韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2003, 8. 제 42권, 제 3호, 265-274.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2003, Vol. 42, No. 3, 265-274.

제 7차 수학과 교육과정과 교과서에 제시된 수 체계 도입에 관한 연구[1)]

김 홍 기 (단국대학교)

Ⅰ. 서 론

수 체계는 수학에서 가장 기본적인 내용 중의 하나로 그 내용 구성과 지도 방법이 각 나라마다 각양 각색으로 제시되어 있다. 우리의 경우에 수 체계에 대한 내용의 구성과 지도 방법을 분석하여 문제점들을 알아보고 바람직한 수 체계의 구성과 지도 방법을 모색하는 것은 의의 있는 일일 것이다.

우리나라에서는 유치원에서부터 10-단계까지의 수학에서 수에 대하여 체계적으로 배우게 되며 특히 초등학교 수학에서는 많은 양과 시간이 수의 지도에 할애되고 있다. 그러나 현행 초등학교 수학에서 수의 지도는 수학적인 원리나 법칙에 대한 지도는 거의 없고 단순히 계산 방법과 기능만 강조하여 지도함으로써 많은 문제점이 노출되고 있다. 수를 확장해 가는 과정에서 일관성을 잃고 있으며 연산법칙에 대한 지도도 초 중등을 통하여 잘 연계되어 있지 않다.

또, 제 6차 교육과정과 다르게 제 7차 교육과정에서는 중학교에서 처음으로 음수가 도입되고 음수의 뺄셈이 다루어지면서 같은 부호를 사용하게 함으로써 정수 개념의 확장 과정이 이해가 쉽지 않은 데다가 초등학교에서 연산을 다룰 때 못지 않게 음수를 포함한 연산도 자연스럽게 전개되지 않는다. 음수까지 확장된 수의 연산에서 수의 개념이 선명하게 처리되지 않았다면 그 이해와 활용은 어렵게 되고 결국에는 연산도 쉽게 하지 못하는 상황이 되기 때문이다.

한편, 9-가 단계에서 도입되는 무리수에 대하여 유리수와 대비하여 도입하는 것이 바람직해 보인다. 현행과는 다른 시각에서 무리수의 도입의 단계나 방법을 고려할 필요가 있다. 다양한 교수 학습 방법이 제안되는 것은 바람직한 내용 구성과 지도 방법의 구현에 도움이 되기 때문이다.

이상과 같은 필요에 의하여 본 논문에서는 수 개념의 도입과 전개 과정에 대하여 초등과 중학교 과정에 대한 제 7차 수학과 교육과정과 교과서를 분석하고 미국의 경우와 비교하여 위에서 열거한 문제점들을 알아보고 바람직한 해결책을 제안하려고 한다.

Ⅱ. 제 7차 교육과정과 교과서 분석

1. 수의 도입과 그 연계성에 대한 제 7차 교육과정의 분석

수의 도입과 관련하여 초등학교 교육과정 <1 단계>에서부터 <6 단계>의 수 체계 부분을 살펴보면 우선 〈1-나 단계〉 의 〈학습 지도상의 유의점〉 에서 '③ 100은 99다음의 수로서만 지도한다.'로 되어 있고, <2-가 단계>의 <학습 지도상의 유의점>에서 '① 1000은 999 다음의 수로서만 지도한다.'라고 되어 있다.

수에는 개수의 개념과 순서의 개념이 있는데 아동들은 하나 둘 셋과 같이 집합의 원소의 개수를 세는 개념을 먼저 이해하고, 그 후에 집합의 크기를 살피면서 크다 또는 작다라는 순서의 개념을 이해하게 된다. 이러한 일반적인 수 개념의 이해 과정과는 다르게 제 7차 교육과정은 수를 확장할 때, 100, 1000을 99, 999 다음의 수로 곧 순서수로만 지도하게 되어 있다.

〈1 단계〉 부터 〈6 단계〉 까지의 교육과정에 제시된

1) 이 연구는 2001학년도 단국대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음

* 2003년 3월 투고, 2003년 7월 심사 완료.
* ZDM분류 : F43
* MSC2000분류 : 97C90
* 주제어 : 수 체계, 정수, 유리수, 실수.

수와 연산 영역의 내용을 살펴보면 다음과 같다.

〈1-가 단계〉 : 간단한 수의 덧셈과 뺄셈, 덧셈과 뺄셈의 활용

〈1-나 단계〉 : 100 까지 수, 여러 가지 수세기 방법의 활용, 한 자리 수의 덧셈과 뺄셈, 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈, 덧셈과 뺄셈의 활용

<2-가 단계> : 1000까지 수, 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈, 곱셈의 도입, 덧셈과 뺄셈의 활용

<2-나 단계> : 곱셈 구구, 세 자리 수의 범위에서 덧셈과 뺄셈, 덧셈, 뺄셈, 곱셈의 활용

<3-가 단계> : 10000까지 수, 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈, 나눗셈의 도입, 곱셈과 나눗셈, 곱셈과 나눗셈의 활용, 분수의 이해

<3-나 단계> : 네 자리 수의 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈, 단위분수와 진분수, 소수(첫째 자리까지)의 이해

<4-가 단계> : 다섯 자리 이상의 수, 자연수의 사칙계산, 여러 가지 분수, 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈

<4-나 단계> : 분수, 소수, 분수와 소수의 크기 비교, 소수의 덧셈과 뺄셈

<5-가 단계> : 약수와 배수, 약분과 통분, 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈, 분수의 곱셈

<5-나 단계> : 분수, 소수의 곱셈과 나눗셈

<6-가 단계> : 소수와 분수

<6-나 단계> : 분수와 소수의 나눗셈

수의 계산에는 연산법칙의 지도가 배경이 되어 중학교 과정까지 연계되어야 한다. 그러나, 초등학교 단계에서는 학습 지도상의 유의점, 심화 과정의 어느 부분을 살펴보아도 연산 법칙에 대하여는 아무런 언급이 없이 주로 계산 방법과 계산 능력을 위한 서술로 되어 있다.

한편, 중학교 과정인 <7-가 단계>에서 처음으로 정수와 연산법칙이 도입되는데, 교육과정에 서술된 내용은 다음과 같다.

<7-가 단계>

$\boxed{4}$ 정수와 유리수

① 정수와 유리수의 개념을 이해한다.

② 정수와 유리수의 대소 관계를 이해한다.

③ 정수와 유리수의 사칙 계산의 원리를 이해하고, 사칙계산을 익숙하게 할 수 있다.

<용어와 기호> 집합, 원소, 원소 나열법, 조건 제시법, 유한집합, 무한집합, 공집합, 부분집합, 서로 같다, 밴다이어그램, 합집합, 교집합, 전체집합, 여집합, 차집합, 소수, 소인수, 소인수 분해, 서로 소, 거듭제곱, 지수, 밑, 십진법, 이진법, 진법의 전개식, 정수, 유리수, 절대값, 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙, 양수, 음수, 역수,

$$a \in A,\ b \notin B,\ \varnothing,\ A \subset B,\ A \not\subset B,\ A = B,\ A \cup B,$$

$$A \cap B,\ A^c,\ A - B,\ n(A),\ 1102_{(2)},\ +a,\ -a$$

<학습 지도상의 유의점>

③ 정수와 유리수에서 연산법칙을 지도할 때에는, 수 계산에 도움이 되는 정도로만 다룬다. 사칙 계산의 원리를 이해하고, 사칙계산을 익숙하게 할 수 있다.

위에서 보듯이 용어와 기호 부분에서만 연산 법칙에 대하여 언급되고 있는데 초등학교에서의 수 계산과는 연계되지 않은 채 다루어지고 있다. 위와 같이 <학습 지도상의 유의점>에서 「③ 정수와 유리수에서 연산 법칙을 지도할 때에는, 수 계산에 도움이 되는 정도로만 다룬다.」고 하여 간단히 취급하도록 하였으므로 교과서의 서술에도 영향을 주어서 한 자리 수에만 형식적으로 연산법칙을 다루게 되고, 보다 큰 수에서는 연산법칙과 관련하여 다루는 일이 없게 되어 이후 수를 잘 다루지 못하는 이유가 된다.

미국의 학교 수학의 원리와 규준(NCTM, 2000)에 의하면 초등학교 2학년까지 범자연수의 서로의 위치와 크기, 순서수와 기수(ordinal numbers and cardinal numbers)와 그들 관계의 이해를 계발해야만 한다. 또, 특별한 수를 사용하여 교환성과 같은 연산의 일반적인 원리와 성질들을 실례를 들어 설명해야만 하며, 3~5 학년에서는 교환성, 결합성, 분배성과 같은 성질들을 인지하고, 그 성질들을 범자연수를 계산하기 위하여 사용해야 한다. 6~8 학년에서는 정수, 분수, 소수의 계산을 간단히 하기 위하여 덧셈과 곱셈의 결합성과 교환성, 덧셈 위에서 곱셈의 분배법칙을 사용해야만 한다. 미국의 교과서를 살펴보면 위에서 제시된 내용에 따라 구성되어 있으며, 특히 연산 법칙에 대하여는 1~8 단계에서 계속 반복하여 제시하여 강조하고 있다.

한편, 제 7차 교육과정의 〈8-가 단계〉 에서는 다음과

같이 유리수와 순환소수의 관계를 지도하도록 되어 있다.

$\boxed{1}$ 유리수와 소수

①유리수를 소수로 나타낼 수 있다.

$\boxed{2}$ 유리수와 순환소수

①유리수와 순환소수의 관계를 이해한다.

<학습 지도상의 유의점>

① 유한소수를 순환소수로 나타내는 것은 강조하지 않는다.

② 순환소수를 분수로 고칠 때 공식화하는 것을 강조하지 않는다.

〔심화 과정〕

① 순환소수의 대소 관계를 알 수 있다.

순환소수의 도입은 〈9-가 단계〉에서 무리수 도입과 연계되어 있다. 무리수의 존재에 대하여 귀류법 증명을 다루게 하지 않는 현 교육과정에서 무리수의 존재는 학습지도상의 유의점으로 제시한 '무리수를 도입할 때에는 무한소수를 소재로 한다.'에 따를 수밖에 없게 된다. 그런데 위의 학습 지도상의 유의점 ①은 오히려 유리수와 순환 소수 관계를 규명하는 것을 막는 요인이 된다. 그리고 순환 소수를 분수로 고칠 때에는 주어진 순환 소수의 순환 마디의 개수가 n 일 때 그 순환 소수에 10^n 을 곱한 것에서 주어진 순환 소수를 빼는 방법으로 구할 수 있으므로 위의 <학습 지도상의 유의점> ②와 같은 내용은 제시될 만한 가치가 없다. 또 심화과정에서 '① 순환 소수의 대소 관계를 알 수 있다.'는 현행 교과서에서는 초등학교에서 유한 소수의 대소를 비교하듯이 순환소수의 소수점 아래의 숫자의 크기를 비교하여 판별하는 방법을 사용하고 있는데 이것은 예외적인 경우가 있으므로 이에 대한 지도를 처리할 수 있도록 해야 한다.

〈9-가 단계〉에서는 다음과 같이 무리수까지 도입하여 실수를 다루고 있다.

$\boxed{1}$ 제곱근과 실수

① 제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

② 무리수의 개념을 이해한다.

③ 수직선에서 실수의 대소관계를 이해한다.

$\boxed{2}$ 근호를 포함한 식의 계산

① 근호를 포함한 식의 덧셈과 뺄셈을 익숙하게 할 수 있다.

② 근호를 포함한 식의 곱셈과 나눗셈을 익숙하게 할 수 있다

<학습 지도상의 유의점>

① 무리수를 도입할 때에는 무한소수를 소재로 한다.

② 제곱근의 근사값이 필요할 때에는 제곱근표나 계산기를 사용하고, 제곱근 풀이법은 다루지 않는다.

〔심화 과정〕

① 임의의 두 실수 사이에 존재하는 실수를 찾는 방법에 대하여 알아본다.

여기서 학습지도상의 유의점에 무리수의 도입은 무한소수를 소재로 하도록 하였고, 실제로 유리수와 순환소수의 관계는 1년 전인 〈8-가 단계〉에서 다루었으므로 연계성에 간격이 있게 된다. 따라서 무리수의 정의 도입은 〈8-가 단계〉에서 다루고, 이곳에서는 제곱근으로 표현되는 수들 중에도 무리수가 있음을 알려주고 이들 무리수를 다루는 것이 바람직하다.

2. 수의 도입과 그 연계성에 대한 교과서 분석

1) 초등학교 과정에서 수의 지도에서 100, 1000, 10000의 도입 방법을 살펴보면 다음과 같다.

교육부에서 발행한 국정 교과서를 차례로 살펴보면, 우선 교육과정 〈1-나 단계〉의 8쪽에 '100까지 수의 순서를 알아봅시다.'에서는 〈학습 지도상의 유의점〉에서 언급한 '100은 99다음의 수로서만 지도한다.'에 따라서 "99쪽 다음 쪽에는 어떤 숫자가 쓰여 있습니까?"라고 한 후에 "약속하기 : 99 다음의 수를 100이라 하고, 백이라고 읽습니다."라고 하여 순서수로 100을 도입하였고, 그 후 〈2-가 단계〉의 3쪽에서 "약속하기 : 10이 열 개이면 100입니다. 100은 백이라고 읽습니다."라고 하여 기수로서의 100을 도입하였다. 같은 방법으로 <2-가 단계>의 10쪽에서는 <학습 지도상의 유의점>에서 언급한대로 "약속하기 : 999의 다음 수는 1000입니다. 1000은 천이라고 읽습니다."라고 도입하고, <3-가 단계>의 3쪽에서 "약속하기 : 100이 10이면 1000입니다. 1000을 천이라고 읽습니다."라고 하였다. 그리고 12쪽에서 "약속하기 : 9999다음의 수는 10000이라고 합니다. 10000을 만이라고

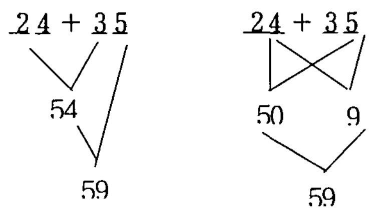
읽습니다."라 하고, <4-가 단계>의 2쪽에서 "약속하기 : 1000이 10이면 10000이다. 이것을 10000 또는 1만이라 쓰고, 만 또는 일만이라고 읽는다."고 하여 우선 100, 1000, 10000을 순서수로 도입한 후에 그 다음 단계에서 기수로 다시 도입을 하였다.

그러나 미국의 교과서들을 보면 같은 교과서에서 우선 기수로서 100, 1000, 10000을 이해하도록 하고 그 후에 순서수로서 같은 수를 이해하도록 하여 우리 나라의 취급과는 서로 다르다. 실제로 초등학교에서의 수의 도입은 순서수보다 기수(개수)로 도입하는 것이 자연스러울 것이고, 그와 함께 순서수로도 알아보는 것이 학습 심리상 이해하기가 더 쉽고 바람직한 방법이다.

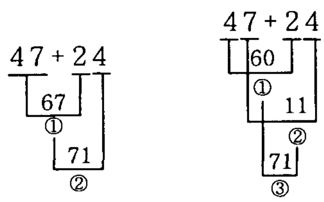
2) 초등학교의 수 체계에서 연산을 다룬 것을 살펴보면 다음과 같다.

교과서에서 가장 기본적인 덧셈, 곱셈의 지도를 살펴보면 초등학교 1, 2, 3학년에서 계산 방법에 대하여만 많이 다루고 있다. 연산 법칙 중 덧셈에 대한 교환 법칙을 다루는 것은 초등학교 과정에서는 <1-가 단계>에서 다룬 합이 10보다 작은 두 수에 대한 두 개의 활동과 6개의 문항이 전부이고, 다음부터는 다음과 같이 계산 방법만을 지도하고 있다.

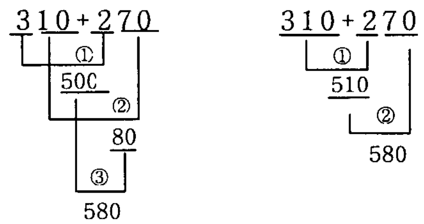
수학 1-나 83쪽 :「24 + 35 를 여러 가지 방법으로 계산하여 보시오.」



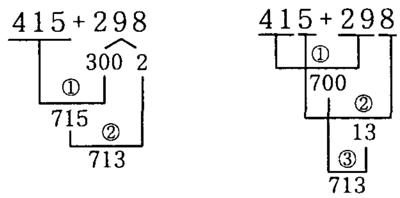
수학 2-가 58 쪽 :「 47+24 를 다음과 같이 계산하여 보시오.」



수학 2-나 38쪽에서는 세 자리 수의 덧셈 310 + 270 에 대하여 다음과 같이 계산 방법만을 제시하고 있다.



그리고 수학 3-가에서도 3자리의 수에 대하여 22쪽의「'활동 1' 415 + 298 을 계산하여 보시오.」에서 다음과 같이 계산 방법만을 제시하고 있다.



한편 곱셈에서는 수학 2-나의 16-17쪽의 '활동 1'에서 2×3 과 3×2 가 같음을 보인 후, 두 문제 $2\times4=4\times\square$, $3\times5=5\times\square$를 제시하였고, '활동 2'에서 앞에서 보면 5줄이고 옆에서 보면 8줄로 학생들이 서 있는 경우의 총 학생 수를 구하는 활동으로 두 수를 서로 바꾸어 구하면 어떻게 되는 가에 대하여 알아보고 문제 $9\times6=6\times\square$ 와 $7\times\square=8\times7$ 을 제시하였다. 그리고 18쪽에 3문제 '6×5는 5×6 과 같습니까?', '9×3은 3×9와 같습니까?', '7×4는 4×7과 같습니까?'만을 제시하였으며. 수학 익힘책 2-나에서 그림을 사용하여 6개의 문제를 제시한 것이 전부이다.

연산 법칙 지도의 중요성을 생각해 볼 때, 〈1-가 단계〉에서 한 자리의 수에 대한 덧셈에 관한 교환 법칙과 〈2-나 단계〉에서 간단히 다룬 곱셈의 교환 법칙만을 가지고는 너무나 미약하며, 따라서 학생들이 덧셈, 곱셈의 교환 법칙을 기억하고 활용한다는 것은 어려운 일이다. 그리고 세 수의 합, 곱을 구하기 위해서는 실제로 결합법칙이 활용되어야 하는데, 결합법칙에 대한 언급은

아무 곳에도 없다.

위에서 살펴본 바와 같이 우리 나라의 초등학교 교과서에서는 가장 기본적인 학습인 수의 덧셈, 곱셈을 지도할 때, 연산의 결합 법칙에 대한 지도는 하나도 없고 단지 차례대로 계산하는 것으로만 지도하고 있다. 본래 초등학교에서 취급하는 연산, 즉 덧셈(또는 곱셈)은 두 수에 대한 이항연산이므로, 세 수 또는 그 이상의 수에 대한 덧셈(또는 곱셈)은 결합법칙에 의하여 정의되어야 한다. 이와 같은 수학적인 내용을 초등학교 과정에서 정식으로 지도할 수는 없지만 그 법칙만은 알 수 있게 지도하여 암암리에 연산의 개념을 이해하게 하고, 또 결합법칙을 원활히 활용할 수 있게 해야 한다. 미국의 교과서(Bolster 외(1991), Champagne 외(1992), Charles 외(1998), Eicholz 외(1991))는 이러한 교수 과정을 잘 다루고 있다.

3) 중학교 과정(<7, 8 단계>)에서 정수와 유리수의 취급을 살펴보면 다음과 같다.

(1) 우선 음수는 제 6차 교육과정과는 달리 <7-가 단계>에서 처음으로 취급하게 된다.

온도, 손익, 수직선 등의 보기를 통하여 양의 부호 +, 음의 부호 −를 정의하고, " $+a$와 $-a$는 각각 플러스 a, 마이너스 a라고 읽는다."라고 도입한 후에 양수, 음수를 정의한 교과서들과, 손익 및 수직선의 보기를 통하여 양수, 음수의 정의를 먼저 한 후에 양의 부호 +, 음의 부호 −를 정의하고, " $+a$와 $-a$는 각각 플러스 a, 마이너스 a라고 읽는다."라고 도입한 교과서가 있다. 그리고 부호 +, −의 도입에서는 "서로 반대인 성질을 가진 수량에 대하여 부호 +, −를 사용하여 나타낼 수 있다."고 한 교과서가 있고 약간의 차이는 있지만 "기준보다 크면 +부호를, 기준보다 작으면 −부호를 붙여서 나타내면 편하다.", "영상의 기온을 영상3℃ 또는 +3℃, 영하의 기온을 영하 3℃ 또는 -3℃와 같이 나타내는 경우가 있다. 생활 주변에서 수를 부호 +와 −를 이용하여 나타내는 경우를 많이 찾아볼 수 있다.", "0 아래쪽에 있는 수에 붙은 부호 −는 '반대의'라는 뜻을 나타낸다. 이 직선에서 2천 원의 이익은 +2로 나타내었고, 반대로 2천 원의 손해는 −2로 나타내었다."와 같은 표현의 교과서도 있으며, "0을 기준으로 하여 0보다 1, 2, … 만큼 큰 수를 각각 +1, +2, … 로 나타내고, 0보다 1, 2, … 만큼 작은 수를 −1, −2, … 로 나타낸다.", "0보다 큰 수를 나타내는 +부호를 양의 부호, 0보다 작은 수를 나타내는 −부호를 음의 부호라고 한다. 그러나 0에는 양의 부호도 음의 부호도 붙이지 않는다."와 같이 직접 수에서 도입한 경우도 있다. 그리고, "서로 반대되는 양을 구분하여 나타내면 편리하다. 지금까지는 0 이상의 수를 다루었지만 이제부터는 0보다 작은 수도 생각한다. 0 보다 큰 수에는 +부호, 0보다 작은 수에는 −부호를 붙인다.", "수직선에서 0을 기준으로 하여 오른쪽으로 1, 2, … 떨어져 있는 수를 차례로 +1, +2, … 으로, 왼쪽으로 1, 2, … 떨어져 있는 수를 차례로 −1, −2, … 로 나타낸다." 고 한 교과서도 있다.

여기서 언급해야 할 것은 제 6차 교육과정에 의한 교과서에서는 초등학교 과정에서 정수를 도입하고 정수의 덧셈까지 다룬 후이므로 어느 정도의 배경적 지식을 갖고 중학교 과정에서 다시 정수를 다루게 하였다. 그러나 제 7차 교육과정에서는 중학교 과정에서 처음으로 다루게 되므로 수를 취급할 때의 부호 +, −를 직접 수직선을 사용하여 간단히 다루는 데 따른 문제점을 충분히 고려해야만 한다.

특히 부호 +, — 에 대하여 설명하면서 이들 부호가 붙은 수의 읽는 방법을 제시하였는데 그 방법이 잘못되어 있다. 예를 들면, 일부의 교과서에서는 "+3, —3을 플러스3, 마이너스3 이라고 읽는다."고 하였고, 또 나머지의 교과서에서는 "+a, —a을 플러스 a, 마이너스 a 이라고 읽는다."고 하였는데, 이것은 우리의 문화가 영어권에 속하게 되면서 부정적으로 나타난 현상이다.

미국의 교과서 중 Addison-Wesley Mathematics (Grade6, Eicholz 외, 1991 pp.336)에는「+3 is read "positive *three*", -8 is read "*negative eight*", The opposite of +3 is -3. 」라 하였고, MATHEMATICS (Smith, 1994 pp.93-94)에는 $-a$ 를 "음수 a, 또는 마이너스 a"라고 읽으면 안되고, " a의 반수(또는 반대수)라고 읽는다."고 서술하고 있다. 그 이유는 수학에서 부호 "−"는 다음과 같은 세 의미를 갖고 있기 때문이라고 하였으며 그에 따른 보기도 다음과 같이 들었다.

부호 "-"에 대한 세 가지 사용

· Minus는 뺄셈, 연산기호를 나타내기 위하여 사용된다.

· Negative는 수직선 위에서 원점의 왼쪽에 있는 수

들을 나타내기 위하여 사용된다.

· Opposite는 원점으로부터 반대 방향인 같은 거리를 나타내기 위하여 사용된다. 이 수는 양수일 수도 음수일 수도 있다.

* 보기("−" 부호가 있는 실산)

a. (-2)+(+9) Negative

b. -(+6)+(+4) Opposite

c. (+4)-(+7) Minus

d. -x Opposite ; 이 예에서와 같이 "−"부호가 변수에 홀로 나타날 때는 항상 opposite를 뜻한다.

e. x-y Minus ; 이 예에서와 같이 "−"부호가 두 변수 사이에 나타날 때에는 항상 subtraction(minus)을 뜻한다.

f. 부호 -x는 "the opposite of x"라 읽으며, "negative x" 또는 "minus x"라 읽지 않아야 한다.

(2) 유리수의 정의는 <7-가 단계>에서 정수 집합에서의 연산보다 먼저 취급하게 된다.

유리수의 정의로 "분자, 분모(≠0)가 정수인 분수로 나타낼 수 있는 수를 유리수", 또는 "0.5, 0, -3 은 $\frac{1}{2}$, $\frac{0}{3}$, $\frac{-6}{2}$과 같이 분자와 분모가 모두 정수인 분수로 나타낼 수 있다. 이와 같이, 분자와 분모(0이 아니다.)가 모두 정수인 분수로 나타낼 수 있는 수를 유리수라고 한다."고 하였다. 그런데 제 7차 교육과정에서는 정수의 곱셈과 나눗셈을 학습하기 전에 유리수의 정의를 언급해야 하므로, $\frac{+2}{+3}$, $\frac{-2}{+3}$, $\frac{+2}{-3}$, $\frac{-2}{-3}$와 같이 분자 분모(≠0)가 정수인 수가 각각 어떤 수인지를 알 수 없으므로 이러한 정의는 적합하지 않다.

그리고 일부 교과서에서와 같이 양수 음수의 도입에서 양의 유리수, 음의 유리수를 양수, 음수라고 정의하는 것은 <7-가 단계>의 자체로는 문제가 없지만, 발전적인 면에서는 문제가 있다. 곧 무리수의 도입에서 또 언급을 하여야 한다. 실제로 양수, 음수를 각각 0보다 큰 수, 0보다 작은 수라고 하여도 문제가 없다. 특히 정수에서 양의 정수 음의 정수를 구별하여 언급하는 경우에는 유리수도 양의 유리수, 음의 유리수로 언급하는 것이 체계가 있게 된다.

(3) 유리수의 대소 관계와 부등식 기호

유리수의 대소 관계를 도입하면서 "자연수에서와 마찬가지로, 유리수에 대해서도 수직선 위에서 오른쪽에 대응되는 수는 그 왼쪽에 대응되는 수보다 크다."와 같이 단정적으로 언급한 교과서와, "이와 같이 생각하면 수직선 위에 표시된 두 수 중에는 왼쪽에 있는 수가 오른쪽에 있는 수보다 작음을 알 수 있다.", "유리수는 모두 수직선 위에 나타낼 수 있다. 이 때, "수직선에서 오른쪽으로 가면 수는 점점 커지고, 왼쪽으로 가면 수는 점점 작아진다."고 하여 대소 관계를 정의한 교과서와 "유리수에서도 자연수에서와 마찬가지로 수직선 위에서 오른쪽에 있는 수가 왼쪽에 있는 수보다 크다고 말한다."고 하여 유리수에서 대소 관계를 정의한 교과서가 있다. 여기서는 유리수에서 처음으로 대소 관계를 도입하는 것이므로 마지막 경우처럼 새롭게 정의로 도입하는 것이 바람직하다. 그리고 부등호 사용에서도 일부의 교과서에서만 기호 " ≦ "을 사용하였고, 세 수에 대한 대소 관계는 그것도 일부의 교과서에서만 기호 "$a < b < c$"를 사용하고 있는데, 「'$a < b$ 이고 $b < c$'를 '$a < b < c$'와 같이 나타낸다.」는 설명(정의) 없이 적당히 사용하고 있다. 이 기호들은 교육과정에 없는 것들이다. 그러나 이 기호들은 <8단계>의 근사값에서 참값의 범위를 나타낼 때와 부등식에서 모두 사용해야만 하는 기호들이다. 결국 이들 기호에 대한 설명을 하지 않은 교과서들은 <8단계>에서 이들 기호를 설명 없이 사용하고 있는 것이다.

(4) 유리수의 연산에 대한 부적절한 교과서 탐구와 활동의 예시

유리수의 연산을 도입하면서 사용한 재료는 수직선, 바둑돌, 카드, 바둑돌과 수직선, 카드와 수직선, 연산의 규칙성 활용 등이다. 수직선을 사용한 도입에서는 조직적인 면이 부족하여 막연한 취급되었다. 예를 들어 정수의 덧셈을 수직선에서 화살표를 이용하여 도입하는 내용에서는 도입할 때에 수와 화살표와의 관계, 덧셈과 화살표 사이의 관계에 대하여는 아무런 설명도 없이 화살표를 사용하여 도입함으로써 내용의 연계가 명확하게 이루어지지 않고 있으며, 이에 따라 다음 내용까지 영향을 미친다. 바둑돌과 카드의 사용은 정수인 경우에는 상관

없지만 유리수의 경우를 함께 설명할 경우에는 문제점이 있으며, 이와 같은 직관적(실험적)인 도입으로부터 절대값을 사용하여 일반화해야 하는 과정에 대한 아무런 설명도 없다.

수의 연산에서 수직선 또는 그 이외의 도구를 사용하는 것은 이론적인 취급을 할 수 없는 중학교 과정에서 연산에 대한 이해를 직관적으로 돕기 위함인데 몇 교과서에서는 그 자체를 계산의 기본인 것으로 처리하고 있고, 절대값을 사용하여 두 수의 합을 구한 후에 수직선을 사용하여 계산 방법을 설명한 경우도 있다.

위에서 언급한 연산의 기본 법칙에 대하여 살펴보면, <7-가 단계>에서 처음으로 덧셈 곱셈에서 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙을 지도하고「정수와 유리수에서 연산 법칙을 지도할 때에는, 수 계산에 도움이 되는 정도로만 다룬다.」는 교육과정안에 따른 것인지 아주 간단하게 다루어 수학의 성격, 목표에 잘 부합되지 않음을 알 수 있다.

(5) 수를 다룰 때 문자의 사용

<7-가 단계>에서 문자와 식은 정수, 유리수보다 순서 상 뒤에서 취급함에도 불구하고 수 체계의 여러 곳에서 문자를 사용하는 것은 문제가 있다. 제 6차 교육과정에서는 초등학교 과정에서 그래도 일부 문자를 사용하여 중학교 과정에서 수를 다룰 때 문자를 사용하는 것이 무리한 것이 아니었지만 제 7차 교육과정에서는 초등학교에서 문자를 사용하지 않고 중학교 과정으로 문자의 사용이 이동되었기 때문에 수를 다룰 때 문자를 사용하지 않는 것이 바람직하다.

(6) 순환소수의 취급과 대소 관계의 비교

<8-가 단계>에서 순환 소수의 취급은 유리수와 순환소수의 관계를 규명하여 제 9-단계에서의 무리수 도입을 위한 선수 학습이다. 실제로 무리수의 존재에 대하여 귀류법에 의한 증명 방법을 사용할 수 없는 경우에는 순환소수를 사용하여 무리수를 도입할 수밖에 없으므로 순환소수와 유리수의 관계를 확실히 이해해야 한다. 따라서 수학적으로는 아무런 의미가 없는 계산 방법으로 <7-가 단계>에서 순환소수를 유리수로 고치는 계산까지 하고 있는 것인데도 많은 교과서에서 이와 같은 목적, 곧 순환소수와 유리수의 관계인

$$\boxed{\text{유리수}} \rightleftarrows \boxed{\text{순환소수}}$$

「모든 유리수는 순환소수로 나타낼 수 있고, 거꾸로 모든 순환소수는 유리수로 나타낼 수 있다.」

의 규명에는 미흡하거나, 또는 아예 관계없는 취급을 하고 있는 교과서도 있다.

그리고, 두 순환 소수의 대소 관계에 대하여 소수점 아래의 숫자를 비교하는 방법을 모든 교과서에서 사용하고 있는데 이것은 잘못된 것이다. 왜냐하면 두 수의 크기를 비교한다는 것은 그 두수가 명확하게 정해진 수인 경우이지 소수점 아래의 숫자가 무한히 계속되어 명확하게 정해지지 않은 수에 대하여는 의미가 없기 때문이다. 실제로 $0.1 = 0.1000\cdots$과 $0.0\dot{9} = 0.0999\cdots$ 의 크기를 소수점 아래의 숫자의 크기로 비교한다면 $0.1 > 0.0\dot{9}$ 가 되어 잘못되었음을 알 수 있다. 물론 순환소수를 분수로 고칠 때에도 옳지 않은 연산 방법을 사용하기는 하지만, 그래도 그 때에는 경우에 따라 잘못된 결과가 나오는 경우는 없다. 따라서 위와 같이 경우에 따라 잘못된 결과가 나오는 방법을 사용하는 것은 잘못된 것이다. 특히, 교육과정에 $0.\dot{9} = 0.999\cdots$와 같은 수의 취급을 어떻게 할 것인지를 교육과정의 유의점이나 교과서 집필상의 유의점에서 언급하는 것이 바람직하다. 참고로 순환소수의 취급에서 $1 = 1.000\cdots$과 같이 0을 순환마디로 사용하면 Dressler 외(1981)의 교과서에서 볼 수 있듯이 편리한 점이 많이 있다.

Ⅲ 제언 및 결론

1. 제 언

우선 초등학교 과정에서 수 체계 취급의 바람직한 방법에 대한 일부를 간단히 제시하면 다음과 같다.

㉮ 두 자리 수, 세 자리 수, … 의 확장은 기수와 순서수를 함께 사용하여 도입하고, 같은 단계에서 처리하도록 한다.

㉯ 연산의 법칙 곧 결합법칙, 교환법칙, 분배법칙은 이들 용어의 사용은 없더라도 초등학교 전 과정의 계산에서 취급하여, 계산 방법과 함께 계산 원리도 암암리에

이해할 수 있도록 충분히 다루도록 한다.

또, 중학교 과정 <7-가 단계>에서 수 체계 취급의 바람직한 방법에 대한 일부를 간단히 제시하면 다음과 같다.

㉮ 교육과정의 의 수 체계 부분인 [4] 정수와 유리수에서 부호를 사용하여 나타낸 수에 대한 충분한 실례를 제시하여 부호 +, ― 에 대하여 익숙하도록 한다.

㉯ 충분한 실례를 들어 서로 반대인 성질을 갖는 수 곧 반수의 개념을 잘 이해할 수 있게 한다.

㉰ 수의 범위의 확장을 다룬다. 즉, 초등학교에서 배운 이를테면 0보다 3 큰 수인 3과 4.5 큰 수인 4.5를 각각 양의 부호 +를 사용하여 +3과 +4.5로 나타내면, 이것과 반대인 성질을 갖는 0보다 3 작은 수와 4.5 작은 수는 각각 음의 부호 ―를 사용하여 ―3과 ―4.5와 같이 나타낸다. 이와 같이 하여 수의 범위를 넓혀서 0보다 작은 수까지 생각할 때, 0보다 큰 수를 양수, 0보다 작은 수를 음수라고 한다. 0은 양수도 음수도 아니다. 그리고 여기서 양의 정수, 음의 정수와 정수를 정의한다.

㉱ 유리수는 양의 유리수로 $\frac{자연수}{자연수}$, 음의 유리수는 $-\frac{자연수}{자연수}$ 와 같이 도입하고 양의 유리수, 0, 음의 유리수를 통틀어 유리수라고 하는 것이 바람직하다.

㉲ 음수까지 확장된 수에서의 대소 관계를 도입하기 위하여 수직선에 음수까지 나타낼 수 있도록 하고, 절대값을 알도록 한다.

㉳ 초등학교에서 배운 양수에서 수직선 위에서 오른쪽에 있는 수가 그 수의 왼쪽에 있는 수보다 크다는 것을 알고 있으므로, 0 과 음수를 포함한 수직선 위에서도 오른쪽에 있는 수가 그 수의 왼쪽에 있는 수보다 크다고 하고, 왼쪽에 있는 수는 그 수의 오른쪽에 있는 수 보다 작다고 한다고 하여 수의 대소 관계를 도입하는 것이 <9-가 단계>에서와 달리 이곳에서 바람직하다.

㉴ <7-가 단계>에서 부등호 ≦(≧)의 도입과 1≦2<3과 같은 세 수의 크기 관계도 정의하도록 하는 것이 바람직하다.

㉵ 유리수에서의 연산을 다룰 때에는 덧셈, 뺄셈, 곱셈은 수직선과 유향 선분을 이용하는 것이 바람직하다. 특히 정수만 다루는 경우를 생각하여 바둑돌이나 카드 등을 사용하여 참고 자료로 제시하는 것도 바람직하다.

㉶ 양수는 오른쪽으로 향하는 화살표, 음수는 왼쪽으로 향하는 화살표를 사용한다. 이를테면 +3, ―2를 길이가 3, 2인 유향선분으로 수직선 위에 나타낼 수 있게 하며, 여기서 중요한 것은 그 위치에는 영향을 받지 않음을 이해하도록 한다.

㉷ 덧셈은 화살표와 수직선을 사용하는데 두수의 덧셈은 우선 첫 번째 수를 원점 O에서 시작하는 화살표로 나타내고, 그 끝점에서 시작하는 화살표로 두 번째 수를 나타내어 두 번째 화살표의 끝점의 수를 두 수의 합으로 한다. 즉 두 수의 합을 나타내는 화살표는 첫 번째 화살표가 시작되는 원점에서 시작하여 두 번째 화살표가 끝나는 점에서 끝남을 (양수)+(양수), (양수)+(음수), (음수)+(양수), (음수)+(음수)의 각 경우에 대하여 그림으로 알게 한다. 그리고 이 그림에 의한 직관적인 방법의 한계성을 이해하고, 그 대책으로 절대값을 사용함을 알고 활용할 수 있도록 한다.

㉸ 뺄셈은 덧셈의 역산으로, 덧셈에서의 그림과 관련하여 이해할 수 있게 한다.

㉹ 덧셈, 뺄셈을 수의 계산 패턴을 사용하여 이해하도록 하고, 곱셈은 수직선과 수의 계산 패턴을 이용하는 것도 바람직하다.

㉺ 나눗셈은 곱셈의 역산으로 이해하게 한다.

㉻ 연산 법칙은 충분히 이해하고 그 활용할 원활히 할 수 있도록 충분히 다룬다.

그리고 〈8-가 단계〉에서 유리수와 소수, 순환소수에 대한 취급은 다음과 같이 하는 것이 바람직할 것이다.

㉮ 순환 소수는 무한 소수 중에서 특수한 수가 아니라 소수 중에서 특수한 경우로 도입한다.

㉯ 유리수의 순환소수 표현을 충분히 이해하도록 한다. 여기서 정수 및 유한소수로 나타내어지는 유리수의 순환소수로의 표현도 충분히 이해하도록 한다.

㉰ 숫자 0 하나만도 순환마디로 사용하도록 한다.

㉱ 순환소수의 유리수 표현을 충분히 이해하도록 한다. 여기서 순순환소수나 혼순환소수나 모두 순환마디의 숫자의 개수만이 유리수(분수) 표현에 영향을 준다는 것을 이해하게 하는 것이 편리하다.

㉲ 유리수의 순환소수 표현, 순환소수의 유리수 표현

관계를 명백히 규명하여 유리수와 순환소수의 관계를 이해하게 한다

㉥ 특히 무한소수로서의 무리수의 정의만은 이곳에서 도입하는 것이 바람직하다.

끝으로 〈9-가 단계〉 에서 무리수의 도입으로 실수까지 수를 확장할 때 다음과 같이 하는 것이 바람직할 것이다.

㉮ 무리수의 정의를 무한소수로 이해하는 것은 〈8-가 단계〉 에서 취급하도록 한다.

㉯ 제곱근의 뜻과, 제곱근으로 나타내어진 수 중에는 무리수가 있음을 알게 하고, 근호를 포함한 식의 계산을 할 수 있게 한다.

2. 결 론

수학 교육에서 가장 기본적이고 중요한 것 중의 하나는 수 체계의 바람직한 취급이다. 따라서 바람직한 수 체계의 취급에 대한 연구는 예로부터 많이 나와 있고, 지금도 계속 연구되고 있다. 여기서는 현재 우리 나라의 주로 중학교 과정에서 수 체계의 바람직한 취급에 대하여 알아보았다. 그런데 앞에서 살펴본 바처럼 수학 교과서의 집필에 기본이 되는 제 7차 수학과 교육과정이 초등학교와 중학교 과정의 연계를 매끄럽게 하지 못했고, 그것에 따라 집필된 교과서는 초등의 국정교과서를 비롯하여 중등의 여러 교과서가 공통적인 문제점을 보여주고 있다.

수학 교육은 학문의 성격상 이론적 체계의 논리적 비약을 최소화하기 위하여 노력하고 있지만, 같은 내용에 대하여도 심화하는 과정과 문화 여건에 따라 전개 방법에도 차이가 있을 수 있다. 그러나, 대개의 경우 내용의 전개 과정과 기호나 용어는 여러 나라가 공통적으로 사용하고 있다. 수 체계의 취급에서 양, 음의 부호가 붙은 수의 읽기, 유리수의 도입방법, 부등호의 사용, 순환소수와 유리수의 관계에 따른 무리수의 도입 방법과 도입 단계 등에 대하여 이 연구에서 지적하였다. 수 체계의 확장 방법, 확장된 수에서의 연산 도입과 순서 관계의 도입, 도입의 단계에 대한 개선이 이루어지기를 기대한다.

참 고 문 헌

강옥기 외 2인 (2001). 중학교 수학 7-가, (주)두산.

__________ (2002). 중학교 수학 8-가, (주)두산.

강행고 외 9인 (2001). 중학교 수학 7-가, (주)중앙교육진흥연구소.

__________ (2002). 중학교 수학 8-가, (주)중앙교육진흥연구소.

고성은 외 5인 (2001). 중학교 수학 7-가, (주)블랙박스.

__________ (2002). 중학교 수학 8-가, (주)블랙박스.

교육인적자원부 (1997). 수학과 교육과정(제 7차 교육 과정), 교육부.

__________ (1999). 중학교 교육과정 해설(III)(제 7차 교육 과정), 교육부.

__________ (1999). 초등학교 교육과정 해설(IV)(제 7차 교육 과정), 교육부.

__________ (2000). 수학 교과서 및 익힘책(1-가 ~ 6-나), 대한교과서 주식회사.

금종해 외 3인 (2001). 중학교 수학 7-가, (주)고려출판.

__________ (2002). 중학교 수학 8-가, (주)고려출판.

박규홍 외 7인 (2001). 중학교 수학 7-가, 두레교육(주).

__________ (2002). 중학교 수학 8-가, 두레교육(주).

박두일 외 4인 (2002). 중학교 수학 8-가, (주)교학사.

박윤범 외 3인 (2001). 중학교 수학 7-가, 대한교과서.

__________ (2002). 중학교 수학 8-가, 대한교과서.

배종수 외 7인 (2001). 중학교 수학 7-가, 한성교육연구소.

__________ (2002). 중학교 수학 8-가, 한성교육연구소.

신항균 (2001). 중학교 수학 7-가, 형설출판사.

양승갑 외 6인 (2001). 중학교 수학 7-가, (주)금성출판사.

__________ (2002). 중학교 수학 8-가, (주)금성출판사.

이 영하 외 3인 (2001). 중학교 수학 7-가, (주) 교문사.

이 준열 외 4인 (2001). 중학교 수학 7-가, (주)교과서출판 디딤돌.

__________ (2002). 중학교 수학 8-가, (주)도서출판 디딤돌.

전평국 외 4인 (2002). 중학교 수학 8-가, 교학연구사.

조태근 외 4인 (2001). 중학교 수학 7-가, (주)금성출판사.

__________ (2002), 중학교 수학 8-가, (주)금성출판사.

최용준 (2002). 중학교 수학 8-가, (주)천재교육.

황석근 외 1인 (2001), 중학교 수학 7-가, 한서출판사.
_________ (2002), 중학교 수학 8-가, 한서출판사.
Bolster, L. C. et al. (1991). EXPLORING MATHEMATICS (Grade 1~7), Scott, Foresman and Company.
Champagne, R. I. et al. (1992). MATHEMATICS (Grade 1, 3~8), Silver Burdett & Ginn.
Charles, R. I. et al. (1998). MATH Grade K-Grade 5. Scott Foresman Addison Wesley.
_________ (1998). Middle School MATH Course.1-Course.3. Scott Foresman Addison Wesley.
Dressler, I. et al. (1981). Integrated Mathematics I, AMSCO SCHOOL PUBLICATION, INC.
Eicholz, R. E. et al. (1991). Addison-Wesley Mathematics (Grade 1~8), Addison-Wesley Publishlng Company.
National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics, Reston, VA.
Smith, K. J. (2000), MATHEMATICS, Brooks/Cole Publishing Company.

Analysis of Number System introduced in the 7th National Mathematics Curriculum and Mathematics Text Books of Korea

Kim, Heung Ki

Dept. of Math. Ed., Dankook University, Hannam-dong, Youngsan-Ku, Seoul, Korea, 140-174

E-mail : hkkim@dankook ac.kr

To learn number system is a basic thing in school mathematics. In this paper, we analyze how number system is introduced in the 7th national curriculum and text books according to it. We found that the method of introducing number system is quite different from the former curriculum and former text books. There are many negative effects on the transition when compared with those of United States of America. There are many gaps between elementary school mathematics and middle school mathematics about levels and skills to deal with numbers. It is desirable to distinguish the negative sign from subtraction and to keep the concepts of commutativity and associativity of operations from the beginning. We also suggest to change the introducing timing and extension methods of number system in 7th grade mathematics.

* ZDM classification : F43
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C90
* key word : Number system, Integer, Rational number, Real number.