韓國數學敎育學會誌 시리즈 C
<初等數學敎育>
2003. 5. 제 7권, 제 1호, 43-56.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
May. 2003, Vol. 7, No. 1, 43-56.

초등학교에서의 군 개념 지도에 관한 연구[1)]

김용태 (광주교육대학교)
신봉숙 (금구초등학교)

I. 서론

수학을 아동에게 가르칠 때 사실의 더미나 중간언어만을 가르치는 것은 지능을 모독하는 것이기 때문에 수학의 구조를 가르쳐야할 필요가 있다. 수학은 대수적, 순서적, 위상적인 세 가지의 모구조를 가진다. 그 구조 중 가장 중요한 구조가 대수적 구조이고 그의 기본이 되는 구조가 군이므로 가급적 빠른 시기에 아동에게 군의 개념을 숙지시키는 것이 바람직하다(Beth & *Piaget,1961). 19세기* 독일의 Klein의 Erlangen program을 시작으로 아동에게 군 개념을 지도하고자 하는 운동이 시작되면서 군의 역사발생적 측면에 대한 심도 있는 연구와 최근의 양자역학이나 암호학에 이르는 군의 응용에의 연구가 지속되면서 가급적이면 일찍 학교 수학에서 군 개념이나 환, 체의 개념 지도의 도입에 대한 연구가 전세계적으로 넓혀지고 있다. Klein은 모든 현상을 함수로 간주하고 적당한 함수의 조작이 군을 형성하는 점에 관심을 가졌었고 Dubinsky (1994), Beth와 Piaget(1961), Farmer(1996), Freudenthal (1973A, 1973B, 1983)도 군 개념 지도에 지대한 관심을 가졌었다. 국내에서도 김용태(2001, 2003), 남진영외 (2002), 홍진곤(2000) 등의 수학자나 수학교육자 역시 군 개념 지도연구에 박차를 가하는 중이다.

우리나라의 제 7차 교육과정에서 강체운동을 통한 군 지도는 2-가 단계에서 활동 중심으로, 3-가 단계에서 도형의 세 가지 이동의 정의와 그의 합성을 중심으로, 4, 5, 6학년에서 강체운동의 내용과 그의 응용으로 테셀레이션 등을 지도하도록 되어 있다(교육부, 2000).

본 논문에서는 초등학교에서 지도되는 내용을 중심으로 대칭성에 기반을 둔 군 개념 지도의 이론적 배경을 논한다. 그리고 생활 주변에서 접하게 되는 대칭성을 근간으로 하는 구체적인 현상을 정리하고 Bruner (1973)의 나선형 교육과정 이론과 Piaget(1970) 등의 구조주의자 들의 구조의 이해, Freudenthal(1973B, 1983)의 교수현상학 그리고 군의 역사발생적 측면을 기초로 하여 초등학생에게 맞는 군 개념 지도를 재음미하고자한다.

II. 이론적 배경

1. 역사발생적 측면

군 개념의 발생은 대수방정식 이론 - 대수방정식의 가해성(Lagrange, Vandermonde, Ruffini 에서 Abel까지), 정수론 - 고대 이집트의 분수계산 ,양의 유리수의 곱셈, Fermat의 작은 정리, Euler의 멱 잉여, Legendre 기호의 연산 과정, Gauss의 합동식과 cyclotomic equation, 기하학 - 고대 Euclid의 증명의 과정에 나타난 군의 개념과 성질, Cayley-Sylvester의 불변론(묵시적인 군이론)의 치환군의 연결, Erlangen program(대수적 불변론과 기하의 분류:변환군의 분류) 등의 세 가지 뿌리를 가진다(Wussing,1984). 그러나 정수론과 기하학에 많은 비중이 실려있다. 군 개념은 이집트에서는 분수계산을 출발점으로 양의 유리수가 곱셈에 대하여 닫혀있다는 내용으로 출발하였고 비잔틴 학자인 Manuel Moschopulos(1300)의 마방진 연구와 유태인 학자인 Levi ben Gerson의 n개의 물체의 치환의 수는 n! 임을 증명하는 과정에서 이용한 수학적 귀납법 등으로 군의

* ZDM 분류: E42
* MSC2000 분류: 97C50

1) 이 연구는 광주교육대학교 2001년 학술연구비의 지원에 의해 수행 되었음

발생을 볼 수 있다(Freudenthal, 1973A). 현대의 의미로서의 군 개념은 갈로아가 처음 도입했지만 라그랑쥬와 반더몽드에 의한 치환군으로 시작된다(Waerden, 1985).

군 개념을 공식적으로 정리한 사람은 Jordan이다. 그는 군 개념을 이용하여 대수계와 기하를 해석하였다. Jordan의 영향을 받아 기하에 군 개념을 도입한 사람은 Klein과 Lie인데, Klein은 Cayley의 사영기하 이론을 도입하여 기하의 자기동형군으로 기하학적 성질을 분류하였다(Wussing, 1984). 이 생각이 Klein이 주도한 Erlangen program의 주된 아이디어이다.

2. 군 지도의 역사

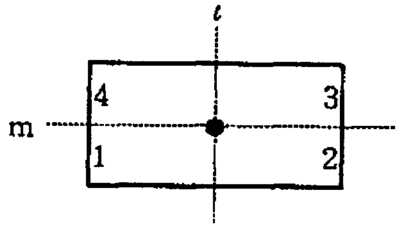
가. 현대의 군 개념 지도 방향

1872년 Erlangen Program을 발표한 Klein은 변환군을 이용하여 기하를 분류하였다. 즉 정사각형이 아닌 직사각형의 모든 대칭변환의 집합 V는 군이된다. 또한 INRC 즉, identity, reciprocity, negation 과 N과 R의 상관(corelation)에서 NR=C, RC=N,CN=R … 이므로 V와 동형이고 H_2O 의 분자의 점군(Point group) 역시 V 와 동형이다. Freudenthal(1973A)은 군은 어떤 구조의 동형사상의 체계이라고 했다. 예를 들면 τ: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 를 $a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$ 인 한 동형사상이라 하면 {1,τ}은 군이 된다. 따라서 군 개념이 그 도입 방법 자체로부터 보증된다 했다. Cayley는 군은 어떤 집합의 일대일 사상의 부분집합과 동형이고 특히 유한군은 치환군의 부분집합과 동형이라하였다. 즉, 생활속의 내용을 활용하고, 군 개념의 도입 과정 자체를 아동이 받아들여 심상을 구축하고 추상군의 역사 발생적 본질인 치환의 지도를 강조하여 군 개념 지도의 방향을 제시하고 있다.

나. Klein의 군개념을 이용한 기하지도

Erlangen Program을 주도한 Klein은 근대 수학교육의 3인 중 한 사람이다. 그는 기하학은 어떤 군의 불변이론이다라고 주장하여 기하학에의 전체적으로는 잘못된 관점을 갖기도 했지만 사영기하에 국한하여 보면 그의 이론은 옳은 것이고 후에 Lie에 의해서 확장되게 되었다.

그래서 Klein은 Erlanger Program에서 기하교육을 군 개념을 이용하여 지도하는 것이 바람직하다고 하였다. 그래서 만든 예가 Klein의 4원군이다. 꼭지점의 번호에 주의하면서 다음의 직사각형을 회전시키는 것을 생각해 보자.



σ: l축180°회전

τ: m축180°회전

ρ: o를중심으로180°회전

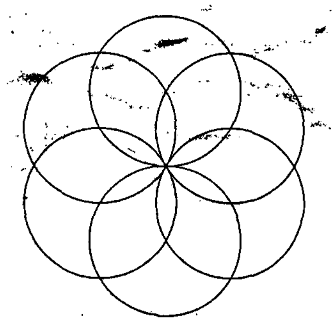
ι: 그자리

<그림 1> Klein의 사원군

그러면 $V=\{\sigma, \tau, \rho, \iota\}$은 Abel군을 이룬다. 그런데 정삼각형에서는 V가 군이 아니다. 따라서 직사각형과 정삼각형은 다르다는 결론을 얻게 된다. 그러나 이 방법은 상당히 많은 문제를 안고 있다. 즉, 기성수학의 표출된 지식이 아니라 아동이 충분한 활동을 통하여 합성가능성, 결합성, 가역성 등의 군성체를 형성하도록 해야한다. 그래서 Freudenthal(1973A, 1983)은 Bruner(1973)의 "모든 주제는 효율적이고 지적으로 정직한 형태로 아동의 모든 성장 단계에서 지도가 가능하다"는 가설을 이용하면서 "아동에게 군 개념을 지도할 때 동화판 이론을 가르치지 말고 군 개념의 본질을 지도하는 것이 바람직하고 특히 그에 맞는 교재 개발이 중요하다"고 했다(Freudenthal, 1973A, 1983).

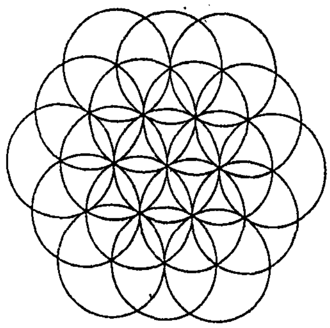
3. 군의 본질인 대칭

다음 그림은 8살의 여자 어린이가 콤파스로 그린 그림이다.



<그림 2> 대칭 도형-1

어린아이의 그림으로는 꽤 정교한 편이데, 칭찬을 해주었더니 다음에 있는 그림을 그려 놓았다.



<그림 3> 대칭 도형-2

물론 그 아동은 이 그림을 그리면서 수학자들이 하는 것과 같은 사고를 이 능력으로 할 수는 없었겠지만 분명히 그 아동은 이 그림을 그리면서 본능적으로나마 마음속에 자그마한 수학적 이론을 확실하게 인지하고 있음을 느꼈다(Freudenthal, 1973A).

석기시대 그릇의 문양에서부터 알함브라 궁전의 장식이나 Escher의 정교한 그래픽 작품에 이르기까지 미술이나 건축에서 대칭은 중요한 역할을 하여왔다. 물론 과학에서도 오랜 옛날부터 내려온 원리로서의 대칭을 이해하고 사용해왔다. 몇 가지 예를 들어, 인류역사상 이름이 밝혀진 최초의 과학자이고 그리스의 최초의 기하학자로 알려진 탈레스는 기하학적인 정리를 대칭으로 공식화하였다. 또한 대칭에 관한 논의로는 Anaximander가 우주에서 지탱되는 지표판이 기울어지지 않고 무너지지 않는 이유를 천체의 모든 부분에서 등거리에 있음으로 설명하고 있다. 그리고 중세의 학자인 Buridan의 유명한 일화가 있다. 즉, 그는 같은 크기와 같은 냄새가 나는 두 꼴더미 사이에 노새를 두면 노새는 굶어죽는다는 것이다. 왜냐하면 그 노새는 양쪽 중 어느 하나를 먹어야 할 분명한 이유를 찾지 못하기 때문이라는 것이다.

수학적인 예를 들면, 정육각형이나 그와 비슷한 위의 아동의 그림에서 볼 수 있는 아름다움을 볼 수 있다. 그리고 대칭에 관한 논의는 확률론에서 깊은 의미를 찾을 수 있다. 즉, 항아리 속의 구슬을 꺼낼 때 각 구슬이 꺼내질 기회가 같다. 또한 A에서 F까지 6명을 한 줄로 세울 때 A가 B의 왼쪽 근처에 서 있을 기회는 무엇인가? A가 B의 왼쪽에 서 있을 기회나 B가 A의 왼쪽에 서 있을 기회는 같다. 즉 그 기회는 각각 반이다.

다음 식을 생각해 보자.

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$$
$$= (x+y+z)^3 + 6xyz$$

이 식은 진정한 항등식인가? 아니다. 왜냐하면 오른쪽 식은 x, y, z에 대해서 대칭인 반면 왼쪽은 그렇지 못하기 때문이다.

4. 수학에서의 대칭

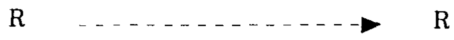
도형의 대칭이란 모양을 불변으로 하는 입체운동이다. 즉 대칭이란 도형의 모양이 처음의 그 모습 그대로 남게 하는 강체운동이라 한다.

가. 강체운동

강체운동은 평행이동, 회전, 반사 등을 일컫는다. 그러면 강체운동은 다음과 같이 분류된다

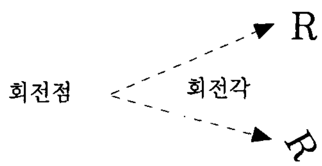
1) 이동의 종류

- 평행이동 (T) : 고정점 없음



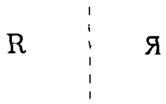
<그림 4> 평행이동

- 회전 (R) : 유일한 고정점(회전점)



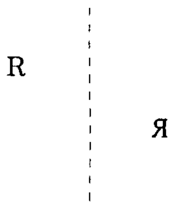
<그림 5> 회전

- 반사 (MR) : 대칭축



<그림 6> 반사

- 미끄러짐 반사 (GR) : 고정점 없음



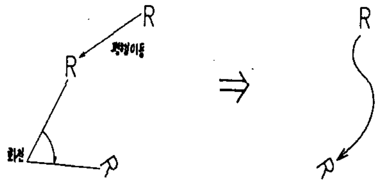
<그림 7> 미끄러짐 반사

- 제자리 (I) : 모든 점이 고정됨.

나. 이동의 합성

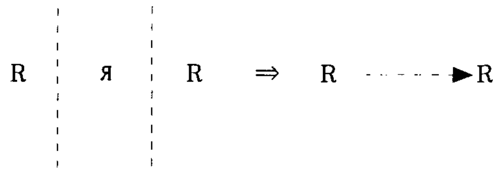
TT=T, RT=R, …이 된다. 즉,

- 평행이동을 계속하면 평행이동이 된다.
- 회전을 계속하면 회전 또는 평행이동이 된다
- 평행이동과 회전을 계속하면 회전이 된다

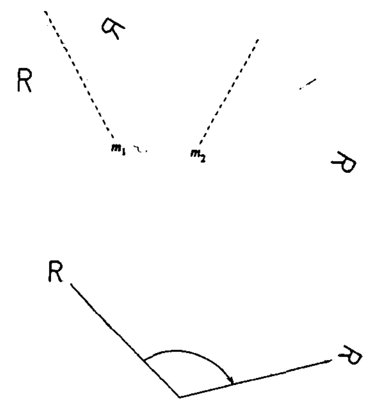


<그림 8> 평행이동과 회전

- 반사를 계속 두 번하면 평행이동이 되거나 회전이 된다



<그림 9> 거울이 평행인 경우



<그림 10> 거울이 만나는 경우

- 회전과 반사를 계속하면 반사가 된다

그러면 $\{T, R, MR, GR, I\}$는 이동의 합성에 대한 군이 된다.

이것을 합동변환군이라 한다. 따라서 위에서 논한 생활 속에서 대칭을 모으면 그 구조가 군이 되는 점이 중요하다. 특히 두 방향으로의 평행이동 대칭을 가지는 패턴을 벽지패턴이라 한다. 즉 위/아래 와 좌/우로 움직였을 때 원래대로 되는 것을 벽지패턴이라 한다.

Ⅲ. 지도의 실제

본 장에서는 Brousseau의 교수학적 상황론의 미로게임, Piaget(1970)의 조작활동을 통한 군성체의 습득, Bruner(1973)의 나선형 교육과정에 기반한 지도방법, Freudenthal(1983)의 수학화 학습 즉 조작활동이나 분수의 구체적인 연산과정을 통한 심상 형성 등을 포함한, 초등학생에게 군 개념의 지도를 위하여 실행한 지도 내용을 활동별로 나누어 논한다.

1. 군성체 형성을 위한 활동

2002년 5월 광주 G 초등학교 5학년 40명 대상으로 실행한 내용이다. 1차시와 2차시에는 아동에게 Piaget (1970)의 군성체의 형성을 목표로하였다. 3차시는 1,2 차시에서 형성될 것으로 예상되는 군성체를 초등학교 아동이 어려워하는 분수의 나눗셈과 연결시키고자 1,2 차시 바로 다음 시간에 실행하였다. 3차시의 내용은 보물 찾기, 강체 운동과 연계하여 역사발생 중에서 분수 연산을 통한 군 개념의 형성을 목표로 하였다.

가. 지도 내용

1) 1차시 : 보물 찾기

가) 학습 목표 : 옮기기(평행이동)로 벽지 채우기

나) 학습자료 : (교사) 모눈칠판, 원형색자석,
(아동) 지우개

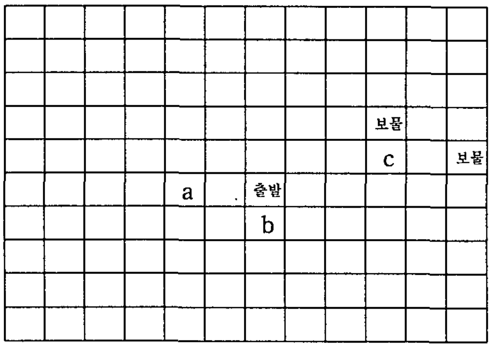
다) 활동내용

(활동1) 다음의 판 위에서 ①, ②, ③의 세 가지 방법으로 보물이 있는 곳까지 가 봅시다.

① a : 왼쪽으로 두 칸

② b : 아래로 한 칸

③ c : 오른쪽으로 세 칸 그리고 아래로 한 칸



<그림 11> 보물찾기 - 1

위와 같이 상하좌우로 무한히 많은 격자점이 있는 벽지를 상상해 본다. 중앙에 있는 점은 정사각형을 가의 세 가지 방법으로 움직여 보시오.

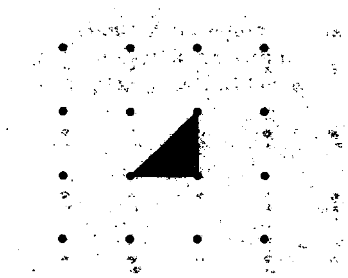
(활동2) 검은 정사각형을 ①, ②, ③의 세 가지로 움직이면 벽지를 모두 채울 수 있는지를 말하시오.

(활동3) ①번과 ②번을 한 다음 ③번을 해보시오. 그 결과를 색칠해 보시오.
②번과 ③번을 한 다음 ①번을 해보시오. 그 결과를 색칠해 보시오.
▷ 결과는? ⇒기호로 표시하기

(활동4) 검은 사각형을 위의 규칙대로 움직인 다음 그 곳에서 처음 자리로 이동시키는 방법을 설명하시오.

(활동5) ①번을 한 다음 ②번을 해 보시오. 그 결과를 색칠해 보시오.
②번을 한 다음 ①번을 해 보시오. 그 결과를 색칠해 보시오.
▷ 결과는?

(활동6) 아래에 있는 직각이등변삼각형을 ①, ②, ③의 세 가지로 움직이면 벽지를 모두 채울 수 있는지 말하시오. 그 이유를 말해 보시오.



<그림 12> 보물찾기 - 2

(활동7) 3번에서 직각이등변 삼각형으로 벽지를 모두 채우려면 어떤 이동이 더 필요한가요?

(활동8) 주어진 도형을 돌리기와 뒤집기한 결과를 학습지에 나타내 봅시다.

2) 2차시 : 강체운동의 합성

가) 학습 목표 : 옮기기(평행이동), 돌리기(회전), 뒤집기(반사)를 섞어서 두 번 하기.

나) 학습자료 : (교사) 실물화상기, 모눈종이, 대형거울 및 작은 직사각형모양의 거울,
(아동) OHP필름, 유성펜, 지우개, 거울, 컴파스, 모눈종이

다) 활동내용

(활동) 도형의 옮기기, 돌리기, 뒤집기를 섞어서 두 번해 보시오.

- 옮기기를 두 번하면 무슨 이동이 되는가?
- 돌리기를 두 번하면 무슨 이동이 되는가?
- 뒤집기를 두 번하면 무슨 이동이 되는가?
- 옮기기와 돌리기를 하면 무슨 이동이 되는가?
- 돌리기와 뒤집기를 하면 무슨 이동이 되는가?
- 옮기기와 뒤집기를 하면 무슨 이동이 되는가?
- 위의 세 가지 이동 외에 또 다른 이동이 있나요?

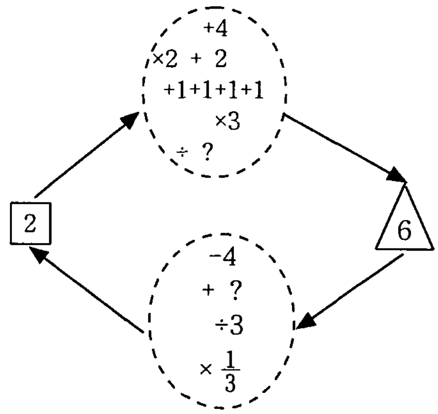
3) 3차시 : 수 만들기

가) 학습 목표 : 수 만들기를 통한 분수의 나눗셈 알기.

나) 학습자료 : (교사) 실물화상기, 자연수 숫자카드, 분수 숫자 카드
(아동) 숫자 매트, 자연수 숫자 카드, 분수 숫자 카드

다) 활동내용

(활동1) 2로부터 사칙연산을 이용하여 6 만들기
사칙 연산으로 2를 6으로 만들어 보자.



<그림 13> 수 만들기

(활동2) 6으로부터 사칙연산을 사용하여 2 만들기
사칙연산으로 6을 2로 만들어 보자.

(활동3) 2로부터 6을 만드는 방법은 여러 가지가 되는 것을 확인시킨다.

(활동4) 6으로부터 2를 만드는 방법은 여러 가지가 되는 것을 확인시킨다.

(활동5) 그 중 곱셈과 나눗셈만을 고려하자.

i) $2 \times 3 = 6$, $2 \div ? = 6$

ii) $6 \times \frac{1}{3} = 2$, $6 \div 3 = 2$

(활동6) $2 \div ? = 6$에서 ?는 무엇인지 찾아 보고 2로부터 6을 만들고 다시 2를 만들 수 있는지를 알아 본다.

(활동7) 다음 빈칸을 채워보자.

i) $\boxed{2} \times 3 \div 3 = 6 \div 3 = \boxed{2}$

ii) $\boxed{2} \times 3 \times \frac{1}{3} = 6 \times \frac{1}{3} = \boxed{2}$

iii) $\boxed{2} \div ? \times \frac{1}{3} = 6 \times \frac{1}{3} = \boxed{2}$

iv) $\boxed{2} \div ? \div 3 = 6 \div 3 = \boxed{2}$

(활동8) 다음 빈 칸을 채워 보자

$2 \times 3 \div \square = 2$

아동의 답은 3 이며 즉각적이었다.

(활동9) 다음 빈 칸을 채워 보자

$2 \div \square \times \square = 2$

아동의 답은 1과 1이었고 어려워하였다.

(활동10) 다음 빈 칸을 채워 보자

$8 \div \square \times \square = 8$

아동의 답은 2 와 2, 4 와 4, 8 과 8이었고 이유는 0이 아니면 된다, 8의 약수만 대답, 두 칸에 같은 수가 들어간다.

(활동11) $2 \times 3 \div 3 = 2$ 이다. 다음 빈 칸을 채워 보자.

$2 \div \square \times \frac{1}{3} = 2$

아동의 답은 $\frac{1}{3}$이었고 어려워함, $\frac{1}{3}$은 2의 약수가 아님

나. 지도 결과

1) 보물 찾기

보물찾기에서는 Brousseau의 상황론을 적용하였다. 가장 적은 횟수로 빠르고 정확하게 보물을 찾은 아동에게 지우개를 상품으로 주는 경기를 하였다. 삼각형으로 같은 과정을 지도하였다.

본 내용은 평행이동으로 아동이 무난하게 보물을 찾고 되돌아오는 결과를 얻었다. 보물 찾는 방법을 아동이 수행했던 과정을 바꾸어도 같은 결과를 얻는 것을 알았고 교사는 그 점을 강조하였다.

세 가지 규칙을 이용하여 보물을 찾은 다음 다시 출발지점으로 되돌아 올 수 있다는 점을 좋아했다. 40명 중 15명 이상이 상당히 빠르게 답하였다. (활동6)의 방법으로는 아동이 주어진 규칙대로 이동하다가 모눈종이가 가득 채워지지 않게 됨을 알게 되었다. 모눈종이를 가득 채울 수 있는 방법을 묻자 아동은 뒤집고 돌리는 방법을 제안하였다.

2) 강체운동

평면의 강체운동은 아음과 같다.

- 옮기기를 두 번하면 옮기기
- 돌리기를 두 번하면 돌리기 혹은 옮기기
- 뒤집기를 두 번하면 옮기기 혹은 돌리기
- 옮기기와 돌리기를 하면 돌리기
- 돌리기와 뒤집기를 하면 뒤집기
- 옮기기와 뒤집기를 하면 (미끄럼)뒤집기
- *위의 세 가지 이동 외에 또 다른 이동이 있나요?* 제자리

3) 수 만들기

수 만들기를 통하여 다음을 알았다.

$6 \times \frac{1}{3} \times 3 = 6$, $6 \div 3 \times 3 = 6$ 이고 ×3 은 $\div \frac{1}{3}$과 같고 ÷3 은 $\times \frac{1}{3}$과 같다.

또한 $2 \div \frac{1}{3} = 2 \times 3 = 6$ 이고 3과 $\frac{1}{3}$의 관계는 곱하면 1이 된다. 이 것은 보물 찾기에서 보물을 찾고 되돌아오는 경우와 같다. 지도시 주의 할 사항은 보물찾기에서는 사전에 10분 정도의 예비활동을 시킨다. 오답을 낸 아동의 결과를 모두 검토하게 한다. 보물찾기의 질문단계와 수 만들기의 질문단계를 가급적 일치하도록 유도한다. 즉 닫힘성, 항등원, 가역성, 교환법칙 등을 두 활동에서 연계가 되도록 한다. 같은 방법으로 3에서 4 만들기, 4에서 3 만들기를 계속하여 분수의 나눗셈은 역수를 곱한 것이 같음을 알게한다. 그리고 활동시에 유의 할 점은 각자 활동을 시킨 다음 가급적 협동하여 문제를 해결하도록 하고, 활동 후에는 자유스러운 토론의 장을 마련하고, 원시적인 군 개념을 형성시키도록 배려하고, 군 개념과 분수 나눗셈을 연결시켜서 군 개념이 수학에서 중요함을 인식시켜야 하겠다.

2. 활동(Ⅱ) : 도형의 이동

2002년 5월 광주 G 초등학교 3학년 아동 41명을 대상으로 실행한 내용이다. 아동이 포장지를 만드는 과정을 주제로하여 정의에 따른 정확한 평면의 강체 운동을 숙지하게 하고자했다.

가. 지도 내용

1) 1차시 : 도형 옮기기

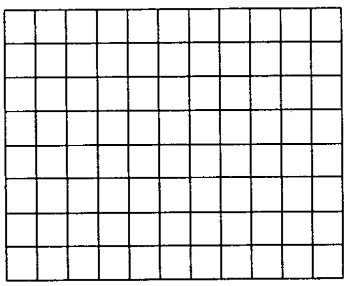
가) 학습 목표 : 도형 옮기기의 특징을 알고 주어진 도형을 여러 방향으로 옮길 수 있다.

나) 학습자료 : (교사) 모눈칠판, 원형색자석,
(아동) OHP필름, 유성펜, 지우개

다) 활동내용

(활동1) 아동이 앞에 나와 상하좌우로 몇 걸음씩 걷게 한다. 이때 변한 것과 변하지 않은 것이 무엇인지 알아보게 한다.

(활동2) 아래 <그림 14>와 같이 도형이 그려진 모눈종이를 배부하고 투명한 OHP필름에 도형을 본 뜨게 한 다음 상하좌우로 몇 칸씩 옮기기를 한 도형을 그리게 한다. 이때에도 변한 것과 변하지 않은 것이 무엇인지 알아보게 한다.



왼쪽 도형을 OHP필름으로 덮고 본을 뜬 다음 오른쪽으로 6칸 옮긴 도형을 그려보고 처음 도형과 비교해 봅시다.

<그림 14> 도형 옮기기

(활동3) 도형 옮기기 방법을 사용하여 모눈종이에 도형을 규칙성 있게 배열하기

2) 2차시 : 도형 뒤집기

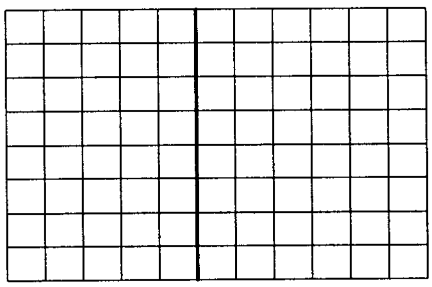
가) 학습 목표 : 도형 뒤집기의 특징을 알고 주어진 도형을 여러 방향으로 뒤집은 모양을 그릴 수 있다.

나) 학습자료 : (교사) 실물화상기, 모눈종이, 대형거울 및 작은 직사각형모양의 거울,
(아동) OHP필름, 유성펜, 지우개, 거울, 모눈종이

다) 활동내용

(활동1) 거울을 보면서 손으로 왼쪽 눈이나 귀를 가리키는 활동을 하면서 실제 자기가 하는 행동과 거울 속의 모습을 비교한다. 이때 변한 것과 변하지 않은 것이 무엇인지 알아보게 한다.

(활동2) 아래 <그림 15>와 같이 도형이 그려진 모눈종이를 배부하고 투명한 OHP필름에 도형을 본 뜨게 한 다음 뒤집어 보게 한다. 또 반사축에 거울을 대고 실제 도형과 거울 속의 도형 모습을 비교하게 한다. 이때에도 변한 것과 변하지 않은 것이 무엇인지 알아보게 한다.



왼쪽 도형을 반사축에 거울을 대고 거울에 반사된 도형을 그려보고 처음 도형과 비교해 봅시다.

<그림 15> 도형 뒤집기

(활동3) 주어진 도형을 상하좌우에 대칭축을 그리고 뒤집은 모양을 그리게 한다. 거울을 사용하지 않고도 뒤집기를 할 수 있는 아동은 거울이나 OHP필름을 사용하지 않도록 한다.

(활동4) 도형 뒤집기 방법을 사용하여 모눈종이에 도형을 규칙성 있게 배열하기

3) 3차시 : 도형 돌리기

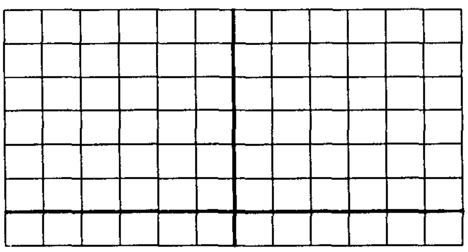
가) 학습 목표 : 도형 돌리기의 특징을 알고 주어진 도형을 여러 각도로 돌리기한 모양을 그릴 수 있다.

나) 학습자료 : (교사) 놀이용 돌리기 모양판,
(아동) OHP필름, 유성펜, 지우개, 거울, 모눈종이

다) 활동내용

(활동1) 놀이용 돌리기판으로 간단한 게임을 하면서 바늘이 회전한 다음의 모습이 처음과 같은 점과 다른 점이 무엇인지 알아보게 한다.

(활동2) 아래 <그림 16>와 같이 도형이 그려진 모눈종이를 배부하고 투명한 OHP필름에 도형을 본 뜨게 한 다음 회전점을 연필로 고정한 다음 반시계 방향으로 직각만큼 회전해 보게 한다. 이때에도 변한 것과 변하지 않은 것이 무엇인지 알아보게 한다.



오른쪽 도형을 OHP필름에 본 뜬 다음 점을 중심으로 왼쪽으로 직각만큼 돌리기한 도형을 그려보고 처음 도형과 비교해 봅시다.

<그림 16> 도형 돌리기

(활동3) 모눈종이에 주어진 도형을 OHP필름에 본을 뜬 다음 회전점을 중심으로 반시계 방향으로 직각, 2직각, 3직각, 4직각 회전한 모양을 모눈종이에 그린다.
상하좌우에 OHP필름을 사용하지 않고도 돌리기를 할 수 있는 아동은 사고만으로 그려보도록 한다.

4) 4차시 : 재미있는 놀이, 도형 움직이기의 합성

가) 학습 목표 : 놀이를 통하여 도형 옮기기, 뒤집기, 돌리기를 익숙하게 할 수 있다.

나) 학습자료 : (교사) 모양카드,
(아동) 모양카드 2장, 스티커, 모눈종이, OHP필름, 유성펜

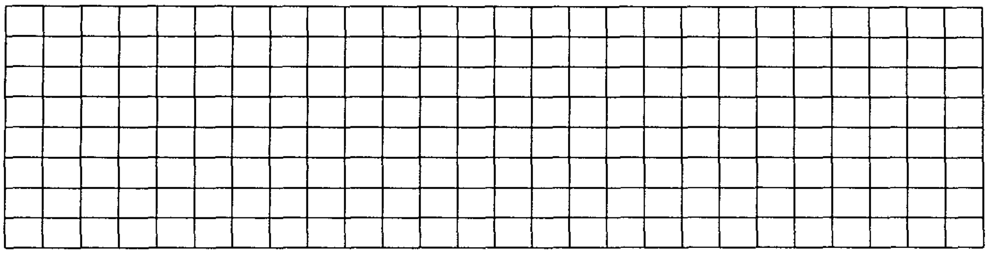
다) 활동내용

(활동1) 도형 이동을 이용한 놀이를 한다. 교사는 모양카드 본래의 모양을 보여주고 아동이 움직이기 방법을 알지 못하게 하여 모양 움직인 다음 어떤 방법으로 이동을 한 것인지 알아맞춰 보도록 한다. 정답을 말하는 아동에게는 스티커를 붙여주고 상대방이 모양을 제시하도록 한다. 아동도 이와 같은 방법으로 한 번씩 번갈아 가며 놀이를 하도록 하여 가역적 사고를 기르도록 한다.

(활동2) 도형이 그려진 모눈종이를 배부하고 투명한 OHP필름에 도형을 본 뜨게 한 다음 단일한 이동을 합성한 복합적인 경우를 생각하도록 한다. 먼저 옮기기를 2 회하기(예를 들어 오른쪽으로 3칸, 위로 2칸 등), 뒤집기를 2회(예를 들어 오른쪽으로 뒤집고 다시 또 오른쪽으로 뒤집기), 돌리기를 2회(예를 들어 왼쪽으로 2직각만큼1 돌리고 다시 또 오른쪽으로 직각만큼 돌리기) 등 같은 종류의 이동을 합성하는 경우이다. 또 다른 종류의 이동을 합성하는 경우는 아주 쉽게 결과를 기대할 수 있는 경우를 학습하도록 한다.

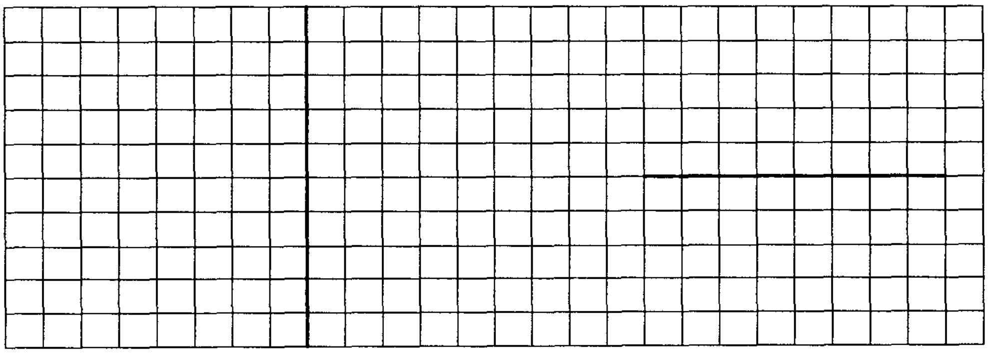
5) 5차시 : 수행평가 및 수준별 학습

가) 아래 모눈종이의 도형을 왼쪽으로 6칸 옮기기를 한 도형과 오른쪽으로 10칸 옮기기를 한 도형을 그리시오.



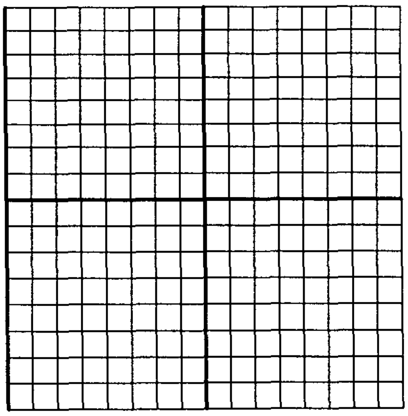
<그림 17> 도형의 옮기기 평가

나) 아래 모눈종이의 도형을 뒤집기한 도형을 그리시오.



<그림 18> 도형의 뒤집기 평가

다) 아래 모눈종이의 도형을 반시계 방향으로 90도, 180도, 270도만큼 돌리기한 도형을 그리시오.



<그림 19> 도형의 돌리기 평가

6) 6차시 : 실생활에 적용하기(포장지 만들기)

가) 학습 목표 : 도형 옮기기, 뒤집기, 돌리기를 실생활에 적용하여 규칙성 있는 무늬의 포장지를 꾸밀 수 있다.

나) 학습자료 : (아동) 모눈칸이 그려진 도화지, 무늬모양카드 30장, 풀, 검은 먹지, 색연필

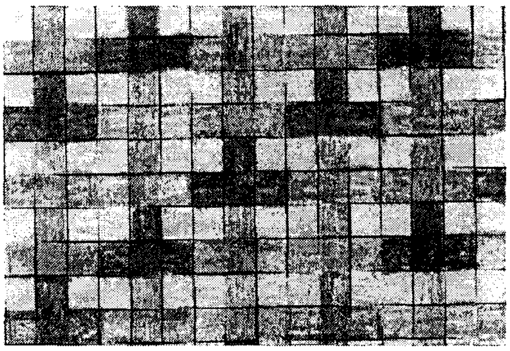
다) 활동내용 : 모눈칸이 그려진 도화지에 무늬가 인쇄된 작은 카드를 강체운동의 일정한 규칙을 적용하여 붙인다. 이 활동이 끝나면 꾸민 포장지를 실물화상기에 투영하여 어떤 강체운동을 어떤 규칙을 적용하여 배열하였는지 설명하도록 한다.

나. 지도 결과

1) 도형 옮기기

아동은 걷기를 통해서 옮기기의 의미를 쉽게 이해했다. 특히 옮기기를 하면 모양은 변하지 않고 위치만 변한다고 스스로 말할 수 있었다. 교과서에서는 상하좌우로 적당한 거리를 제시하지 않고 옮기기 학습이 제시되었지만 실제로 상하좌우로 얼마만큼 옮기기를 하는 활동을 즐겁게 하였다. 또한 옮기기와 옮기기를 합성한 형태인 연속해서 두 번 옮기기는 걷기를 통해서는 모든 아동이 수행할 수 있었으나 모눈종이에 그릴 때는 몇 칸 옮기기를 도형과 도형 사이의 공간으로 인식하는 오류를 범하는 아동이 33% 이었다.

모눈종이에 도형 옮기기를 활용한 테셀레이션 활동은 64% 의 아동이 아래 <그림 20>과 같이 한 가지 도형을 일정한 간격과 규칙적인 색의 배열로 꾸미기를 하였다.

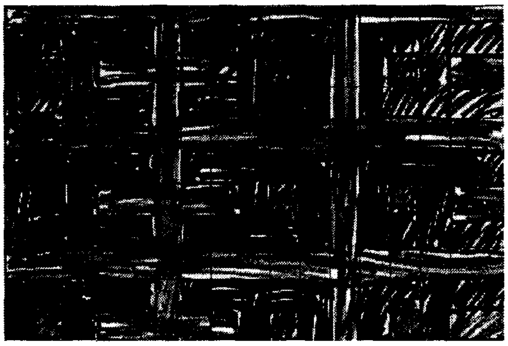


<그림 20> 옮기기를 활용한 테셀레이션

2) 도형 뒤집기

아동은 투명종이보다는 OHP필름에 본을 떠서 뒤집은 것이 더 효과적이었고 반사축에 거울을 대고 거울에 반사된 도형과 본래 주어진 도형의 모양을 비교하는 것이 뒤집기의 의미를 이해하는데 가장 효과적이었다. 아동은 주어진 도형과 거울에 투영된 도형을 비교하면서 모양은 변하지 않지만 방향이 변하였음을 스스로 발견할 수 있었다. 또 뒤집기를 한 다음 다시 뒤집기를 하면 본래 도형의 모습을 찾는 것도 발견하였으며 나중에는 거울의 도움을 받지 않고도 도형의 뒤집기를 쉽게 할 수 있는 아동이 72% 이었다.

뒤집기를 활용하여 모눈종이에 테셀레이션을 한 결과 아래 <그림 21> 36% 의 아동이 반사축을 기준으로 알맞은 간격을 유지하면서 나타낼 수가 있었다. 나머지 42% 의 아동은 반사한 그림을 제대로 그릴 수는 있으나 반사축으로부터의 일정한 간격을 유지하지 못하거나 2직각 회전한 도형을 섞어서 그리는 아동이 있었다.



<그림 21> 뒤집기를 활용한 테셀레이션

3) 도형 돌리기

아동은 OHP필름에 도형의 본을 뜬 다음 회전점을 연필로 고정한 다음 반시계 방향으로 직각만큼 도형을 돌렸다. 3-가 단계에서는 직각의 의미를 직사각형을 학습하면서 배웠지만 구체적으로 각을 재는 학습은 하지 않았기 때문에 직각만큼 회전한다는 인식이 명확하지 않았다. 더욱이 2직각, 3직각을 회전하는 것은 더욱 어려움이 많았다. 도형 옮기기나 뒤집기에 비해서 돌리기를 학습하기가 가장 어려웠다.

4) 재미있는 놀이, 도형 움직이기의 합성

먼저 문제를 제시한 아동의 카드 모양을 보고 상대방 아동은 어떻게 움직였을지를 생각한 다음 자기의 카드를 조작하였다. 처음의 예상이 맞으면 곧바로 문제의 카드 모양과 같게 하고 움직인 방법을 말할 수 있었다. 그러나 예상이 빗나간 아동은 자기 카드를 이리저리 움직여 보고 시행착오를 거듭한 뒤 움직인 방법을 말하였다.

이 놀이는 카드 모양을 보고 직관적으로 움직인 방법을 가역적인 사고로 예상할 수 있어야 하고 직접 조작을 통해 확인을 한다. 정답을 말하는 아동은 스티커를 많이 확보하여 이 놀이에 승리자가 된다. 여러 가지 움직임의 합성은 아동에게 어려움이 많았다. 옮기기끼리의 합성은 아주 쉽게 해결하였다.

옮기기를 예를 들면 왼쪽으로 3보, 앞으로 2보를 걷는다든지 모눈종이에서 오른쪽으로 4칸, 아래로 2칸을 옮기기를 92% 의 아동이 이해를 하였다. 모눈 칠판에 색자석을 옮기는 것도 별로 어려움 없이 하였다. 그러나 모눈종이에 도형을 옮기기하면 실제로 모양 전체가 주어진 거리만큼 옮기기를 하는 것이 아니라 처음 도형과 옮긴 후의 도형 사이의 간격으로 이해하는 아동이 33% 였다. 뒤집기끼리의 합성은 처음에는 OHP필름을 한 번 뒤집은 다음 다시 또 뒤집으면 본래의 모양을 되찾는다는 것을 깨달았다. 거울을 사용하여 그림을 그리는 것은 처음의 모양과 비교하면서 그릴 수 있어서 더욱 편리하였다. 나중에는 60% 의 아동이 거울의 도움이 없이도 뒤집기의 모양을 모눈종이에 그릴 수 있었다.

돌리기끼리의 합성은 아동에게 가장 어려움이 많은 것으로 처음에는 아주 간단하게 회전각이 360도 범위 내에서 이루어지도록 직각만큼 돌리고 다시 2직각만큼 돌리기하는 정도로 활동하였다. 그 다음에는 회전각이 360도보다 큰 각을 연습하였으나 42% 의 아동만이 제대로 할 수 있었다.

다음으로는 옮기기를 한 다음 뒤집기나 돌리기를 하였으나 어려움이 많았다. 3-가 단계의 아동이 서로 다른 옮기기를 합성한다는 것은 집착력이 약하고 복합적인 사고를 해야 하기 때문에 끝까지 움직이기의 합성 과정을 수행한다는 것이 무리였다. 그래서 15% 의 아동만이 제대로 할 수 있었다.

5) 수행평가 및 수준별 학습

단원평가를 위한 <그림 17, 18, 19>를 완성하는 수행평가에서 아동은 다음 <표 1>와 같은 결과를 얻었다. 아동은 어렵게 생각되던 뒤집기가 잘 학습되었고, 옮기기에서는 주어진 거리만큼 옮기는데 오류가 63%였다. 돌리기에서는 회전점을 중심으로 돌리는 것을 정확하게 할 수 있는 아동이 27%로 도구를 이용하지 않고 돌리기를 하는 것은 아동에게 많은 어려움이 따른다는 것을 알 수 있었다.

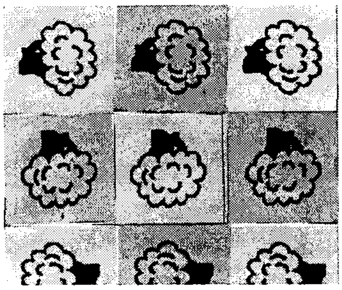
6) 포장지 만들기

색깔이 다른 몇 가지의 무늬를 정사각형으로 잘라 주고 여러 가지 움직이기 방법을 활용하여 규칙성 있게 무늬를 배열하여 포장지를 만드는 활동을 아주 즐거워하

였다. 대부분의 아동이 뒤집기를 하려면 먹지를 대고 무늬를 그려야 뒷면에 나타나고 이것을 색연필로 색칠해야 하므로 옮기기와 돌리기를 주로 활용하였다. 아동이 사용한 방법에는 주로 아래 <그림 12>처럼 색깔을 번갈아서 줄별로 돌리기를 한 아동이 많았는데 여러 가지 사고를 복합적으로 해야 하므로 아동은 일관성을 유지하여 무늬를 꾸미는데는 어려웠다.

<표 1> 수행평가 결과

움직인 방법	전혀 이해하지 못한다.	조금은 알고 있으나 그림으로 나타내기가 서투르다.	알고는 있지만 그림으로 나타내는데 약간의 오류가 있다.	정확하게 알고 있다.	계	비고
옮기기			**26** (63%)	**15** (37%)	41	
뒤집기			**12** (29%)	**29** (71%)	41	
돌리기	**5** (12%)	**10** (24%)	**15** (37%)	**11** (27%)	41	
계	5 (4%)	10 (8%)	53 (43%)	55 (45%)	123 (100%)	



<그림 22> 여러 가지 움직임을 활용한 테셀레이션

학급에서 22%정도의 아동이 일관성 있게 무늬를 꾸몄고 나머지 78% 아동은 일관성을 유지하지 못하고 여러 가지 움직임을 혼용하여하였다. 그리고 수업의 종결단계에서 이것을 통해 수학이 우리 생활과 아주 밀접하고 우리가 배운 것을 일상생활에 즉각 활용할 수 있다는 점이 좋았다고 하였다.

V. 결론

수학은 물론이고 모든 자연과학의 구조적인 사고의 기저는 군의 개념이다. 따라서 군 개념을 조기에 지도하여 학교 수학의 교수-학습에 수월성을 최대화하고 과학분야 역시 군 개념에 대한 지도를 인용해야한다. 이러한 중요성을 감안하여 본 논문에서는 제 2장에서 군의 개념의 역사 발생적 측면과 Klein의 Erlangen program의 핵심에 있는 4원군을 이용한 도형의 분류 등을 논하여 군 개념 지도의 방향설정을 제시하였다. 또한 군의 본질인 대칭에 관한 Freudenthal(1973A)의 논의와 강체운동의 정의와 합동변환군의 내용을 간략하게 소개하여 강체운동의 수학교육적 의미를 강조하였다. 그리고 생활 속에서의 응용을 위하여 벽지패턴의 정의를 소개하였다. 그리고 광주광역시 소재 G 초등학교에서 세가지 활동을 실행한 수업의 결과를 토대로 군 개념 지도의 한 방향을 논하였다. 수학의 특성 중 하나는 위계성이다. 도형의 이동의 지도 내용을 위계적으로 정돈하여 아동과 교사가 일목 요연하게 개념을 습득하도록 해야한다. 그리하여 Piaget(1970)가 중시하는 군성체(groupement)의 수학적 표현이고 Bourbaki가 주장한 수학의 세가지 모구조(Beth & Piaget,1961) - 대수적구조,순서구조 그리고 위상적 구조-의 근간이 되는 대수적 구조의 시작인 군 개념을 아동에게 주려는 지도의 방향을 교사는 고려하여야 할 것이다.

참 고 문 헌

교육부 (2000). 수학과 교육과정 별책 **8**, 대한교과서주식회사.

김용태 (2001). 새로운 교재 개발에 관한 소고. 초등교과교육론, 양서원, 141-152.

______ (2003). 교수단원에 의거한 군 개념 지도에 관한 연구, 동계수학교육학연구발표대회논문집, 대한수학교육학회, 461-476.

남진영, 박선용 (2002). 대칭성 관점에서 본 문제해결 및 군 개념 지도. 수학교육학연구 **제12권 제4호**, 대한수학교육학회, 509-522.

홍진곤 (2000). 어떻게 구조를 가르칠 것인가-구조를 중심으로, 수학교육학연구 **제10권 제1호**, 대한수학교육학회, 73-84.

Beth, E. W. & Piaget, J. (1961). Epistemologie mathematique et psychologie. W. Mays(trans.) (1966). *Mathematical epistemology and psychology*. Dortrecht:D.Reidel Publishing Co.

Bruner, J. S. (1973). *The process of education*,Harvard University Press.

Dubinsky, E., et. al (1994). On learning fundamental concepts of group. *Educatio Studies in Mathematics* 27. 267-305.

Farmer, D. W. (1996). *Groups and Symmetry,* AMS.

Freudenthal, H. (1973A). What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematical education, in *Developments in mathematical ducation. Proc., of ICME-2, A. G. Howson(ed.,)*, Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 101-114.

__________ (1973B). *Mathematics as an educational task.* D. Reidel Publishing Co., Dortrecht-Holland.

_________ (1983). *Didectical phenomenology of mathematical structures.* D. Reidel Co., Dortrecht -Holland.
Piaget, J. (1970). *Structuralism.*trans. by Maschler, N. Y.: Harper and Row.
Waerden, B. L. van der. (1985). *A history of algebra.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
Wussing, H .(1984). *The genesis of the abstract group concept.* MIT Press.

On the instruction of concepts of groups in elementary school

Kim,Yong-Tae
Gwangju National University of Education
ytkim@gnue.ac.kr

Shin, Bong-Sook
GumGoo Elementary School
shinbs_kr@yahoo.co.kr

In late 19C, German mathematician Felix Klein declaired "Erlangen program" to reform mathematics education in Germany. The main ideas of "Erlangen program" contain the importance of instructing the concepts of functions and groups in school mathematics. After one century from that time, the importance of concepts of groups revived by Bourbaki in the sense of the algebraic structure which is the most important structure among three structures of mathematics - algebraic structure, ordered structure and topological structure. Since then, many mathematicians and mathematics educators devoted to work with the concepts of group for school mathematics. This movement landed on Korea in 21C, and now, the concepts of groups appeared in element mathematics text as plane rigid motion.

In this paper, we state the rigid motions centered the symmetry - an important notion in group theory, then summarize the results obtained from some classroom activities. After that, we discuss the responses of children to concepts of groups.

* ZDM classification: E42
* MSC2000 classification: 97C50