에서 소금의 양은 혼합 전·후에 변하지 않음'과 '일문제에서 일 전체의 양을 1로 놓는다' 등에 대한 지식을 실험대상에게 상기시켰다.

연구문제 1~4의 실험 대상 학생들은 학습문제 1개를 3분 동안 스스로 학습한 후, 동치그룹은 그 문제유형과 관련된 동치문제 2개와 유사문제 2개를, 동형그룹은 동형문제 2개와 유사문제 2개를 12분간 해결하였다. 그리고 나서 또 다른 문제 유형의 학습문제와 동치/동형문제, 유사문제를 같은 방법으로 시행하였다. 참고 허용 조건이 주어진 학생들은 학습문제의 모범 풀이과정을 참고하여 문제를 해결할 수 있었다. 각 학생들에게 동치/동형문제가 총 4개, 유사문제가 총 4개 주어졌으며, 실험소요시간은 30분이었다.

연구문제 5의 실험은 연구문제 1-4와 동일하나 원학습량이 3개인 그룹은 학습문제 3개를 9분간 학습한 후 동치/동형 문제와 유사문제를 풀었다.

4. 자료 처리

SPSS 10.0 프로그램을 사용하여, 연구문제 1, 2의 결과 분석은 동치/동형문제를 할당받은 그룹조건과 참고허용 조건을 독립변수로 하고, 동치/동형문제와 유사문제를 종속변수로 한 다변량분석을 실시하였다. 참고 허용 조건이 각 그룹 내에서 어떤 효과를 갖는지 알아보기 위해 단순주효과 분석도 실시하였다.

연구문제 3, 4의 결과 분석은 그룹 조건과 그림·도표 조건을 독립변수, 동치/동형문제와 유사문제를 종속변수로 한 다변량분석을 실시하였다. 그림·도표 조건이 각 그룹 내에서 어떤 효과를 갖는지 알아보기 위해 단순주효과 분석도 실시하였다.

연구문제 5의 결과 분석은 그룹 조건과 학습량을 독립변수, 동치/동형문제와 유사문제를 종속변수로 한 다변량분석을 실시하였다. 원학습량의 조건이 각 그룹 내에서 어떤 효과를 갖는지 알아보기 위해 단순주효과 분석도 실시하였다.

IV. 연구 결과 및 논의

1. 그림·도표가 없는 경우 문제 그룹과 참고에 따른 유추적 전이

동치/동형문제와 유사문제의 조합인 유추적 전이에 영향을 미치는 문제 그룹과 참고 허용 조건의 효과를 분석한 다변량분석 결과, <표 6>에 따르면 동치/동형문제에 할당된 그룹과 참고 허용 조건의 독립변인은 Wilks' λ 가 .995이고 유의확률이 .757로 유의수준 .05내에서 상호작용효과는 없었다. 그룹에 따라서는 Wilks' λ 가 .890이고 유의확률이 .002로 유의수준 .05내에서 유의한 차이가 있었다. 하지만 참고 허용 유무에 따라서는 Wilks' λ 값이 .963이고 유의확률이 .142로 유의수준 .05내에서 차이가 없었다.

<표 6> 그룹과 참고 허용에 따른 유추적 전이 차이

독립변수	종속변수	Wilks' λ		단변량		단계적 F	
		p	F	p	F	p	F
그룹 × 참고	동치/동형문제	.995	.552	.459	.552	.459	
	유사문제	p=.757	.150	.700	.011	.916	
그룹	동치/동형문제	.890	8.283	.005	8.283	.005	
	유사문제	p=.002	.013	.908	4.418	.038	
참고	동치/동형문제	.963	2.252	.136	2.252	.136	
	유사문제	p=.142	3.917	.050	1.172	.193	

그룹에 따라 동치/동형문제와 유사문제 각각의 유추적 전이에 어떤 효과가 있는지 알아보기 위해 각 종속변수별로 분석한 단변량 F 검정을 실시한 결과, <표 6>에서와 같이 동치/동형문제는 F값이 8.283이고 유의확률이 .005로 유의수준 .01내에서 차이가 있었다. 즉, 그림과 도표가 주어지지 않은 학습문제를 1개 학습한 후 동치문제와 동형문제의 해결에서 차이가 있었다. 동치문제를 해결한 그룹은 주변평균이 2.52이고 동형문제를 해결한 그룹은 주변평균이 1.88이었으므로, 맥락과 해결 절차가 모두 유사한 동치문제를 더 잘 해결했다고 볼 수 있다. 앞

서 투입된 종속변수에 중복되는 그룹의 영향이 제거되는 단계적 F검정 결과에서는 동치/동형문제를 해결한 그룹에 따라 유사문제에서 F값이 4.418이고 유의확률이 .038로 유의수준 .05내에서 유의한 차이가 있는 것으로 나타났다. 동치그룹의 유사문제 주변평균은 1.02이고 동형그룹은 주변평균이 .98로, 학습문제 1개를 학습한 후 동치문제를 해결한 학생들이 동형문제를 해결한 학생들보다 유사문제를 더 잘 해결한 것이다. 그림·도표 조건이 없을 때 학생들은 동치문제를 동형문제보다 더 잘 해결하였고, 동치그룹이 동형그룹보다 유사문제를 더 잘 해결하였다.

동치문제와 동형문제가 주어진 각 그룹 내에서 참고 허용 유무에 따라 유추적 전이에 차이가 있는지 단순주효과 분석을 실시하였다. <표 7>에 의하면, 동치그룹 내에서 참고 허용 유무에 따라 Wilks' λ 값이 .968이고 유의확률이 .186으로 유추적 전이에 대한 차이는 없는 것으로 나타났다. 하지만 종속변수별로 단변량 F검정을 실시한 결과 유사문제에서 F값이 2.955이고 유의확률이 .089로 유의수준 .10내에서는 차이가 있었다. 동치그룹에서 참고가 허용된 학생들의 유사문제 주변평균은 1.27이고 참고허용을 받지 않은 학생들의 주변평균은 .74로, 동치그룹에서 참고를 허용 받은 학생들이 유사문제를 더 잘 해결한 것으로 나타났다. 동형그룹 내에서는 참고 허용 유무에 따라 Wilks' λ 값이 .988이고 유의확률이 .540으로 유추적 전이에 대한 차이는 없는 것으로 나타났다.

<표 7> 그룹 내에서 참고허용에 따른 유추적 전이

독립변수	종속변수	Wilks' λ		단변량 F	p
		p	F		
참고 in	동치문제	.968	2.657	.106	
동치그룹	유사문제	p=.186	2.955	.089	
참고 in	동형문제	.988	.273	.603	
동형그룹	유사문제	p=.540	1.204	.275	

2. 그림·도표가 있는 경우 문제 그룹과 참고에 따른 유추적 전이

동치/동형문제와 유사문제의 조합인 유추적 전이에 영향을 미치는 문제 그룹과 참고 허용의 효과를 분석한 다변량분석 결과, <표 8>에 따르면 동치/동형문제에 할

당된 그룹과 참고 허용 조건의 독립변인은 Wilks' λ 가 .985이고 유의확률이 .416으로 유의수준 .05내에서 상호작용효과는 없었다. 그룹에 따라서는 Wilks' λ 가 .822이고 유의확률이 .000으로 유의수준 .01내에서도 유의한 차이가 있었다. 하지만 참고 허용 유무에 따라서는 Wilks' λ 값이 .972이고 유의확률이 .197로 유의수준 .05내에서 차이가 없었다.

<표 8> 그룹과 참고 허용에 따른 유추적 전이 차이

독립변수	종속변수	Wilks' λ		단변량 F	p	단계적 F	
		p	p			F	p
그룹 × 참고	동치/동형문제	.985	1.009	.317	1.009	.317	
	유사문제	p=.416	1.620	.206	.759	.386	
그룹	동치/동형문제	.822	17.369	.000	17.369	.000	
	유사문제	p=.000	.062	.804	6.890	.010	
참고	동치/동형문제	.972	.054	.817	.054	.817	
	유사문제	p=.197	2.030	.157	3.240	.074	

그룹에 따라 동치/동형문제와 유사문제 각각의 유추적 전이에 어떤 효과가 있는지 알아보기 위해 각 종속변수별로 분석한 단변량 F 검정을 실시한 결과, <표 8>에서 동치/동형문제는 F값이 17.369이고 유의확률이 .000으로 유의수준 .01내에서도 차이가 있었다. 동치문제를 해결한 그룹은 주변평균이 2.65이고 동형문제를 해결한 그룹은 주변평균이 1.93으로, 그림과 도표가 주어진 학습문제를 학습한 후 학생들은 동형문제보다 동치문제를 더 잘 해결했다. 앞서 투입된 종속변수에 중복되는 그룹의 영향이 제거되는 단계적 F검정 결과에서는 동치/동형문제를 해결한 그룹에 따라 유사문제에서 F값이 6.890이고 유의확률이 .010으로 유의수준 .05내에서 유의한 차이가 있는 것으로 나타났다. 동치그룹의 유사문제 주변평균은 .98이고 동형그룹의 주변평균은 1.03으로, 그림·도표 조건이 주어졌을 때 학습문제 1개를 학습한 후 동치/동형문제 점수의 영향을 제거한다면 동형그룹이 동치그룹보다 유사문제를 더 잘 해결한 것이다. 이야기 맥락보다 문제 해결절차가 시각적으로 주어진 문제를 해결한 학생들은 동형 문제를 근거 영역으로 표적 문제인 유사문제를 더 잘 해결한 것이다.

참고 허용의 유무에 따라 유추적 전이에 차이는 없었으나 동치/동형문제에 중복되는 참고 허용의 영향이 제거되는 단계적 검정을 실시한 결과, <표 8>에서 유사문

제의 해결은 F값이 3.240이고 유의확률이 .074로 유의수준 .10 내에서 차이가 있는 것으로 볼 수 있다. 참고를 허용할 때 유사문제의 주변평균은 1.16이고, 참고를 허용하지 않았을 때 주변평균이 0.86으로, 동치/동형문제 점수의 영향을 제거한다면 참고를 허용할 때가 참고를 허용하지 않을 때보다 유사문제를 더 잘 해결한 것으로 볼 수 있다.

동치문제와 동형문제가 주어진 각 그룹 내에서 참고 허용 유무에 따라 유추적 전이에 차이가 있는지 단순주효과 분석을 실시하였다. <표 9>에 의하면, 동치그룹 내에서 참고 허용 유무에 따라 Wilks' λ 값이 .990이고 유의확률이 .547로 유추적 전이에 대한 차이는 없는 것으로 나타났다. 동형그룹 내에서도 참고 허용 유무에 따라 Wilks' λ 값이 .968이고 유의확률이 .155로 유추적 전이에 대한 차이는 없는 것으로 나타났지만 동형문제와 유사문제 각각에 대한 단변량 F검정 결과 유사문제에서 F값이 3.557이고 유의확률이 .062로 유의수준 .10내에서 차이가 있었다. 동형그룹에서는 참고가 허용된 학생들의 유사문제 주변평균이 1.34이고 참고를 허용하지 못한 학생들의 주변평균은 .73으로 참고를 허용한 학생들이 유사문제를 더 잘 해결한 것으로 나타났다.

<표 9> 그룹 내에서 참고허용 조건에 따른 유추적 전이

독립변수	종속변수	Wilks' λ		단변량 F	p
		p	p		
참고 in	동치문제	.990	.547	.782	.378
동치그룹	유사문제	p=.547	.012	.012	.914
참고 in	동형문제	.968	.155	.292	.590
동형그룹	유사문제	p=.155	3.557	3.557	.062

3. 참고를 허용하지 않은 경우 문제 그룹과 그림·도표에 따른 유추적 전이

동치/동형문제와 유사문제의 조합인 유추적 전이에 영향을 미치는 문제 그룹과 그림·도표 조건의 효과를 분석한 다변량분석 결과, <표 10>에 따르면 동치/동형문제에 할당된 그룹과 그림·도표 조건은 Wilks' λ 가 .988이고 유의확률이 .542로 유의수준 .05내에서 상호작용효과가 없었다. 그룹에 따라서는 Wilks' λ 가 .873이고 유의확률이 .001로 유의수준 .01내에서 유의한 차이가 있었다. 하지만 그림·도표 유무에 따라서는 Wilks' λ 값이 .978이고 유의

확률이 .310으로 유의수준 .05내에서 차이가 없었다.

<표 10> 그룹과 그림 · 도표에 따른 유추적 전이 차이

독립변수	종속변수	Wilks' λ		단변량		
		p	F	p	적 F	
그룹 ×	동치/동형문제	.988	1.235	.269	1.235	.269
그림 · 도표	유사문제	p=.542	.506	.478	.010	.920
그룹	동치/동형문제	.873	12.046	.001	12.046	.001
	유사문제	p=.001	.178	.674	3.086	.082
그림 · 도표	동치/동형문제	.978	2.114	.149	2.114	.149
	유사문제	p=.310	.149	.700	.269	.605

그룹에 따라 동치/동형문제와 유사문제 각각의 유추적 전이에 어떤 효과가 있는지 알아보기 위해 각 종속변수별로 분석한 단변량 F 검정을 실시한 결과, <표 10>에서 동치/동형문제는 F값이 12.046이고 유의확률이 .001로 유의수준 .01내에서 차이가 있었다. 즉, 학습문제를 1개 학습한 후, 참고를 허용하지 않고 동치문제를 해결한 그룹은 주변평균이 2.52이고 동형문제를 해결한 그룹은 주변평균이 1.84이었으므로 동치문제를 더 잘 해결한다고 볼 수 있다. 앞서 투입된 종속변수에 중복되는 그룹의 영향이 제거되는 단계적 F검정 결과에서는 동치/동형문제를 해결한 그룹에 따라 유사문제에서 F값이 3.086이고 유의확률이 .082로 유의수준 .10내에서 유의한 차이가 있는 것으로 나타났다. 동치그룹의 주변평균은 0.86이고 동형그룹의 주변평균은 0.76으로, 참고를 허용하지 않았을 때 학생들은 동형문제보다 동치문제를 더 잘 해결한 것이다.

동치문제와 동형문제가 주어진 각 그룹 내에서 그림 · 도표 유무에 따라 유추적 전이에 차이가 있는지 단순주효과 분석을 실시하였다. <표 11>에 의하면, 동치그룹 내에서 그림 · 도표 유무에 따라 Wilks' λ값이 .946이고 유의확률이 .229로 유추적 전이에 대한 차이는 없는 것으로 나타났다. 하지만 동치문제와 유사문제 각각에 대한 단변량 F검정 결과 동치문제에서 F값이 3.013이고 유의확률이 .088로 유의수준 .10내에서 차이가 있었다. 즉 동치그룹 내에서 그림 · 도표가 주어진 학생들의 주변평균은 2.76이고 그림 · 도표가 주어지지 않은 학생들의 주변평균은 2.26으로, 그림 · 도표가 주어진 학생들이 동치문제를 더 잘 해결한 것으로 나타났다. 동형그룹 내에서는 Wilks' λ값이 .995이고 유의확률이 .870으로 그림 · 도표 유무에 따라 유추적 전이에 대한 차이는 없는 것

로 나타났다.

<표 11> 그룹 내에서 그림 · 도표 조건에 따른 유추적 전이

독립변수	종속변수	Wilks' λ		단변량	p
		p	F		
그림 · 도표 in	동치문제	.946	3.013	.088	
동치그룹	유사문제	p=.229	.560	.458	
그림 · 도표 in	동형문제	.995	.065	.800	
동형그룹	유사문제	p=.870	.058	.811	

4. 참고를 허용한 경우 문제 그룹과 그림 · 도표에 따른 유추적 전이

동치/동형문제와 유사문제의 조합인 유추적 전이에 영향을 미치는 문제 그룹과 그림 · 도표 조건의 효과를 분석한 다변량분석 결과, <표 12>에 따르면 동치/동형문제에 할당된 그룹과 그림 · 도표 조건의 독립변인은 Wilks' λ가 .992이고 유의확률이 .636으로 유의수준 .05내에서 상호작용효과는 없었다. 그룹에 따라서는 Wilks' λ가 .845이고 유의확률이 .000으로 유의수준 .01내에서 유의한 차이가 있었다. 하지만 그림 · 도표 유무에 따라서는 Wilks' λ값이 .998이고 유의확률이 .909로 유의수준 .05내에서 차이가 없었다.

<표 12> 그룹과 그림 · 도표에 따른 유추적 전이 차이

독립변수	종속변수	Wilks' λ		단변량		p	단계적 F	p
		p	F					
그룹 ×	동치/동형문제	.992	.371	.544	.371	.544		
그림 · 도표	유사문제	p=.636	.913	.341	.540	.464		
그룹	동치/동형문제	.845	11.942	.001	11.942	.001		
	유사문제	p=.000	.244	.622	8.380	.005		
그림 · 도표	동치/동형문제	.998	.173	.678	.173	.678		
	유사문제	p=.909	.017	.898	.018	.892		

그룹에 따라 동치/동형문제와 유사문제 각각의 유추적 전이에 어떤 효과가 있는지 알아보기 위해 각 종속변수별로 분석한 단변량 F 검정을 실시한 결과, <표 12>에서 동치/동형문제는 F값이 11.942이고 유의확률이 .001로 유의수준 .01내에서 차이가 있었다. 동치문제를 해결한 그룹은 주변평균이 2.64이고 동형문제를 해결한 그룹은 주변평균이 1.98이었으므로, 동치문제를 더 잘 해결한다고 볼 수 있다. 앞서 투입된 종속변수에 중복되는 그룹의 영향이 제거되는 단계적 F검정 결과에서는 동치/

동형문제를 해결한 그룹에 따라 유사문제에서도 F값이 8.380이고 유의확률이 .005로 유의수준 .01내에서 유의한 차이가 있는 것으로 나타났다. 동형그룹의 유사문제 주변평균은 1.25이고 동치그룹의 주변평균은 1.13으로, 참고를 허용한 학습문제 1개를 학습한 후 동형그룹은 문제 해결 절차를 수정하여 동치그룹보다 유사문제를 더 잘 해결한 것으로 나타났다.

동치문제와 동형문제가 주어진 각 그룹 내에서 그룹·도표 유무에 따라 유추적 전이에 차이가 있는지 단순주효과 분석을 실시하였다. <표 13>에 의하면, 동치그룹 내에서 그룹·도표 유무에 따라 Wilks' λ값이 .988이고 유의확률이 .682로 유추적 전이에 대한 차이는 없는 것으로 나타났다. 동형그룹 내에서도 그룹·도표 유무에 따라 Wilks' λ값이 .994이고 유의확률이 .855로 유추적 전이에 대한 차이는 없는 것으로 나타났다.

<표 13> 그룹 내에서 그림·도표 조건에 따른 유추적 전이

독립변수	종속변수	Wilks' λ		p
		p	F	
그룹·도표 in	동치문제	.988	.546	.463
동치그룹	유사문제	p=.682	.703	.405
그룹·도표 in	동형문제	.994	.018	.893
동형그룹	유사문제	p=.855	.286	.565

5. 그림·도표가 있고 참고를 허용한 경우 문제 그룹과 학습량에 따른 유추적 전이

동치/동형문제와 유사문제의 조합인 유추적 전이에 영향을 미치는 문제 그룹 조건과 학습량의 효과를 분석한 다변량분석 결과, <표 14>에 따르면 그룹과 학습량의 독립변인은 Wilks' λ가 .978이고 유의확률이 .278로 유의수준 .05내에서 상호작용효과는 없었다. 그룹에 따라서는 Wilks' λ값이 .911이고 유의확률이 .004로 유의수준 .01내에서 차이가 있었고, 학습량에 따라서도 Wilks' λ가 .878이고 유의확률이 .000으로 유의수준 .01내에서 유의한 차이가 있었다.

<표 14> 그룹과 학습량에 따른 유추적 전이 차이

독립변수	종속변수	Wilks' λ		단변량		단계적	
		p	F	p	F	p	
그룹×	동치/동형문제	.978	.005	.963	.005	.963	.005
학습량	유사문제	p=.278	1.429	.234	2.581	.111	
그룹	동치/동형문제	.911	9.767	.002	9.767	.002	
	유사문제	p=.004	.922	.339	1.664	.200	
학습량	동치/동형문제	.878	8.593	.004	8.593	.004	
	유사문제	p=.000	.085	.771	7.321	.008	

그룹·도표와 참고허용이 모두 있는 상황에서 그룹에 따라 동치/동형문제와 유사문제 각각의 유추적 전이에 어떤 효과가 있는지 알아보기 위해 각 종속변수별로 분석한 단변량 F 검정을 실시한 결과, <표 14>에서의 같이 동치/동형문제는 F값이 9.767이고 유의확률이 .002로 유의수준 .01내에서 차이가 있었다. 동치문제를 푼 학생들은 주변평균이 2.81이고 동형문제를 푼 학생들은 주변평균이 2.30으로, 동치문제를 더 잘 해결하였다고 볼 수 있다.

학습량에 따라 동치/동형문제와 유사문제 각각의 유추적 전이에 어떤 효과가 있는지 알아보기 위해, 각 종속변수별로 분석한 단변량 F검정 결과 <표 14>에서 동치/동형문제는 F값이 8.593이고 유의확률이 .004로 유의수준 .01내에서 유의한 차이가 있었다. 즉, 학습량이 1개인 경우 동치/동형문제의 주변평균은 2.38이고 학습량이 3개인 경우의 주변평균은 2.84로 학습량이 증가될수록 동치/동형문제를 잘 해결하는 것으로 나타났다. 앞서 투입된 종속변수에 중복되는 학습량의 영향이 제거되는 단계적 F 검정 결과 동치/동형문제를 해결한 그룹에 따라 유사문제에서 F값이 7.321이고 유의확률이 .008로 유의수준 .01내에서 유의한 차이가 있었다. 즉, 학습량이 1개인 경우 유사문제의 주변평균은 1.16이고 학습량이 3개인 경우의 주변평균은 1.39로 학습량이 증가될수록 유사문제도 잘 해결하는 것으로 나타났다.

동치문제와 동형문제가 주어진 각 그룹 내에서 학습량에 따라 유추적 전이에 차이가 있는지 단순주효과 분석을 실시하였다. <표 15>에 의하면, 동치그룹 내에서 학습량에 따라 Wilks' λ값이 .961이고 유의확률이 .096으로 유의수준 .10내에서 유추적 전이에 대한 차이가 있는 것으로 나타났다. 각 종속변수별로 단변량 F검정을 실시한 결과 동치문제에서 F값이 4.775이고 유의확률이 .031

로 유의수준 .05내에서 유의한 차이가 있었다. 동치문제에서 학습량이 1개인 학생의 주변평균은 2.55이고 학습량이 3개인 학생은 주변평균이 3.10으로 학습량이 많을수록 동치문제를 잘 해결하는 것으로 나타났다.

동형그룹 내에서는 학습량에 따라 Wilks' λ 값이 .927이고 유의확률이 .012로 유의수준 .05내에서 유추적 전이에 대한 차이가 있는 것으로 나타났다. 각 종속변수별로 분석한 단변량 F검정 결과에서는 동형문제에서 단변량 F 값이 4.991이고 유의확률이 .027로 유의수준 .05내에서 차이가 있었다. 동형문제에서 학습량이 1개인 학생들의 주변평균은 2.00이고 학습량이 3개인 학생들의 주변평균은 2.58로 학습량이 많을수록 동형문제 해결을 잘 하는 것으로 나타났다.

<표 15> 그룹 내에서 학습량에 따른 유추적 전이

독립변수	종속변수	Wilks' λ p	단변량 F	p
학습량 in	동치문제	.961	4.775	.031
동치그룹	유사문제	p=.096	2.380	.126
학습량 in	동형문제	.927	4.991	.027
동형그룹	유사문제	p=.012	.027	.870

본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 연구문제 1에서 그림·도표가 주어지지 않은 경우 참고 허용 여부와 관계없이 학생들은 동치문제를 더 잘 해결하였고 그 학생들이 유사문제도 더 잘 해결하였다. 동치 그룹의 학생들 중에서 참고가 허용될 때 학생들의 유사문제 수행이 향상되었다. 연구문제 2에서 그림 도표가 주어진 경우에도 마찬가지로, 참고 허용 여부와 관계없이 학생들은 동치 문제를 더 잘 해결하였고 그 학생들이 유사문제도 더 잘 해결하였다. 특히 동형그룹 내에서는 참고가 허용될 때 유사문제 수행을 잘 하였다.

둘째, 연구문제 3에서 참고가 허용되지 않은 경우에 그림·도표와 상관없이 학생들은 동치문제를 더 잘 해결하였고 그 학생들이 유사문제도 더 잘 해결하였다. 동치 그룹의 학생들 중에서는 그림·도표가 주어진 경우 동치문제를 더 잘 수행하였다. 연구문제 4에서 참고가 허용된 경우에도 마찬가지로, 그림·도표와 상관없이 동치문

제를 더 잘 해결하였다. 그러나 유사문제는 동형문제를 푼 동형그룹의 학생들이 더 잘 해결하였다.

셋째, 연구문제 5에서 그림·도표가 있고 참고를 허용한 경우 학생들은 동치 문제를 더 잘 해결하였고, 학습량이 늘어났을 때 동치/동형 문제의 해결 모두를 잘 했고 유사문제 또한 유의한 향상을 보였다. 동치 그룹 내에서는 학습량이 증가할 때 동치문제를 더 잘했고, 동형 문제도 마찬가지였다.

V. 결론 및 제언

중학교 1학년 학생들에게 어려운 대수 문장제의 해결을 유추에 의한 해결의 관점에서 분석하고자 한, 본 연구는 유추와 관련된 연구들을 토대로 유추적 전이에 영향을 주는 요인들을 연구 설계에 포함시켜 학생들의 대수 문장제 해결 능력의 향상 여부를 확인하고자 하였다. 참고 허용 여부, 그림·도표 조건, 원학습의 양을 달리하였을 때, 학습문제와 이야기 맥락과 해결 절차가 비슷한 동치, 동형, 유사 문제로 구성된 표적문제의 해결로 유추적 전이의 효과를 검증하고자 한 것이다. 본 연구의 결과는 다음과 같다.

첫째, 정교한 모범풀이가 주어진 학습문제는 해결 절차를 수정해야 하는 유사문제를 푸는데는 별로 도움이 되지 않고 동치문제에만 전이 효과가 있었다. 이것은 Reed, Dempster와 Ettinger(1985)의 연구를 지지하는 것이다. 그리고, 학생들은 그림·도표가 있든 없든, 참고가 허용되든 아니든 이야기 맥락까지 유사한 동치문제를 동형문제보다 더 잘 해결하였고, 그림·도표가 주어진 경우나 참고가 허용된 경우에만 동형그룹의 학생들이 유의한 차이로 유사문제를 잘 해결하였다. 이는 학생들이 학습한 내용에 구조적으로 접근하여 구조의 규칙을 추상화하는 데에는 어려움이 존재한다는 것을 보여준다.

둘째, 참고를 허용하면 수행수준이 향상된다고 주장하는 연구가 있으나(Reed, Dempster & Ettinger, 1985), 본 연구에서는 그림·도표가 주어지지 않은 경우 동치 그룹과 그림·도표가 주어진 경우 동형그룹에서 참고가 허용될 때에 학생들은 유사문제에서만 유의수준 .10 내에서 해결을 잘 하였다. 김영채(1994)도 대수 문장

제를 사용해서 참고 허용과 참고 불허에 따른 두 조건간에 유추적 전이에서 유의한 차이를 얻지 못하였으며 수학 문장제 해결과정에서 기억요인보다 풀이방법에 대한 이해가 중요하다는 것을 시사하였다. 이해해야 하는 내용이 매우 복잡하거나 또는 표적과제를 상당시간 동안 지연시켜 수행하면 이러한 조건에서 기억요인이 중요한 전이 조건이 될 수도 있을 것이며, 참고여부의 효과는 학습자의 이해수준 및 과제의 구조 복잡성 등과 관련된다고 볼 수 있다.

셋째, 그림·도표의 영향은 참고를 허용하지 않을 때 동치/동형 문제의 해결에 향상을 가져왔으며 참고를 허용할 때는 그림·도표의 영향이 없었다. 따라서, 그림·도표의 제공은 참고를 허용하지 않을 때 문제 해결의 성공을 돕는다고 할 수 있다. 시각적 보조물을 사용하는 것은 어려운 문제를 해결하는데 도움이 된다(Gick & Holyoak, 1983). 개념을 학습하고 기억, 이해해야 하는 과제에 있어서도 그림의 첨가는 시각적이고 역동적인 표상을 형성하여 추론을 도울 가능성이 크다고 볼 수 있으나 이는 참고가 허용되지 않는 제한된 조건에서 해당한다.

넷째, 유사한 문제를 여러 번 풀어 보는 것에 따라 학습의 정도는 달라진다. 본 연구에서 원학습의 양이 증가되었을 때 학생들의 동치/동형 문제의 해결과 유사문제의 해결에 유의한 향상이 있었다. 이는 대학생들을 대상으로 한 이동선(1998)의 연구와도 유사한 결과이다. 따라서 다른 과제로 전이가 일어나기 위해서는 원학습의 양이 전이가 일어나기에 충분해야 할 것이다.

이상의 연구에서 학습문제와 검사문제의 유사성에 따른 유추적 전이 수행에 있어서 대부분의 학생들은 총점 4점 중에 평균이 2점 미만으로 동형문제와 유사문제 해결에 어려움을 보였다. 이는 학생들이 유추적 문제해결의 경험이 적어 문제의 구조적 유사성을 주목하는데 어려움을 보였기 때문으로 볼 수 있다. 참고 허용, 그림·도표 조건은 전이를 크게 촉진시키지 못하였고, 학습량을 증가시킨 조건에서 전이가 촉진되었다. 이는 학습량이 증가함에 따라 충분한 개념적 이해뿐만 아니라 구조적인 유사성을 더 주목하게 됨으로써 문제해결을 촉진시켰다고 볼 수 있다. 따라서, 본 연구는 학교 현장에서 다양한 보기 문제의 제시를 통해 충분한 개념적 이해뿐만 아니라, 유추적 추론 능력을 향상시키기 위한 방안을 개발하

여 유추적 문제해결 경험을 증가시킬 필요가 있음을 시사한다.

본 연구를 토대로 다음을 제안하고자 한다.

첫째, 수학 문장제를 해결할 때 구조적 분석을 증가시키기 위한 문제 분류 과제와 유추 문제 구성 과제를 포함하는 수업 프로그램을 개발하여 유추적 전이가 촉진되는지가 조사되어야 할 것이다. 이에 대한 연구로는 Hallel & Peled(2001)의 연구가 있으나, 유추적 전이에서 사상을 명료하게 하고 추상적인 스키마가 형성될 수 있도록 유추적 전이 과정과 그에 관련된 요인의 조사에 더 많은 교육적 노력이 필요하다.

둘째, 문제 해결 뿐 아니라 수학 개념의 형성에서 유추가 사용될 수 있는 방안이 수학의 학문적 특성과 학생들의 추론 능력에 향상시킬 수 있도록 고안되어야 할 것이다. 이종희·김선희(2002)는 인수분해의 개념에 유추를 도입하여 대수적 개념의 발달을 지지하는 증거를 보인 바 있으나 수학적 개념과 관련한 유추의 연구는 아직 미비한 실정이다.

셋째, 유추는 학생들 스스로 터득하는 추론 방법은 아니며 과제에 특정한 추론이다. 학생들이 수학에서 연역적 논리 뿐 아니라 개연적 추론을 배우고 사용하기 위해 유추는 중요한 추론 방식이며, 앞으로 연구는 수학과 관련하여 유추를 방해하는 요인과 학생들의 배경지식, 작업기억용량, 과제의 난이도 등이 유추적 전이에 어떤 영향을 줄 것인지에 대해 심도 있게 조사할 필요가 있다.

참 고 문 헌

- 김새로나 (1997). 사영의 명료화와 개념의 난이도가 유추에 의한 개념학습에 미치는 영향, 이화여자대학교 석사학위논문.
- 김영채 (1994). 유추적 문제해결의 전이와 개념적 이해, 한국심리학회지 실험 및 인지 6, pp.132-163.
- 우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울: 서울대학교 출판부.
- 이동선 (1998). 문제의 구조와 검사조건에 따른 대수문제 해결의 유추적 전이효과, 계명대학교 석사학위논문.
- 이종희·김선희 (2002). 인수분해 문제 해결과 유추, 학 교수학 4(4), pp.581-598.

- 이현주 (1995). 유추가 개념의 이해와 학습에 미치는 영향, 이화여자대학교 석사학위논문.
- Chen, Z. (1996). Children's analogical problem solving : The effects of superficial, structural, and procedural similarity, *Journal of Experimental Child Psychology* 62, pp.410-431.
- English, L. D. (1997). Analogies, Metaphor, and Image: Vehicules for Mathematical Reasoning. In L. D. English(Ed), *Mathematical Reasoning* pp.3-18, Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- English, L. D. & Halford, G. S. (1995). *Mathematics Education*. Lawrence Erlbaum Association.
- Gentner, D. (1983). Structure-mapping: A theoretical framework for analogy, *Cognitive science* 7, pp.155-170.
- Gentner, D. (1989). The mechanisms of analogical learning. In S. Vosniadou & A. Ortony(Eds.) *Similarity and analogical reasoning*, pp.199-241, Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Gick, M. L. & Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer, *Cognitive Psychology* 15, pp.1-38.
- Holyoak, K. J. & Thagard, P. (1995). *Mental Leaps: Analogy in creative thought*, Cambridge, MA: The MIT Press.
- Hallel, E. & Peled, I. (2001). Composing analogical word problem to promote structure analysis in solving algebra word problem. In M. Heuvel-Panhuizen(Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education(PME 25)* 3, pp.105-112.
- Novick, L. R. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition* 14, pp.510-520.
- Novick, L. R. & Holyoak, K. J. (1991). Mathematical problem solving by analogy, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 17, pp.398-415.
- Reed, S. K. (1987). A structure-mapping model for word problem, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*. 13, pp.124-139.
- Reed, S. K. (1989). Constraints on the abstraction of solutions, *Journal of Educational Psychology* 81, pp.532-540.
- Reed, S. K.; Dempster, A. & Ettinger, M. (1985). Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition* 11, pp.106-125.

Middle School Students' Analogical Transfer in Algebra Word Problem Solving

Lee, Chong Hee

Ewha womans University

E-mail : jonghee@mm.ewha.ac.kr

Kim, Jin-Hwa

The Graduate School at Ewha Womans University

E-mail : hopstar@hanmail.net

Kim, Sun Hee

The Graduate School at Ewha Womans University

E-mail : ilovemath@empal.com

Analogy, based on a similarity, is to infer the properties of the similar object from properties of an object. It can be a very useful thinking tool for learning mathematical patterns and laws, noticing on relational properties among various situations.

The purpose of this study, when manipulating hint condition, figure and table conditions and the amount of original learning by using algebra word problems, is to verify the effects of analogical transfer in solving equivalent, isomorphic and similar problems according to the similarity of source problems and target ones. Five study questions were set up for the above purpose.

It was 354 first grade students of S and G middle schools in Seoul that were experimented for this study. The data was processed by MANOVA analysis of statistical program, SPSS 10.0.

The results of this studies would indicate that most of the students would be poor at solving isomorphic and similar problems in the performance of analogical transfer according to the similarity of source and target problems. Hints, figure and table conditions did not facilitate the analogical transfer. Merely, on the condition that amount of learning was increased, analogical transfer of the students was facilitated.

Therefore, it is necessary to have students do much more analogical problem-solving experience to improve their analogical reasoning ability through the instruction program development in the educational fields.

* ZDM classification : D53
* 2000 Mathematics Classification : 97C99
* key word : analogy, problem solving.

<부록1> 학습문제의 예(그림·도표 없음)

<혼합물 문제>

3%의 설탕물과 6%의 설탕물을 섞어서 4%의 설탕물 300g을 만들었다. 각각 필요한 설탕물은 몇 g인가?

<모범풀이>

(i) 3%의 설탕물을 x(g)라 하면 6%의 설탕물은 (300-x)(g)이 된다.

(ii) 3%의 설탕물 x(g)에 들어있는 설탕의 양은 $x \times \frac{3}{100}$ (g)이고, 6%의 설탕물 (300-x)(g)에 들어있는 설탕의 양은 $(300-x) \times \frac{6}{100}$ (g)이다.

(iii) 혼합 전·후의 설탕의 양은 같으므로 이 정보를 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$x \times \frac{3}{100} + (300-x) \times \frac{6}{100} = 300 \times \frac{4}{100}$$

(iv) x를 구하기 위해 이 방정식을 푼다. 먼저 양변에 100을 곱하면

$$\begin{aligned} 3x + 1800 - 6x &= 1200 \\ -3x &= -600 \\ x &= 200 \end{aligned}$$

∴ 3%의 설탕물 200g, 6%의 설탕물 100g.

<일 문제>

아버지는 방을 페인트칠하는데 4시간 걸리고 아들은 방을 페인트칠하는데 6시간이 걸린다고 한다. 그들이 함께 일한다면 몇 시간 걸리겠는가?

<모범풀이>

(i) 아버지와 아들이 함께 일한 시간을 x라 하자.

(ii) 아버지가 페인트칠을 완성하는데 4시간이 걸리므로 1시간에는 전체 일의 $\frac{1}{4}$ 을 완성할 수 있고, x시간 동안에는 $\frac{1}{4} \times x$ 를 완성할 수 있다.

(iii) 아들은 페인트칠을 완성하는데 6시간이 걸리므로

1시간에는 전체 일의 $\frac{1}{6}$ 을 완성할 수 있고, x시간 동안에는 $\frac{1}{6} \times x$ 를 완성할 수 있다.

(iv) 일을 완성하려면 아버지와 아들에 의해 마쳐진 부분의 합은 1이어야 하므로 이 정보를 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{1}{4} \times x + \frac{1}{6} \times x = 1$$

(v) x를 구하기 위해 이 방정식을 푼다.

$$\begin{aligned} \text{먼저 양변에 12를 곱해주면} \\ 3x + 2x &= 12 \\ 5x &= 12 \\ x &= 2.4 \\ \therefore 2.4\text{시간} \end{aligned}$$

<부록2> 학습문제의 예(그림·도표 있음)

<혼합물 문제>

3%의 설탕물과 6%의 설탕물을 섞어서 4%의 설탕물 300g을 만들었다. 각각 필요한 설탕물은 몇 g인가?

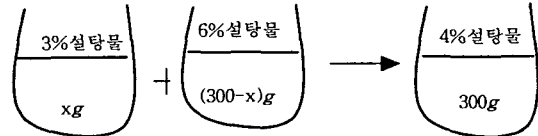
<모범풀이>

(i) 3%의 설탕물을 x(g)라 하면 6%의 설탕물은 (300-x)(g)이 된다.

(ii) 3%의 설탕물 x(g)에 들어있는 설탕의 양은 $x \times \frac{3}{100}$ (g)이고,

6%의 설탕물 (300-x)(g)에 들어있는 설탕의 양은 $(300-x) \times \frac{6}{100}$ (g)이다.

(iii) 이 정보를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



(iv) 이 정보를 도표로 나타내면 다음과 같다.

	혼 합 전		혼 합 후
설탕물의 농도(%)	3	6	4
설탕물의 양(g)	x	300-x	300
설탕의 양(g)	$x \times \frac{3}{100}$	$(300-x) \times \frac{6}{100}$	$300 \times \frac{4}{100}$

(v) 혼합 전·후의 설탕의 양은 같으므로 이 정보를 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$x \times \frac{3}{100} + (300-x) \times \frac{6}{100} = 300 \times \frac{4}{100}$$

(vi) x를 구하기 위해 이 방정식을 푼다.

먼저 양변에 100을 곱하면

$$3x + 1800 - 6x = 1200$$

$$-3x = -600$$

$$x = 200$$

∴ 3%의 설탕물 200g, 6%의 설탕물 100g.

<일 문제>

아버지는 방을 페인트칠하는데 4시간 걸리고 아들은 방을 페인트칠하는데 6시간이 걸린다고 한다. 그들이 함께 일한다면 몇 시간 걸리겠는가?

<모범풀이>

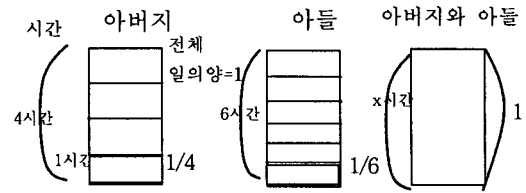
(i) 아버지와 아들이 함께 일한 시간을 x라 하자.

(ii) 아버지가 페인트칠을 완성하는데 4시간이 걸리므로 1시간에는 전체 일의 $\frac{1}{4}$ 을 완성할 수 있고, x시간

동안에는 $\frac{1}{4} \times x$ 를 완성할 수 있다.

(iii) 아들은 페인트칠을 완성하는데 6시간이 걸리므로 1시간에는 전체 일의 $\frac{1}{6}$ 을 완성할 수 있고, x시간 동안에는 $\frac{1}{6} \times x$ 를 완성할 수 있다.

(iv) 이 정보를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



(v) 이 정보를 도표로 나타내면 다음과 같다.

작업자	아버지	아들
시간당 완성한 일	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
일한 시간	x	x
완성한 일	$\frac{1}{4} \times x$	$\frac{1}{6} \times x$

(vi) 일을 완성하려면 아버지와 아들에 의해 마쳐진 부분의 합은 1이어야 하므로 이 정보를 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{1}{4} \times x + \frac{1}{6} \times x = 1$$

(vii) x를 구하기 위해 이 방정식을 푼다.

먼저 양변에 12를 곱해주면

$$3x + 2x = 12$$

$$5x = 12$$

$$x = 2.4$$

∴ 2.4시간

<부록3> 동치/동형/유사문제

[동치그룹]

<혼합물 문제>

동치문제1) 한 화학자가 12% 봉산 용액과 4% 봉산 용액을 섞어서 5% 봉산 용액 40L를 만들려고 한다. 각각 필요한 봉산 용액은 몇 L인가?

동치문제2) 한 간호사가 8%의 알콜 용액 50L에 4%의 알콜 용액을 섞어서 5%의 알콜 용액을 만들고자 한다. 4%의 알콜 용액 몇 L가 필요한가?

유사문제1) 12%의 소금물과 20%의 소금물을 섞어서 10g의 소금을 함유한 소금물 60g를 만들었다. 각각 필요한 소금물의 양은 얼마인가?

유사문제2) 12%의 소금물300g과 5%의 소금물 400g을 섞어 만든 소금물이 있다. 여기에 소금을 넣어 10%의 소금물이 되게 하려면 얼마의 소금을 넣어야 하는가?

<일 문제>

동치문제1) 민수는 컴퓨터로 과제를 완성하는데 8시간이 걸리고 철수는 같은 과제를 완성하는데 12시간이 걸린다. 그들이 함께 일한다면 몇 시간 걸리겠는가?

동치문제2) 집안 대청소를 하는데 딸 혼자서 하면 6시간이 걸리고 어머니 혼자서 하시면 4시간이 걸린다. 쉬지 않고 청소를 할 때, 어머니와 딸 둘이서 청소를 하는데 걸리는 시간은 얼마인가? (단, 어머니는 딸보다 1시간 먼저 일하고 계셨다.)

유사문제1) 어떤 일을 하는데 보아는 12일, 재원이는 8일 걸린다. 먼저 보아가 전체 일의 $\frac{1}{4}$ 을 한 다음 나머지 일을 보아와 재원이가 함께 마치려고 할 때, 둘이서 일을 해야 하는 기간은 며칠인가?

유사문제2) 형은 그의 집 정원에 나무를 심는데 9시간이 걸리고, 동생은 12시간이 걸린다. 형과 동생이 4시간 동안 함께 나무를 심은 뒤 동생은 쉬고, 형 혼자서 나머지 나무를 모두 심었다. 형이 혼자 나무를 심는데 걸린 시간은 얼마인가?

[동형그룹]

<혼합물 문제>

동형문제1) 1g에 10원하는 초코렛과 1g에 20원 하는 아몬드를 혼합하여 1g에 15원하는 혼합물 150g을 만들었다. 각각 필요한 과자의 무게는 얼마인가?

동형문제2) 한 우유 회사에서 1g에 20원하는 우유 60g과 1g에 30원하는 바나나를 혼합하여 1g에 25원하는 바나나 우유를 만들었다. 1g에 30원하는 바나나 몇 g이 필요한가?

유사문제1) 12%의 소금물과 20%의 소금물을 섞어서 10g의 소금을 함유한 소금물 60g를 만들고자 한다. 각각 필요한 소금물의 양은 얼마인가?

유사문제2) 12%의 소금물300g과 5%의 소금물 400g을 섞어 만든 소금물이 있다. 여기에 소금을 넣어 10%의 소금물이 되게 하려면 얼마의 소금을 넣어야 하는가?

<일 문제>

동형문제1) 물탱크를 가득 채우는데 작은 호스는 5시간 걸리고, 큰 호스는 3시간이 걸린다. 만약 두 호스가 동시에 사용된다면 물탱크를 채우는데 걸리는 시간은 얼마인가?

동형문제2) 작은 파이프는 15시간만에 기름탱크를 채울 수 있고 큰 파이프는 10시간만에 그것을 채울 수 있다. 만약에 두 파이프가 동시에 사용된다면 탱크를 채우는데 얼마의 시간이 걸리겠는가? (단, 작은 파이프는 큰 파이프보다 5시간 먼저 사용되었다)

유사문제1) 어떤 일을 하는데 보아는 12일, 재원이는 8일 걸린다. 먼저 보아가 전체 일의 $\frac{1}{4}$ 을 한 다음 나머지 일을 보아와 재원이가 함께 마치려고 할 때, 둘이서 일을 해야 하는 기간은 며칠인가?

유사문제2) 형은 그의 집 정원에 나무를 심는데 9시간이 걸리고, 동생은 12시간이 걸린다. 형과 동생이 4시간 동안 함께 나무를 심은 뒤 동생은 쉬고, 형 혼자서 나머지 나무를 모두 심었다. 형이 혼자 나무를 심는데 걸린 시간은 얼마인가?