韓國數學教育學會誌 시리즈 C
<初等數學教育>
2003. 5. 제 7권, 제 1호, 31-41.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
May. 2003, Vol. 7, No. 1, 31-41.

초등수학 예비교사들의 분수에 대한 표상의 분석

이대현 (전주공업고등학교)
서관석 (전주교육대학교)

I. 서론

수학 교수-학습에서 강조되고 있는 수학적인 힘(*mathematical power*)은 학생들이 많은 양의 단편적인 지식을 습득하기보다는, 그들이 무엇을 해야 하고, 어떻게 해야 하며, 왜 그렇게 되는지를 아는 '관계적 이해'를 통해 신장될 수 있다. 그러나, 학생들이 표준화된 알고리즘을 이용하여 문제를 해결하고 답을 산출할 수 있으나, 왜 그런가에 대한 이유를 파악하지 못하고 단순히 문제만을 해결하는 '도구적 이해'가 경제적이고 즉각적이며 분명하다는 이유로 학교 수학교육에서 강조되어 왔다. 특히, 초등학교 수학에서 분수 영역은 여러 가지 이유로 인하여 학생들에게 어려운 주제로 인식되어 왔고, 따라서 학생들은 분수에 대한 문제해결에서 표준화된 알고리즘을 적용한 도구적 이해에 의한 결과 산출에 치중해 왔다.

이러한 이유 중 하나는 학생들에게 분수에 대한 충분한 개념적 토대를 개발해 주지 못한 채로, 분수의 기호화와 알고리즘을 습득하도록 하는데 많은 시간을 할애해 온 교수 방법을 들 수 있다. 두 번째 이유로는, 분수 개념 자체가 여러 가지 하위 개념(부분과 전체, 비, 몫)으로 구성되어, 각각의 분수의 개념과 이들 개념에 적절한 상황을 연결시키기가 쉽지 않다는 것을 들 수 있다. 세 번째 이유로는 분수에서의 곱과 나눗셈이 자연수에서의 곱과 나눗셈의 결과와는 반대의 결과를 산출할 수 있는 것과 같이, 분수가 수 체계의 초기 단계부터 익숙해져 온 자연수와는 다른 성질을 가지고 있다는 것을 들 수 있다.

이와 같이, 분수 학습에서 제기되는 문제점은 분수를 하나의 수로 인식하고, 자연수와 마찬가지로 크기도 비교할 수 있고, 이들에 대한 가감승제가 가능하다는 것을 인식하고, 분수의 개념에 대한 충분한 이해와 분수가 적용되는 상황을 적절히 표상 하도록 지도함으로써, 분수 학습의 내실화를 꾀해야 함을 시사한다. 이에, NCTM(1989)에서도 학교 수학에서 분수에 대한 지도는 수 감각과 함께 그 개념이 발달하도록 지도되어야 한다고 권고하고, 다음과 같이 진술하고 있다.

> 개념적 접근은 아동들로 하여금 구체적 상황에서 의미를 찾아 분명하고 견고한 개념을 얻게 하고, 또한 경험적 근거에서 수학적 추상화가 이루어지게 한다 (p. 17).

이러한 분수 학습에 대한 권고와 분수 학습에서의 어려움은 결국 분수라는 하나의 수에 대한 '표상의 문제'와 관련이 있다. 즉, 학생들이 분수를 알고 분수의 연산이 내포하고 있는 개념적 의미를 이해 할 수 있도록 하기 위하여, 학생들은 분수가 이용되는 구체적인 상황을 표상하고, 일상 생활에서 분수가 적용되는 상황을 구성할 수 있어야 한다. 이와 같은 분수의 표상에 대한 강조는 결국 학생들이 분수의 개념적 토대를 구성할 수 있도록 함으로써, 표준화된 알고리즘의 형식화를 초래하는 도구적 학습의 폐단을 예방할 수 있는 방안이 된다.

그런데, 수학 교실에서 학생들이 학습할 주제에 대한 개념적 토대는 교사와의 상호작용을 통한 결과로 형성되며, 이를 위해서는 수학 교사가 교수 주제에 대하여 정확하고 유의미한 표상을 가지고 있는 것이 무엇보다 중요하다고 할 수 있다. 특히, 분수의 지도와 관련하여, 문헌의 결과들은 수학 교사들이 분수의 연산(특히, 분수의 나눗셈)에 대하여 정확한 표상을 가지고 있지 못함을 지적하고 있다(Ma, 1999). 그리고, 우

---

* ZDM 분류: B52
* MSC2000 분류: 97B50

리나라 초등 예비 교사들의 분수의 나눗셈에 관한 내용적 지식과 교수학적 지식 수준에 대한 연구에서도 초등 예비 교사들의 분수의 나눗셈에 대한 표상 능력이 매우 부족하다는 것을 보이고 있다(서관석, 전경순, 2000). 이러한 문헌은 피험자들이 분수의 연산에 대한 문제해결에서는 알고리즘을 적용할 수 있는 충분한 능력을 지니고 있음에도 불구하고, 이 연산에 대한 지도를 어떻게 할 것인가와 연산과 관련된 표상을 구성할 수 있는가에 대한 이해는 전자와는 반대의 양상을 보임으로써, 분수와 관련된 교수의 내실화에 의문을 제기하고 있다.

따라서, 본 연구에서는 분수 지도의 내실화를 기하기 위한 방안으로, 초등 수학 예비 교사들의 분수와 분수의 연산에 대한 개념적 이해 정도를 그들이 가지고 있는 표상에 근거하여 파악하고, 이를 바탕으로 분수 영역의 지도를 위한 시사점을 도출하고자 한다.

II. 교사의 분수에 대한 표상

수학교육에서 표상은 수학적 개념이나 관계를 이해하도록 도와주고, 여러 가지 수학적인 주제에 대해 의사소통이 가능하도록 하며, 수학적 개념들간의 연결성을 형성해 주고, 수학적 모델링을 통해 현실 상황의 문제를 해결하도록 하는데 중요한 요소이다. 특히, 학생들의 수학적 개념에 대한 적절한 표상은 그 표상과 관련된 개념에 대한 명확한 이해를 바탕으로 현실 상황을 수학화하는 능력이 배양되어, 정형화된 문제나 비 정형화된 문제의 문제해결에 도움을 준다. 이에 대해, NCTM(2000)은 수학 수업 프로그램은 수학에 대한 이해를 촉진시켜서 유치원에서부터 모든 학생들이 다음과 같이 할 수 있도록 수학적 표상을 강조해야 한다고 권고하고 있다.

- 수학적 아이디어를 조직하고, 기록하고, 의사소통할 수 있는 여러 가지 표현들을 창조하고 사용하기
- 문제를 풀기 위하여 수학적 표현들을 선택하고 적용하고 변역하기
- 물리적, 사회적, 수학적 현상을 모델링하고 해석하기 위하여 표현을 이용하기(p. 67).

여기에서 표상이라는 용어는 수학적인 개념이나 관계를 파악하는 행동이나 형태 그 자체를 모두 일컬으며, 외적으로 관찰 가능한 과정들과 산물(외적 표현)뿐만이 아니라, 수학을 하는 사람들의 정신 속에서 내적으로 일어나는 과정들과 산물(내적 표상)들 모두에 적용된다(NCTM, 2000). 따라서, 표상은 학교 수학에서 특히 관심의 대상이 된다. 특히, 외적 표현과 내적 표상은 순환적으로 상호작용하며, 수학적 개념에 대하여 학습자의 마음속에 형성된 이미지는 외적인 표현으로 구체화되고, 외적으로 구체화된 표현을 다시 학습자가 읽고 번역함으로써 그 개념을 내적 표상으로 변환시킨다. 이러한 외적 표현과 내적 표상간의 상호작용의 메카니즘은 어떤 수학적 개념에 대한 인식 주체의 외적 표현을 통해 그들이 가지고 있는 내적 표상을 파악함으로써, 그 개념에 대한 인식 주체의 이해 정도를 파악할 수 있음을 시사한다.

그런데, 외적 표현이든 내적 표상이든 인식 주체는 어떤 수학적 개념에 대하여 다양한 표상을 가질 수 있다. 그리고, 이들이 가지는 표상은 원 개념의 의미와 합치될 수도 있고 그렇지 못할 수도 있다. 이것은 수학 교사의 지도 측면에서 볼 때, 어떤 개념에 대해 교사가 가지고 있는 표상이 그 개념에 대한 학생들의 표상에 직접적인 영향을 주기 때문에, 교사는 가르치는 개념에 대해 정확한 표상을 소유하여야 하며, 이를 바탕으로 학생들이 주어진 개념에 대하여 올바른 표상을 구성하도록 이끌어 주어야 함을 시사한다. 특히, 이러한 사실은 학생들에게 어려운 주제로 인식되고 있는 분수의 영역에 더욱 그렇다.

그러나, 교사나 예비 교사들은 분수의 연산에 대하여 만족스럽지 못한 표상을 가지고 있다는 것을 여러 연구에서 밝히고 있다(서관석, 전경순, 2000; Ma, 1999). Ma(1999)는 초등학교 수학교사들에게 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$의 계산과 그 결과의 수학적 진술에 대한 의미 표현이라는 두 가지 과제를 제시하여 그 결과를 분석하였다. 연구 대상 23명의 미국 교사 중 9명(43%)만이 이 문제에 대하여 정확한 계산을 하고 정답을 찾았다. 반면에 72명의 중국 교사들 모두는 그 문제에 대하여 '어떤 것을 나누는 것은 그 역수를 곱하는 것과 같다'라는 말을 언급하면서 정확하고 완전한 답을 산출해 내었다.

그렇지만, 이 연산이 내포하고 있는 수학적 진술에 대한 의미 표현이라는 면에서는 부정적인 결과를 보이

고 있다. 미국 교사 23명 중 43%가 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$을 바르게 계산했지만, 6명은 이와 관련된 문항을 만들지 못했으며, 16명은 오개념을 사용한 문장을 만들었다. 단 한 명만이 개념적으로는 옳은 문장 만들어 냈지만, 교육적으로는 문제가 있는 문장이었다. 이들이 보인 오류는 $\frac{1}{2}$로 나누는 것을 2로 나누는 것과 혼동하거나, $\frac{1}{2}$로 곱하는 것과 혼동하거나, 이들 셋을 혼용해서 쓰는 것으로 보이고 있다.

다행히도, 중국 교사는 72명 중 65명이 분수 나눗셈의 의미를 내포하는 문장제를 올바르게 만들어 내었고, 단지 6명(8%)만이 문장제를 만들지 못했고, 한 명은 잘못된 문제를 만들어 내었다. 옳은 문장제를 만들어 낸 교사들이 제시한 분수의 나눗셈 모델은 측정 모델과 분할 모델, 그리고 곱과 인수 모델에 근거하고 있다.

그런데, 교사들이 보인 반응은 자연수를 이용한 나눗셈 상황에 대한 포함제(division; 특별한 크기의 모임들을 만드는 것-모임의 수를 구하기)와 등분제(partition; 특정한 개수만큼의 모임 만들기-모임 안의 수를 구하기)중에서, 현상학적 설명이 등분제보다 포함제의 설명이 훨씬 도움을 줌을 알 수 있다.

한편, 교사 교육적 관점에서 초등 예비 교사들의 분수의 나눗셈에 관한 내용적 지식과 교수학적 지식 수준에 대한 연구는 예비 교사들이 알고리즘에 의존하는 연산에 대한 지식을 정확하게 소유하고 있는 반면에, 분수의 나눗셈에 대한 근본적인 이해와 표상 능력은 매우 부족하다는 것을 보이고 있다(서관석, 전경순, 2000).

이와 같이, 초등학교 수학 교사나 예비 교사들의 분수와 관련된 표상 정도는 학생들의 분수의 개념적 이해와 이 영역의 성취도에 직접적인 영향을 줄 수 있다. 예를 들면, 우리나라 초등 학생들은 수학 교사나 예비교사들의 연구 결과와 비슷한 결과를 보이고 있다(김옥경, 1997; 박정임, 2001; 전평국, 박혜경, 2003). 또한, IEA주관으로 만 13세 학생들의 수학 수준을 파악하기 위하여 실시한 TIMSS-R의 연구 결과에서, 우리 나라 학생들은 내용 영역별로 측정(2위), 자료의 표현 및 해석·확률(1위), 기하(2위), 대수(2위) 영역에서 좋은 성적을 보이고 있으나, 분수와 수 감각(4위)의 영역은 상대적으로 취약한 것으로 나타났다(박정, 채선희, 김명숙, 최석진, 2002).

이런 면에서, 수학 교사들의 분수에 대한 개념적 이해나 이에 대한 적절한 표상 능력이 갖추어지지 못한다면, 분수 교육과 관련된 현행의 문제점은 계속될 것이며, 이 영역에 대한 학생들의 학습 결손은 계속될 것이다. 따라서, 분수 교육에 대한 문제점을 개선하기 위한 한 가지 방안을 교사 교육에 두고, 초등 예비 교사들의 분수와 분수의 연산에 대한 표상을 파악하여, 이를 바탕으로 새로운 분수 교육 방안 마련의 자료로 이용해야 할 것이다.

III. 연구 방법 및 절차

본 연구는 초등학교 수학 예비 교사들이 분수와 분수의 연산의 상황을 어떻게 경험적 지식이나 현실 상황에 적용할 수 있는가를 알아보기 위하여, 이들 영역에 대해 예비 교사들이 가지고 있는 표상을 분석하고자 한다. 이를 위하여, 분수와 분수의 연산에 대한 문제를 이용하여 조사연구를 실시하였다.

(1) 연구 대상 및 연구 문제

본 연구의 검사 대상은 J교육대학교 수학교육과 4학년 39명의 예비교사들로서, 분수와 관련된 개념에 대하여 이들이 가지고 있는 표상 정도를 알아보기 위하여 다음과 같은 연구 문제에 대한 조사연구를 실시하였다.

첫째, 분수를 제시하고, 이에 적절한 상황을 설정하도록 할 때, 수학 예비교사들의 반응은 분수의 하위 개념(부분과 전체, 비, 몫)에 따라 어떻게 나타나는가?

둘째, 분수의 연산에 대한 문제를 제시하고, 이 문제를 해결하고, 이에 적절한 문장제를 설정하도록 할 때, 수학 예비교사들의 반응은 어떠한가?

(2) 도구 및 절차

본 연구에서는 예비교사들의 분수 영역에 대한 표상 정도를 분석하기 위하여, 분수와 분수의 연산에 관

한 문항으로 구성된 검사지를 구성하였다. 검사에 이용된 검사 문항은 제 7차 수학과 교육과정에 따른 분수의 지도와 관련하여, 교육과정에 제시된 분수와 분수의 연산에 관한 교과 내용을 바탕으로 선택되었다.

검사 결과를 추출하기 위하여, 자료 분석은 분수에 대한 표상의 경우에는 분수의 하위 개념에 따라 분석하였고, 분수의 연산에 대한 표상의 경우에는 주어진 연산에 대한 풀이 과정과 분수의 연산에 따라 어떻게 문장제를 구성하는가로 나누어 분석하였다.

Ⅳ. 연구 결과

초등학교 예비교사들의 반응을 바탕으로 추출한 '분수에 대한 표상 정도'와 '분수의 연산에 대한 표상 정도'에 대한 결과는 다음과 같다.

(1) 분수에 대한 표상 정도

(문제 1) 분수 $\frac{3}{5}$이 나타내는 상황을 3가지씩 제시해 보시오.

초등학교 수학에서 이용되는 분수의 모델은 부분-전체(part-whole), 몫, 비 모델이 있다. 부분-전체 모델은 어떤 대상을 똑 같은 부분으로 나누는 경우이고, 몫 모델은 어떤 대상을 몇 개의 부분으로 나누어 분배하는 상황으로 두 가지의 서로 다른 양이 포함된다. 그리고, 비 모델은 어떤 대상의 분할이 아니라 하나의 양을 다른 양과 비교하는 모델이다.

<표 1> 문제 1에 대한 반응 결과

구 분		응 답 자		응답률(%)	
부분-전체	영 역	68	93	58.1	79.5
	길 이	11		9.4	
	집 합	14		12.0	
몫		7		6.0	
비		10		8.5	
오 답		7		6.0	
무응답		0		0	
계		117		100	

초등학교 예비교사들의 경우에, 분수에 대하여 가지고 있는 표상은 <표 1>에서 보여지는 것과 같이 부분-전체 모델이 우세하였다(모든 응답자에게 3개의 답을 하도록 요구하였기 때문에 총 응답자 수는 117이 되었다). 또한, 부분-전체 모델에서도 피자를 나누거나 도형을 나누는 것과 같은 '영역'을 이용한 부분-전체 모델의 이용 정도가 현저하게 높았다.

상대적으로 몫 모델과 비 모델을 이용한 경우는 아주 적었다. 이러한 결과는 이후에 분수에 대한 다른 의미와 표상의 적용에 어려움을 야기할 수 있다. 즉, 분수를 수로 인식하거나 분자를 분모로 나눈 결과로 분수를 생각하는 것을 막을 수 있다(Kerslake, 1986). 또한, 분수에 대한 예비 교사의 교과내용 지식의 결손은 교수학적 상황에서 전개되는 다양한 분수의 의미에 대한 지도에 대해서도 어려움을 나타낼 수 있다. 오답의 경우에는 아래 제시된 것과 같이, 분수를 적용하는 예시를 나타내는 경우가 있었다.

'물 컵에 물이 $\frac{3}{5}$만큼 채워져 있다'

'$\frac{3}{5}\times 100=60\%$이다'

(2) 분수의 연산에 대한 표상 정도

(문제 2) 분수의 연산 $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=$에 관한 문제에 대하여 문제 풀이 과정과 답을 제시하시오. 그리고, 그 문제의 의미를 정확히 나타낼 수 있는 문장제를 기술하시오.

분수의 덧셈에 대한 계산과 표상 정도를 알아보기 위한 이 문제에서 초등학교 예비교사들은 모두 정확한 계산 결과를 산출하였다<표 2>. 그리고, 연산의 의미를 나타내는 문장제의 경우에도 모두 정확한 문장제를 만들었다. 적절한 문제를 구성한 각각의 경우를 살펴보면, <표 2>에서 보여지는 것과 같이 거의가 '부분-전체' 모델을 이용하여 구성하였다. 이 결과는 분수에 대한 표상의 결과가 이를 이용한 연산의 경우에도 적용되고 있음을 보여준다.

<표 2> 문제 2에 대한 반응 결과

계산과정 및 답	응답자	응답률(%)
정 답	39	100
오 답	0	0
무응답	0	0

반응 형태		응 답 자		응답률(%)	
적절한 문제 구성	부분-전체	36	39	92.3	100
	몫	0		0	
	비	3		7.7	
부적절한 문제 구성		0		0	
무응답		0		0	
계		39		100	

적절하게 문장제를 구성한 예비 교사들의 대표적인 반응은 다음과 같다.

'피자 한판을 사서 4조각으로 나누었다. 그 중에서 철수가 한 조각을 먹고, 영희가 두 조각을 먹었다. 두 사람이 먹은 피자는 전체 피자의 얼마인가?'

'농부가 고추밭에 씨를 뿌리고 있다. 전체 4고랑 중 어제는 한 고랑을, 오늘은 두 고랑에 씨를 뿌렸다. 농부는 전체 고랑 중 얼마 만큼에 씨를 뿌렸는가?'

'빨간 수건 2장, 노란 수건 1장, 파란 수건 1장이 있다. 전체 수건에 대하여 빨간 수건이 차지하는 비율과 노란 수건이 차지하는 비율의 합은 얼마인가?'

이상에서, 예비 교사들이 분수와 분수의 덧셈이 주어진 경우에 이에 대한 표상의 결과는 '부분-전체' 모델이 압도적임을 알 수 있다. 따라서, 이 문항들의 반응 결과는 예비 교사 교육기간에 걸쳐 분수에 대한 그 외의 하위 개념에 대해서도 익숙해 질 수 있는 경험과 분수에 대한 풍부한 개념적 이해를 가지도록 이끌어 줄 수 있는 방안을 모색해야 함을 시사한다.

(문제 3) 분수의 연산 $\frac{3}{8}\times 5=$에 관한 문제에 대하여 문제 풀이 과정과 답을 제시하시오. 그리고 그 문제의 의미를 정확히 나타낼 수 있는 문장제를 기술하시오.

분수×자연수의 계산과 표상 정도를 알아보기 위한 이 문제에서 초등학교 예비교사들은 모두 정확한 계산 결과를 산출하였다<표 3>. 그리고, 연산의 의미를 나타내는 문장제의 구성의 경우에도 정확한 문장제를 만든 비율이 아주 높았다. 초등학교 예비교사들이 산출한 이 문제에 대한 문장제는 다음과 같은 것이 있었다.

'$\frac{3}{8}$kg의 가방이 5개 있다. 가방 전체의 무게는 몇 kg인가?'

'8장의 카드 중에서 3장의 그림 카드가 있다. 5번을 연속하여 뽑을 때 그림 카드가 뽑힐 확률을 구하여라 (단, 뽑은 카드는 다시 넣는다)'

첫 번째 기술된 문장제를 제시한 예비교사는 문제풀이에서 자연수의 곱의 상황에서의 동수누가의 성질을 이용하였다. 그리고, 두 번째 기술된 문장제의 경우는 복원추출을 이용한 확률을 이용하였다. 물론, 초등학생에게는 적절하지 않은 문제이지만, 수학교육을 전공하고 있는 예비교사의 분수의 연산에 대한 표상 정도를 묻는 것이므로 유의미하며, 풍부한 내적 연결성 강화를 위한 토대가 형성되고 있음을 알 수 있다.

<표 3> 문제 3에 대한 반응 결과

계산과정 및 답	응답자	응답률(%)
정답	39	100
오답	0	0
무응답	0	0

반응 형태	응 답 자	응답률(%)
적절한 문제 구성	35	89.7
부적절한 문제 구성	3	7.7
무응답	1	2.6

한편, 이 문제에 적절한 문장제를 산출하지 못한 예비교사들의 반응은 '귤이 8개가 들어가는 상자가 5개 있다. 그런데, 각 상자에는 3개씩 귤이 들어 있다. 귤의 개수를 구하여라'와 같은 범주의 유형이 3개 발견

되었다. 이들 반응은 집합을 이용한 부분-전체 모델에서 부분만을 고려함으로써 자연수의 곱으로 오인하는 오류를 일으켰음을 알 수 있다.

(문제 4) 분수의 연산 $2\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} =$에 관한 문제에 대하여 문제 풀이 과정과 답을 제시하시오. 그리고 그 문제의 의미를 정확히 나타낼 수 있는 문장제를 기술하시오.

대분수×진분수의 계산과 표상 정도를 알아보기 위한 이 문제에서 초등학교 예비교사들은 계산에 대해 높은 비율의 정답률을 나타내었다<표 4>. 그리고, 연산의 의미를 나타내는 문장제의 경우에도 정확한 문장제를 만든 비율이 높은 편이었다(71. 8%). 초등학교 예비교사들이 산출한 이 문제에 대한 대표적인 문장제는 다음과 같은 것이 있었다.

'자전거로 이모 집에 $2\frac{1}{3}$시간 걸린다. 그런데 자동차로는 2배 빨리 달린다고 한다. 그러면 자동차로 달린 시간은 몇 시간인가?'

'직사각형 모양의 땅의 가로의 길이가 $2\frac{1}{3}$m이고, 세로의 길이가 $\frac{1}{2}$m이다. 이 땅의 넓이를 구하여라'

<표 4> 문제 4에 대한 반응 결과

계산과정 및 답	응답자	응답률(%)
정답	37	94.9
오답	0	0
무응답	2	5.1

반응 형태	응 답 자	응답률(%)
적절한 문제 구성	28	71.8
부적절한 문제 구성	3	7.7
무응답	8	20.5

특히, 이 문제의 경우에는 분수×자연수의 경우보다 문장제의 구성에 어려움을 느끼는 예비교사들의 비율이 많다는 것을 알 수 있는데, <표 4>에서 알 수 있는 바와 같이 무 응답한 비율이 20%가 넘는 것으로 나타났다. 또한, 문장제를 구성했다 할지라도 부적절한 문제를 구성한 경우가 나타났는데, 이를 예시하면 다음과 같다.

'달걀 3개가 한 묶음으로 된 두 묶음과 달걀 1개가 있다. 교회 성도들의 수가 달걀 개수의 2배이어서 반씩 나누어야 한다. 한 사람은 얼마만큼의 달걀을 먹을 수 있는가?'

'200㎖ 우유 2팩과 $\frac{1}{3}$팩을 400㎖로 옮기면 어떻게 되는가?'

'두 판의 피자와 똑같이 3등분한 것의 하나를 각각 2명에게 주었다. 피자는 전부 얼마가 필요한가?'

이와 같이, 부적절한 응답을 한 반응을 살펴보면, 분수의 상황을 자연수의 경우로 바꾸거나, $2\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} =$ 의 상황을 $2\frac{1}{3} \times 2 =$으로 해석한 것이 발견되었다.

(문제 5) 분수의 연산 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} =$에 관한 문제에 대하여 문제 풀이 과정과 답을 제시하시오. 그리고 그 문제의 의미를 정확히 나타낼 수 있는 문장제를 기술하시오.

분수의 연산 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} =$에 관한 문제에 대하여, 초등학교 예비교사들은 무응답 2명을 제외하고 모두가 옳은 계산 과정과 결과를 산출하였다<표 5>. 그러나, 이 연산에 적절한 상황을 보여 주는 문장제를 구성하라는 물음에는 61.5%만이 옳은 답을 산출하였다. 이러한 결과는 분수의 나눗셈에서 제수의 역수를 곱하는 과정에 대한 개념적 이해의 부족과 자연수의 나눗셈에서 여러 상황에 대한 철저한 이해가 부족하기 때문이라고 볼 수 있다(Flores, 2002).

이들의 반응 결과를 자세히 분석해 보면, 측정모델($1\frac{3}{4}$은 $\frac{1}{2}$의 몇 배인가? $\frac{1}{2}$의 몇 배가 $1\frac{3}{4}$이 되는가?)이 11명, 분할 모델(얼마의 $\frac{1}{2}$이 $1\frac{3}{4}$이 되는가?)

이 0명, 곱과 인수모델을 이용한 사람이 5명으로, 선행 연구 결과와 같이 포함제(측정 모델)의 설명이 분수의 나눗셈의 상황 설정에 유리함을 나타내었다.

이들 결과는 Ⅱ장에서 제시한 바와 같이, 같은 문항을 이용한 중국 교사들에 대한 조사 결과보다는 저조하지만, 미국 교사들에게서 나타난 결과보다는 좋은 결과이다. 그러나, 미래의 수학교육을 담당할 예비교사임을 고려할 때, 좀 더 철저한 관심이 필요한 부분이라 할 수 있다. 옳은 반응을 한 결과의 예시는 다음과 같다.

'$1\frac{3}{4}$m의 끈을 $\frac{1}{2}$m씩 자르면, 몇 개나 되는가?'

'밭이 $1\frac{3}{4}$마지기가 있다. 철수가 매일 $\frac{1}{2}$마지기씩 밭을 갈면, 모두 가는데 몇 일이 걸리는가?'

'$1\frac{3}{4}$㎢인 직사각형 모양의 논이 있다. 가로의 길이가 $\frac{1}{2}$㎞일 때, 세로의 길이를 구하여라'

<표 5> 문제 5에 대한 반응 결과

계산과정 및 답	응답자	응답률(%)
정답	37	94.9
오답	0	0
무응답	2	5.1

반 응 형 태		응답자		응답율(%)	
정답	측정모델	11	16	28.2	41.0
	분할모델	0		0	
	곱과인수	5		12.8	
알고리즘적용		8		20.5	
오 답		4		10.3	
무 응 답		11		28.2	

반응 결과는 분수의 나눗셈에서 제수의 역수를 곱하여 결과를 산출하는 알고리즘 적용 과정을 이용하여, 문장제를 구성한 경우도 있었다.

'영희는 운동장을 $1\frac{3}{4}$만큼 달리고, 그 뒤를 친구가 $1\frac{3}{4}$만큼 달렸다. 두 사람이 달린 거리는 얼마인가?'

'수학 수업에 한 모듬에 리본이 $1\frac{3}{4}$이 필요한데, 두 모둠이 있다. 교사가 준비해야 하는 리본의 길이를 구하여라'

오답으로 답을 한 예비 교사들의 반응은 '$1\frac{3}{4}$의 피자를 두 명이 나누어 먹을 때, 한 사람이 먹는 양을 구하여라', '노끈의 $1\frac{3}{4}$의 $\frac{1}{2}$을 이용하려 한다. 얼마나 이용할 수 있는가?', '$1\frac{3}{4}$m의 리본을 친구와 반씩 나누어 가지려고 한다. 내가 가질 수 있는 리본의 길이는 얼마인가?'와 같이, $1\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}=$의 상황을 $1\frac{3}{4}\div 2=$으로 해석한 것이 발견되었다

(문제 6) 분수의 연산 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=$에 관한 문제에 대하여 문제 풀이 과정과 답을 제시하시오. 그리고, 그 문제의 의미를 정확히 나타낼 수 있는 문장제를 기술하시오.

분수의 연산 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=$에 관한 문제에 대하여, 초등학교 예비교사들은 무응답 3명을 제외하고 모두가 옳은 계산 과정과 결과를 산출하였다<표 6>. 그러나, 이 연산에 적절한 상황을 보여 주는 문장제를 구성하라는 물음에는 56.4%만이 옳은 답을 산출하였다. 이들의 반응 결과를 자세히 분석해 보면, 측정모델이 9명, 분할 모델이 0명, 곱과 인수모델을 이용한 사람이 10명이었다. 구체적으로, 옳은 반응을 한 결과를 제시하면 다음과 같다.

'어떤 사람이 $\frac{3}{4}$면적의 논을 경작하는데, 하루에 그 논의 $\frac{2}{5}$씩 경작한다면 이사람이 논을 경작하는데 걸리는 시간은?'

'$\frac{3}{4}$ ℓ의 쥬스가 있다. $\frac{2}{5}$ ℓ의 컵으로 쥬스를 마시면 몇 번의 컵에 담을 수 있는가?'

'밭의 넓이가 $\frac{3}{4}$ ㎡이다. 가로의 길이가 $\frac{2}{5}$ m라면 세로의 길이는 몇 m인가?'

(문제 5)와 마찬가지로, 학생들의 반응 중에는 알고리즘의 적용 과정을 그대로 문장제로 번역하여 제시한 것도 발견되었다.

특히, 이 문항의 경우에는 무응답을 한 결과가 16명(41%)이나 나타났으며, 무응답은 계산 문제 풀이의 결과와 비교할 때, 계산 과정에 대한 알고리즘에 국한된 이해가 우세한 상황임을 알 수 있다.

<표 6> 문제 6에 대한 반응 결과

계산과정 및 답	응답자	응답률(%)
정답	36	92.3
오답	0	0
무응답	3	7.7

반 응 형 태		응답자		응답율(%)	
정답	측정모델	9	19	23.1	48.7
	분할모델	0		0	
	곱과인수	10		25.6	
알고리즘적용		3		7.7	
오 답		1		2.6	
무 응 답		16		41.0	

오답은 '한 사람에게 과자 $\frac{3}{4}$조각씩 5명에게 주려고 준비했는데, 5명이 전학을 왔다. 한사람에게 나누어지는 과자의 양은 얼마인가?'와 같이, 알고리즘이 적용되는 과정을 이용하다가 오류를 일으킨 사례가 발견되었다.

(3) 연구결과 요약

초등학교 예비교사들의 '분수에 대한 표상 정도'와 분수의 연산에 대한 문장제를 어떻게 구성할 수 있는가를 파악하기 위한 '분수의 연산에 대한 표상 정도'에 대한 연구 결과를 요약하면 다음과 같다.

분수에 대한 표상 정도: 초등학교 예비교사들의 경우에, 분수에 대하여 가지고 있는 표상은 '부분-전체' 모델이 우세하였다. 또한, 부분-전체 모델에서도 피자를 나누거나 도형을 나누는 것과 같은 '영역'을 이용한 부분-전체 모델의 이용 정도가 현저하게 높았다. 상대적으로 몫 모델과 비 모델은 적용 비율이 아주 낮았다.

분수의 연산에 대한 표상 정도: 초등학교 예비교사들은 분수의 연산에 대하여 계산 과정과 결과 산출에 아주 높은 정답률을 나타내었다. 그러나, 분수의 연산에 대한 문장제를 구성하도록 요구한 물음을 통해 알아 본 분수의 연산에 대한 표상 정도는 '분수의 덧셈'과 '분수×자연수'에 대한 문장제 구성에는 아주 높은 옳은 반응을 했으나, '분수의 나눗셈'의 경우에는 과반수를 조금 넘는 수의 예비교사만이 옳은 문장제를 산출하였다. 이를 통해, 초등학교 예비교사들은 분수의 나눗셈에 대한 주제에 대하여, 개념적 이해가 부족하며 알고리즘에 의존하는 정도가 강함을 알 수 있었다.

V. 결론 및 논의

교사가 교수 주제에 대하여 정확하고 유의미한 표상을 가지고 있는 것은 무엇보다 중요하다. 특히, 분수의 지도와 관련하여, 문헌과 연구의 결과들은 수학교사나 학생들 모두가 분수에 대한 이해나 분수의 연산에 대하여 정확한 표상을 가지고 있지 못함을 지적하고 있다(서관석, 전경순, 2000; Kerslake, 1986; Ma, 1999). 이러한 연구 결과들은 초등학교 예비교사들이 '분수와 분수의 연산에 대하여 어떤 지식을 가지고 있는가', '이들 영역에 대한 지도를 어떻게 할 것인가'와 '연산과 관련된 표상을 어떻게 가지고 있는가'를 파악함으로써, 분수와 관련된 교수의 내실화에 기여할 수 있을 것으로 기대된다.

이러한 연구 필요성에 따라, 본 연구에서는 J교육대학교 수학교육과 4학년 39명의 예비 교사들을 대상으로 조사연구를 실시하여, 초등 수학 예비 교사들이 가지고 있는 분수에 대한 표상 정도와 분수의 연산에 대한 표상 정도를 파악하였다. 연구 결과에 따르면, 초등학교 예비교사들은 분수에 대한 표상에 대하여 '부분-전체' 모델을 우세하게 나타냄으로써, 다양한 분수의 하위영역에 대한 이해가 부족함을 나타내었다. 그리고, 분수의 연산에 대하여 계산 과정과 결과 산출에는 아주 높은 정답률이 나타내었으나, 분수의 나눗셈에 대한 경우에는 과반수를 조금 넘는 수의 예비교사만이 옳은 문장제를 산출하여, 이 영역에 대한 개념적 이해가 필요함과 동시에 이를 위한 예비 교사의 지도 방안의 모색이 요구됨을 알 수 있었다.

이러한 연구 결과에 따라, 초등 수학 예비교사들에 대한 교사 교육과 관련하여 몇 가지 제언을 할 수 있다. 첫째로, 예비 교사들은 분수 영역에 대하여 절차적 지식과 마찬가지로 개념적 지식을 소유하여야 한다. 개념적 이해를 위하여 예비 교사들은 관련된 수학 주제들 사이에 풍부한 네트웍을 구성하도록 해야 한다. 예를 들어, 분수의 나눗셈에 대한 개념적 이해를 위해 필요한 다른 개념이나 주제와 연결된 아이디어를 갖지 못하면, 예비교사들은 분수의 나눗셈의 의미에 대한 개념적 표상을 만들 수 없다. 이러한 면에서 자연수의 나눗셈에서 포함제와 등분제의 상황과 분수의 나눗셈 상황의 연결은 중요하다. 이러한 연결은 자연수에서의 나눗셈 상황을 분수의 나눗셈 상황으로 쉽게 전이 되도록 이끌어 줄 수 있다(Siebert, 2002).

따라서, 이 영역에 풍부한 네트웍을 형성할 수 있는 교수 프로그램이 교원 양성과정에서 다루어져야 하며, 교사용 지도서나 안내서, 관련 자료들은 가르칠 주제에 대한 풍부한 아이디어의 네트웍을 제공하도록 구성되어야 할 것이다. 즉, 교사용 지도서나 안내서는 지도 내용에 대한 피상적인 진술은 피하고, 가르칠 내용과 관련된 다양한 영역에 대한 이론적이고 실재적인 내용을 제시해 주고, 이를 탐구할 기회를 제공하도록 구성되어져야 한다. 한편, 연구에서 알 수 있듯이, 한 주제에 대하여 예비 교사들이 가지고 있는 표상은 매우 다양하다. 따라서, 이들을 통합하고 개선하기 위하여 함께 문제를 해결하고 토론할 기회를 예비 교사 교육 과정에서 가져야 한다.

둘째로, 예비 교사들이 미래에 가르칠 수학 내용과 그것을 어떻게 가르칠 것인가에 대한 준비가 교원 양성 과정에서 동등하게 이루어져야 한다. 초등 수학은 기초적이고 초보적이기보다 이후의 수학교육으로 나아가는 나선을 이루는 요소이며, 초등수학에서 중등, 고등 수학으로 나아가는 연결 구조를 형성하고 있다. 따라서, 어떠한 주제에 대하여 어떻게 가르칠 것인가를 아는 것만큼, 가르칠 수학에 대한 명확한 이해가 필요하다고 볼 수 있다. 이것은 수학교실에서 죠르단 효과를 막는 길이기도 하다. 분수의 경우에, 분수의 하위 개념이나 연산의 의미를 명확히 하는 것은 분수의 소수의 표현, 비와 비율의 개념, 유리식의 의미 및 계산 방법 등에 대한 이해에 선행 요건이 된다(Flores, 2002).

셋째, 교사 교육과 학생 교육에 동시에 이용 가능한 교수 자료의 개발이 요구된다. 분수의 경우에 예비 교사들에게 친숙하지 않은 분수의 하위 개념 모델이나 분수의 연산에서 수용하기 어려운 문장제와 같은 내용으로 구성된 자료를 개발하여, 교원 양성 과정의 자료 및 학생 교육에 이용하는 것은 이 영역에 폭 넓은 이해를 줄 수 있는 방안이 된다. 이러한 사례는 Kerslake(1986)의 연구에서도 긍정적인 결과를 보고하고 있다.

학교 수학에서 분수와 관련된 주제를 학생들에게 개념적으로 이해시키기 위하여, 교사들이 이 영역에 대한 명확한 이해를 가지는 것은 선결요건이다. 이것은 학생들의 수학적 지식을 향상시키고자 한다면 먼저 교사들의 수학적 지식을 향상시켜야 한다는 것을 의미한다. 특히, 미래의 수학교육을 담당할 예비교사들을 위하여 그들의 수학적 지식을 체계적으로 익히고 발전시켜 가도록 이끌어 줄 수 있는 프로그램을 구안하는 것은 바람직한 미래의 수학교육으로 가는 첩경이라고 할 수 있다.

참 고 문 헌

김옥경 (1997). 초등학교 6학년 학생들의 분수 개념 이해 및 분수 수업 방안에 대한 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.

박정 · 채선희 · 김명숙 · 최석진 (2002). 우리나라 학생들의 국제적 학력 수준은 어떠한가. 한국교육과정평가원.

박정임 (2001). 분수의 나눗셈 개념에 관한 연구: 초등학교 6학년 학생을 중심으로. 한국교원대학교 석사학위논문.

서관석 · 전경순 (2000). 예비 초등 교사들의 분수 연산에 관한 내용적 지식과 교수학적 지식 수준에 대한 연구: 교사교육적 관점. 수학교육학 연구, **10(1)**, 103-113.

전평국 · 박혜정 (2003). 분수 나눗셈의 개념적 이해를 위한 관련 지식의 연결 관계 분석. 수학교육논문집, **15**, 71-76.

Flores, A. (2002). Propound Understanding of Division of Fractions. In Litwiller, B., & Bright, G. (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions; 2002 Yearbook(pp. 237-246)*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics. Inc.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors; A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project.* NFER-NELSON.

Liping Ma (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United State.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

______ (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Siebert, D. (2002). Connecting Informal Thinking and Algorithms: The Case of Division of Fraction. In Litwiller, B., & Bright, G. (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions; 2002 Yearbook*(pp. 247-256). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

An Analysis on the Elementary Preservice Mathematics Teachers' Representation about Fraction

Lee Dae-hyun
Jeon-Ju Technical High School, 548-2, Youi-dong, Jeonju, Korea
e-mail: leedh6@hanmail.net

Seo Kwan-seok
Jeon-Ju National University of Education, 89, Seohakro, Jeonju, Korea
e-mail: ksseo@jnue.ac.kr

Representation has been main topic in teaching and learning mathematics for a long time. Moreover, teachers' deficiency of representation about fraction results in teaching algorithms without conceptual understanding. So, this paper was conducted to investigate and analysize the elementary preservice mathematics teachers' representation about fraction. 38 elementary preservice mathematics teachers participated in this study.

This study results showed that, the only model of a fraction that was familiar to the preservice teachers was the part of whole one. And research showed that, they solved the problems about fraction well using algorithms but seldom express the sentence which illustrates the meaning of the operation by a fraction. Specially, the division aspect of a fraction was not familiar nor readily accepted. It menas that preservice teachers are used to using algorithms without a conceptual understanding of the meaning of the operation by a fraction.

This results give us some implications. Most of all, teaching programs in preservice mathematics teachers education have to devise to form a network among the concepts in relation to fraction. And we must emphasize how to teach and what to teach in preservice mathematics teachers education course. Finally, we have to invent the various materials which can be used to educate both preservice teachers and elementary school students. If we want to improve the mathematical ability of students, we will concentrate preservice teachers education.

* ZDM classification: B52

* MSC2000 classification: 97B50